К.МАРКС

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

ИНСТИТУТ МАРКСИЗМА-ЛЕНИНИЗМА при ЦК КПСС

К. МАРКС

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

3К 13
М 34
УДК 300.113

К. Маркс. Математические рукописи.

«Математические рукописи» К. Маркса посвящены в основном выяснению сущности дифференциального исчисления.

Предложенное Марксом объяснение смысла основных понятий и методов дифференциального исчисления позволяет и в настоящее время с позиций диалектического материализма разобраться в сущности символических исчислений математики и математической логики.

Настоящая книга состоит из двух частей, содержащих:

1) рукописи К. Маркса о дифференциальном исчислении и их черновые варианты;

2) подробное описание всех математических рукописей Маркса, включая конспекты и выписки из большого числа книг, внимательно им проработанных, с выделением критических замечаний и текста, принадлежащего Марксу.

Все тексты работ Маркса, имеющие наиболее законченный характер, и его собственные замечания в конспектах и выписках впервые публикуются полностью, как в переводе, так и на языке оригинала.

Книга снабжена комментариями и примечаниями историко-математического и источниковедческого характера, которые делают рукописи доступными широкому кругу читателей, не только математиков, но и философов, экономистов, инженеров.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Еще из предисловия Энгельса ко 2-му изданию «Анти-Дюринга» (1885 г.) было известно, что в рукописном наследстве Маркса имеются рукописи математического содержания, которым Энгельс придавал важное значение и которые собирался опубликовать. Фотокопии этих рукописей (около 1000 листов) хранятся в архиве Института марксизма-ленинизма при ЦК КПСС. К 50-летию со дня смерти Маркса, в 1933 г., часть их, содержащая результаты размышлений Маркса над сущностью дифференциального исчисления, которые он изложил для Энгельса в двух рукописях в 1881 г., и подготовительный материал к ним, была опубликована в русском переводе в журнале «Под знаменем марксизма» (1933 г., № 1, стр. 15—73) и в сборнике «Марксизм и естествознание» (1933 г., стр. 5—61). Однако на языке оригинала и эта часть математических рукописей Маркса до сих пор не была опубликована.

В настоящем издании все рукописи Маркса, носящие более или менее законченный характер или содержащие его самостоятельные замечания по тем или иным математическим вопросам, публикуются полностью.

Математические рукописи Маркса носят различный характер: одни из них представляют собой его собственные работы, относящиеся к дифференциальному исчислению, его природе и истории, в других содержатся конспекты и выписки из книг, которыми пользовался Маркс. В соответствии с этим настоящая книга состоит из двух частей. В первой из них помещены собственные работы Маркса. Во второй дается полное описание всех конспектов и выписок математического содержания. Как собственные работы Маркса, так и все его самостоятельные замечания, встречающиеся в конспектах, публикуются на языке оригинала и в русском переводе.

Хотя работы Маркса естественно отделять от конспектов и тем более выдержек из работ других авторов, для подлинного понимания мысли Маркса часто необходимо знакомство с конспектируемой им литературой. Только в целом книга дает поэтому правильное представление о содержании относящихся к математике идей Маркса.

Интерес к математике возник у Маркса в связи с его работой над «Капиталом». В письме Энгельсу от 11 января 1858 г. Маркс сам писал об этом так: «При разработке основ политической экономии меня так чертовски задерживают ошибки в подсчетах, что с отчаяния я снова засел за быстрое прохождение алгебры. Арифметика никогда не давалась мне. Но окольным алгебраическим путем я скоро опять возьму правильный прицел» (К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 29, стр. 210).

Следы первых занятий Маркса математикой встречаются в его первых тетрадях с выписками по политической экономии. Некоторые алгебраические выкладки имеются уже в тетради, основное содержание которой относится к 1846 г. Из этого не следует, однако, что эти записи не могли быть сделаны на свободных листах тетради в более позднее время. В тетради, относящейся к апрелю — июню 1858 г. и содержащей подготовительные материалы к «Критике политической экономии», встречаются некоторые чертежи по элементарной геометрии, а также алгебраические выкладки, относящиеся к обобщению понятия степени и логарифмам.

Однако в этот период занятия Маркса математикой шли только урывками, чаще всего, когда он уже не мог заниматься чем-либо другим. Так, 23 ноября 1860 г. Маркс писал Энгельсу: «Писать статьи для меня теперь почти невозможно. Единственное занятие, которым я поддерживаю необходимое душевное равновесие, это — математика» (Соч., т. 30, стр. 88). Несмотря на это, он неизменно шел вперед в своих занятиях математикой и 6 июля 1863 г. писал уже Энгельсу: «В свободное время занимаюсь дифференциальным и интегральным исчислением. Кстати. У меня избыток книг по этим вопросам, и я готов одну из них переслать тебе, если ты хочешь этим делом заняться. Я считаю это почти необходимым для твоих военных занятий. Кроме того, этот раздел математики гораздо легче (поскольку речь идет о чисто технической стороне), нежели, например, высшие разделы алгебры. Никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, здесь не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями» (Соч., т. 30, стр. 296). А в приложении к ненайденному письму конца 1865 или начала 1866 г. Маркс объяснял Энгельсу сущность дифференциального исчисления на примере задачи о касательной к параболе.

Но в основном математика все еще занимала его прежде всего в связи с политической экономией. Так, в 1869 г. в связи с изучением вопросов обращения капитала и роли векселей в межгосударственных расчетах Маркс обращается к большому курсу коммерческой арифметики Феллера и Одермана, который подробнейшим образом конспектирует (см. рукописи 2388 и 2400). Характерная для Маркса черта, состоящая в том, что, встретившись с каким-нибудь вопросом, в котором он еще не чувствовал себя вполне уверенно, Маркс не успокаивался до тех пор, пока не овладевал им полностью, вплоть до самых основ, проявилась и здесь. Всякий раз, когда в книге Феллера и Одермана использовался какой-нибудь математический аппарат, Маркс считал необходимым восстановить его в памяти, даже если был уже знаком с ним. В конспектах по коммерческой арифметике — этих и более поздних, см. рукописи 3881, 3888, 3931 — появлялись, таким образом, вставки чисто математического содержания, которые в свою очередь вели Маркса все дальше в область высших разделов математики.

В 70-х годах, особенно с 1878 г., занятия Маркса математикой приобрели уже почти систематический характер. Об этом времени Энгельс в предисловии ко 2-му изданию «Капитала» писал: «После 1870 г. снова наступила пауза, обусловленная главным образом болезненным состоянием Маркса. По обыкновению, он заполнял это время изучением; агрономия, американские и в особенности русские поземельные отношения, денежный рынок и банки, наконец естественные науки: геология и физиология, и в особенности самостоятельные математические работы составляют содержание многочисленных тетрадей Маркса с выписками, относящихся к этому времени» (Соч., т. 24, стр. 8).

В то же время вопросы применения математики к политической экономии продолжали интересовать Маркса. Так, в письме Энгельсу от 31 мая 1873 г. Маркс писал: «Я рассказал здесь Муру одну историю, с которой privatim [между нами говоря — *Ред.*] долго провозился. Но он думает, что вопрос неразрешим или, по крайней мере, pro tempore [временно — *Ред.*] неразрешим ввиду многих и большей частью еще лишь подлежащих обнаружению факторов, относящихся к этому вопросу. Дело в следующем: ты знаешь таблицы, в которых цены, учетный процент и т. д. и т. д. представлены в их движении в течение года и т. д. в виде восходящих и нисходящих зигзагообразных линий. Я неоднократно пытался — для анализа кризисов — вычислить эти up and downs [повышения и понижения — *Ред.*] как неправильные кривые и думал (да и теперь еще думаю, что с достаточно проверенным материалом, это возможно) математически вывести из этого главные законы кризисов. Мур, как я уже сказал, считает задачу пока невыполнимой, и я решил до поры до времени отказаться от нее» (Соч., т. 33, стр. 71—72).

Таким образом, ясно, что Маркс заведомо предвидел возможность применения математики в политической экономии.

Даже полное описание всех математических рукописей Маркса во второй части настоящей книги не дает еще полного ответа на вопрос о том, что именно побудило Маркса от занятий алгеброй и коммерческой арифметикой перейти к дифференциальному исчислению: математические рукописи Маркса фактически относятся уже к тому периоду, когда Маркс занимался элементарной математикой только в связи с задачами, встававшими перед ним при изучении дифференциального исчисления. Именно в этой связи находятся его занятия тригонометрией и теорией конических сечений, о необходимости которых он писал Энгельсу.

В дифференциальном исчислении дело обстояло, однако, плохо, и притом в самом его фундаменте — методологических основаниях, на которых оно строилось. Очень образно осветил это положение вещей в своем «Анти-Дюринге» Энгельс: «Когда в математику были введены переменные величины и когда их изменяемость была распространена до бесконечно малого и бесконечно большого,—тогда и математика, вообще столь строго нравственная, совершила грехопадение: она вкусила от яблока познания и это открыло ей путь к гигантским успехам, но вместе с тем и к заблуждениям. Девственное состояние абсолютной значимости, неопровержимой доказанности всего математического навсегда ушло в прошлое; наступила эра разногласий, и мы дошли до того, что большинство людей дифференцирует и интегрирует не потому, что они понимают, что́ они делают, а просто потому, что верят в это, так как до сих пор результат всегда получался правильный» (Соч., т. 20, стр. 88—89).

Естественно, что Маркс не мог примириться с этим. Употребляя его же слова, мы можем сказать, что «и здесь, как и всюду», для него было «важно сорвать с науки покров тайны» (см. наст. издание, стр. 193). Это было тем более важно, что переход от элементарной математики к математике переменных величин по самому своему существу должен был носить диалектический характер, а Маркс и Энгельс считали своим долгом показать, как применяется материалистическая диалектика не только в общественных науках, но и в естествознании и математике. Вскрыть же диалектику перехода к математике переменных величин можно было, только полностью разобравшись, в чем состоит «тайна, окружающая еще и в наше время те величины, которые применяются в исчислении бесконечно малых, — дифференциалы и бесконечно малые разных порядков» (Соч., т. 20, стр. 582). Именно эту задачу — выяснить диалектическую сущность символического исчисления, оперирующего со знаками дифференциалов, и поставил перед собой Маркс.

Маркс занимался математикой самостоятельно. Единственным человеком, к которому он мог обратиться за советом, был его друг Сэмуэл Мур, математические познания которого были, однако, весьма скромны. Какой-либо существенной помощи Марксу Мур поэтому не мог оказать. Более того, как это явствует из замечаний, сделанных Муром в связи с рукописями 1881 г., которые Маркс послал Энгельсу, содержавшими изложение идей Маркса о происхождении и смысле символического дифференциального исчисления, Мур просто не понял этих идей (см. Соч., т. 35, стр. 93—94).

Маркс обратился к учебникам дифференциального исчисления. Он ориентировался на книги, по которым велось преподавание в Кембриджском университете, где кафедру высшей математики еще в XVII веке занимал Ньютон, традиции которого с тех пор свято соблюдались в Англии. Известно, какую острую борьбу пришлось выдержать в 20-х — 30-х годах прошлого века английской молодежи, группировавшейся вокруг «Аналитического общества» математиков, с представителями устаревших традиций, превратившими в неприкосновенную «священную» догму обозначения Ньютона и применявшиеся им в «Началах» синтетические методы, требовавшие, чтобы каждая задача решалась непосредственно с начала, без подведения ее под какую-нибудь общую задачу, решаемую с помощью аппарата исчисления.

В этой связи достаточно понятно поэтому и то обстоятельство, что Маркс начал изучение дифференциального исчисления по курсу французского аббата Сори «Полный курс математики» (1778 г.), построенному по методу Лейбница и написанному в его обозначениях, и что он обратился непосредственно к «Анализу через уравнения с бесконечным числом членов» самого Ньютона (см. рукопись 2763). Разобравшись по Сори в лейбницевых алгорифмах дифференцирования, Маркс был настолько заинтересован ими, что даже разъяснил их (в применении к задаче о касательной к параболе) в специальном приложении к одному из писем Энгельсу (см. наст. издание, стр. 251—254).

Но Маркс не ограничился изучением курса Сори. Следующим курсом, к которому он обратился, был английский перевод (1827 г.) более нового, французского же, учебника Бушарла «Элементы дифференциального исчисления». Написанный в духе эклектического соединения идей Даламбера и Лагранжа, этот выдержавший в одной только Франции восемь изданий и переведенный на другие языки (существует и русский перевод учебника Бушарла) учебник не удовлетворил, однако, Маркса, и он обратился к ряду других работ и курсов. Помимо классических произведений Эйлера и Маклорена (который популяризировал труды Ньютона), тут были университетские учебники Лакруа, Хайнда, Холла, Хемминга и др. Ко всем этим книгам и относятся выписки и конспекты Маркса.

В них Маркса заинтересовала прежде всего точка зрения Лагранжа, который пытался справиться с характерными для дифференциального исчисления трудностями путем обоснования этого исчисления на «алгебраической» основе, т. е. без введения очень неясных, тогда еще неуточненных понятий *бесконечно малого* и *предела*. Детально ознакомившись с идеями Лагранжа, Маркс вскоре выяснил, однако, что на этом пути решение трудностей, связанных с символическим аппаратом дифференциального исчисления, не достигается. И Маркс начал разрабатывать собственный подход к выяснению сущности этого исчисления.

Расположенное по возможности в хронологическом порядке, описание всех математических рукописей Маркса во второй части настоящей книги позволяет выяснить путь, которым при этом шел Маркс. Мы видим, как, начав с попыток оправдать точку зрения Лагранжа, Маркс опять обращается к алгебре с целью выяснить алгебраические корни дифференциального исчисления. Естественно, что здесь его прежде всего интересует теорема о кратных корнях алгебраического уравнения, отыскание которых, по существу, связано с последовательным дифференцированием исходного уравнения. Этот вопрос специально обсуждается Марксом в ряде рукописей, прежде всего в рукописях 3932, 3933, фигурирующих здесь под названиями «Алгебра I» и «Алгебра II». Особое внимание Маркса привлекают теоремы Тейлора и Маклорена, которые Лагранж пытался доказать «чисто алгебраически», т. е. без помощи дифференциального исчисления. Маркс начал систематически подбирать в этой связи материал из разных источников о биномиальной теореме Ньютона и теоремах Тейлора и Маклорена. Так возникли прежде всего его рукописи 3933, 4000 и 4001, которые нельзя считать уже просто конспектами и тексты которых приводятся поэтому фактически полностью.

Вообще в конспектах Маркса начинают все чаще и чаще появляться его собственные замечания. В их числе нужно особо отметить замечания, относящиеся к понятию функции и к замене символа $\frac{0}{0}$ символом $\frac{dy}{dx}$. Замечания встречаются и в ряде других рукописей, см. особенно рукописи 2763, 3888, 3932, 4302.

Убедившись в том, что «чисто алгебраический» метод Лагранжа не решает трудностей, связанных с обоснованием дифференциального исчисления, и даже придя уже к собственной точке зрения на сущность и методы этого исчисления, Маркс начал все же с того, что стал собирать из всех имевшихся в его распоряжении источников материал о разных способах дифференцирования (см. рукописи 4038 и 4040) и только после этого перешел к изложению предложенного им самим (для некоторого класса функций) способа «алгебраического» дифференцирования и к составлению набросков основных идей, выражающих его собственную точку зрения. Эти идеи нашли уже отражение в работах и вариантах к ним, публикуемых в первой части настоящего издания. К содержанию этих работ мы теперь и перейдем.

В 70-х годах прошлого века, к которым относится подавляющее большинство собственных математических работ Маркса, на европейском континенте создавался (прежде всего в трудах К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда, Г. Кантора) современный классический анализ с характерной для него теорией действительных чисел и пределов.

В английских университетах того времени это направление работ европейских математиков фактически оставалось неизвестным. Недаром даже про свой «Курс чистой математики», написанный значительно позднее (в 1917 г.), известный английский математик Харди писал: «Она [эта книга] была написана в то время, когда в Кембридже пренебрегали математическим анализом, и ее патетический стиль кажется теперь немного смешным. Если бы я переписал ее теперь, то я бы уже не писал (по выражению проф. Литтлвуда) как «проповедник, разговаривающий с каннибалами»» (из предисловия к изданию 1937 г.). А ниже Харди отмечал как особое достижение то обстоятельство, что в руководствах по анализу «теперь [т. е. в 1937 г.— *Ред.*] даже в Англии нет недостатка...».

Неудивительно поэтому, что в своих математических рукописях Маркс не мог отреагировать на ту — более современную — проблематику в математическом анализе, которая создавалась в это время на континенте. Тем не менее его идеи, относящиеся к сущности символического дифференциального исчисления, представляют интерес и сейчас.

Для дифференциального исчисления характерны специфические для него символика и терминология: такие понятия, как «дифференциал» и «бесконечно малые» разных порядков, такие символы, как dx, dy, d^2y, d^3y, $\ldots$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\ldots$ и другие, аналогичные. Еще в середине прошлого века в той литературе, которая имелась в распоряжении Маркса, с этими понятиями и символами связывались обычно представления о некоторых величинах особого рода, отличных от обыкновенных математических чисел и функций. Именно с этими особыми величинами и должен был оперировать математический анализ. В настоящее время это не так: никаких особых величин в анализе нет; но символика и терминология сохранились, они оказались очень удобными. Почему? Как это могло произойти, если соответствующие понятия не имели смысла? Наилучший ответ на этот вопрос и сейчас дают математические рукописи Маркса. И притом такой ответ, который позволяет выяснить сущность всякого символического исчисления, общая теория которого только недавно стала создаваться в современной математической логике.

Суть дела в оперативной роли символов исчисления. Если один и тот же, например, вычислительный процесс приходится применять многократно, при решении самых разнообразных задач, то для всего этого процесса целесообразно выбрать особый символ, обозначающий кратко всю, как говорит Маркс, «стратагему действий», его образующих. Первичным, исходным при этом является именно сам этот процесс, который, в противоположность вводимому для него символическому обозначению, Маркс называет «реальным».

Почему, однако, так целесообразно вводить при этом новый символ? Ответ Маркса состоит в том, что это дает нам возможность не выполнять всякий раз заново весь нужный процесс, а пользуясь тем, что мы уже умеем выполнять его в некоторых случаях, сводить выполнение его в более сложных случаях к выполнению в этих простых. Для этого требуется только, изучив закономерности рассматриваемых процессов, установить некоторые общие правила оперирования с новыми символами, позволяющие осуществлять такое сведе́ние. Но в таком случае мы и получаем исчисление, оперирующее уже с новыми символами, вступаем, как говорит Маркс, на его «собственную почву». И Маркс подробно выясняет диалектику того «оборачивания метода», которое связано с этим переходом к символическому исчислению, правила которого позволяют нам, наоборот, не от «реального» процесса переходить к символу, а для символа искать соответствующий ему «реальный» процесс, делать символ оперативным: предписывающим «стратагему действий».

Все это Маркс делает в своих двух основных работах, написанных им в 1881 г. и посланных Энгельсу: «О понятии производной функции» (см. стр. 29) и «О дифференциале» (стр. 47). В первой работе Маркс рассматривает для некоторого класса функций «реальный» процесс (алгорифм) отыскания производных функций и дифференциалов и вводит для такого процесса (он его называет «алгебраическим» дифференцированием) соответствующую символику. Во второй работе он осуществляет «оборачивание метода» и переходит на «собственную почву» дифференциального исчисления, используя для этой цели прежде всего теорему о производной произведения, позволяющую сводить отыскание производной произведения к отысканию производных от сомножителей. Говоря его собственными словами, «символический дифференциальный коэффициент становится, таким образом, *самостоятельным исходным пунктом*, реальный эквивалент которого лишь должен быть найден... Но тем самым и дифференциальное исчисление выступает как некое специфическое исчисление, которое оперирует уже самостоятельно на собственной почве, ибо исходные пункты его $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ — суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины» (стр. 55, 57). Они при этом «тотчас же превращаются в *оперативные символы*, в символы процессов, которые должны быть выполнены... для отыскания... «производных». Первоначально возникший как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций дифференцирования, символический дифференциальный коэффициент теперь играет роль символа тех операций дифференцирования, которые только предстоит еще произвести» (стр. 57).

В распоряжении Маркса не было еще тех строгих определений основных понятий математического анализа, которые характерны для современного анализа. На первый взгляд содержание его рукописей представляется поэтому устаревшим, не выходящим за рамки того, что было известно уже Лагранжу, т. е. в конце XVIII века. В действительности основная тенденция, характерная для рукописей Маркса, имеет существенное значение и в настоящее время. Маркс не был знаком с современным строгим определением понятий действительного числа, предела и непрерывности. Но, по-видимому, он не был бы удовлетворен этими определениями, если бы и был знаком с ними. Дело в том, что Маркс ищет «реальный» процесс отыскания производной функции, т. е. алгорифм, позволяющий, во-первых, ответить на вопрос о том, существует ли у данной функции производная, и, во-вторых, эффективно найти ее, если она существует. Как известно, понятие предела не алгорифмическое понятие, и такие задачи разрешимы поэтому только для некоторых классов функций. Один из таких классов — класс аналитических функций, т. е. функций, разложимых в степенные ряды, и представляет собою объект «алгебраического» дифференцирования по Марксу. Только такими функциями, в сущности, и занимается Маркс. В настоящее время класс таких функций, для которых возможны ответы на оба поставленных выше вопроса, может быть значительно расширен и оперирование с ними может быть построено так, чтобы были удовлетворены все современные требования строгости и точности. С точки зрения Маркса, существенно, однако, чтобы все предельные переходы рассматривались в свете их эффективной выполнимости, иначе говоря, чтобы математический анализ строился на основе теории алгорифмов, как мы сказали бы теперь.

У нас хорошо известны высказывания Энгельса в «Диалектике природы» о том, что «поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» (К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 573).

Но что такое «переменная величина»? Что такое «переменная» в математике вообще? Известный английский философ Бертран Рассел говорит по этому поводу, что «это, конечно, одно из самых трудных для понимания понятий», а математик Карл Менгер насчитывает по меньшей мере шесть совершенно разных смыслов этого понятия. Для выяснения понятий переменной величины — иначе говоря, функции — и вообще переменной в математике рукописи Маркса и сейчас представляют существенный интерес. Маркс прямо ставит в них вопрос о разном смысле понятия функции: функции «от x» и функции «в x» — и специально останавливается на том, как следует отображать в математике изменение переменных, в чем состоит диалектика этого изменения. Этому вопросу о способах отображения изменения переменных Маркс придает особое значение, так как речь идет о характеристике именно того метода «алгебраического» дифференцирования, который предложен им.

Дело в том, что Маркс решительно возражает против представления всякого изменения значения переменной в виде прибавления (или вычитания) некоторого заранее заготовленного значения приращения (его абсолютной величины). Достаточной идеализацией реального изменения значений какой-либо величины является уже предположение о том, что мы можем точно фиксировать *все* значения, которые эта величина получает при изменении. Так как в действительности всякое такое значение можно фиксировать лишь приближенно, то предположения, на которых строится дифференциальное исчисление, должны быть такими, чтобы для получения выражения производной функции $f'(x)$ от данной функции $f(x)$ не требовалось информации о точном значении каких-либо переменных, но достаточно было иметь выражение функции $f(x)$. При этом требуется только знать, что значения переменной x действительно изменяются так, что в любой (сколь угодно малой) окрестности каждого значения переменной x (из рассматриваемой области ее значений) имеется значение x_1, отличное от x, но не более того: «x_1 остается на самом деле столь же неопределенной, как x» (стр. 159).

Само собою разумеется при этом, что когда x изменяется в x_1, то образуется разность $x_1 - x$, которая и обозначается через Δx, так что в результате x_1 оказывается равным $x + \Delta x$. Маркс подчеркивает, однако, что это происходит лишь в *результате* изменения значения x в значение x_1, а не предшествует этому изменению и что представлять себе x_1 как определяемую выражением $x + \Delta x$ значило бы вносить тем самым искажающие допущения в отображение движения (и всякого изменения вообще). Искажающие потому, что в таком случае, «хотя в $x + \Delta x$ Δx по величине является столь же неопределенной, как и сама неопределенная переменная x, тем не менее Δx определена как отличная от x особая величина, как плод рядом со своей матерью до того, как та забеременела» (стр. 159).

В соответствии с этим Маркс и начинает свое определение производной функции $f'(x)$ от функции $f(x)$ с того, что изменяет x в x_1. В результате этого $f(x)$ изменяется в $f(x_1)$ и образуются обе разности: $x_1 - x$ и $f(x_1) - f(x)$, первая из которых заведомо отлична от нуля, так как $x_1 \neq x$.

«Здесь возросшая x, т. е. x_1, отличается *от самой себя*, какой она была до возрастания, т. е. от x, но x_1 не выступает как x, возросшая на Δx; поэтому x_1 остается на самом деле столь же неопределенной, как x» (стр. 159).

Подлинная тайна дифференциального исчисления состоит, по Марксу, в том, что для определения значения производной функции в точке x (в которой производная существует) нужно не только выйти в окрестность этой точки, в отличную от x точку x_1, и образовать отношение разностей

$$f(x_1) - f(x) \quad \text{и} \quad x_1 - x,$$

т. е. выражение $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$, но и вернуться затем обратно в ту же точку x; однако вернуться не непосредственно, а некоторым особым образом, связанным с конкретным определением функции $f(x)$, поскольку простое полагание $x_1 = x$ в выражении $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ обращает его в $\frac{f(x) - f(x)}{x - x}$, т. е. в $\frac{0}{0}$, иначе говоря, в бессмыслицу.

Этот характер определения производной, состоящий в образовании отличной от нуля разности $x_1 - x$ и последующем — после составления отношения $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ — диалектическом «снятии» этой разности, сохраняется и в современном определении производной, где снятие разности x_1-x осуществляется с помощью предельного перехода от x_1 к x.

В своей работе «Приложение к рукописи „Об истории дифференциального исчисления“. Анализ метода Даламбера» Маркс тоже говорит о «производной», по существу, как о предельном значении отношения $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$, хотя и употребляет при этом другой термин. Дело в том, что путаница, связанная с терминами «предел» и «предельное значение», по поводу которой Маркс замечает, что «понятие предельного значения может быть неправильно истолковано и постоянно толкуется неправильно» (см. стр. 217), побудила его заменить термин «предел» в определении производной термином «абсолютно минимальное выражение». На этой замене он, впрочем, не настаивал, предвидя, что уточнение понятия предела, с которым он познакомился по большому «Трактату о дифференциальном и интегральном исчислении» Лакруа — источнику, который значительно более других удовлетворял Маркса, может сделать в дальнейшем ненужным введение нового термина. Действительно, Маркс писал о понятии предела, что «эта категория, которую ввел в широкий обиход в [математическом] анализе главным образом Лакруа, приобретает важное значение как замена для категории «минимального выражения» (см. стр. 129).

Таким образом, диалектика, связанная с определением производной и в современном математическом анализе, по существу, также выясняется Марксом. Именно диалектика, а не формальные противоречия, наличие которых делает, как будет показано ниже, дифференциальное исчисление Ньютона и Лейбница «мистическим». При этом нужно только иметь в виду, что Маркс отнюдь не запрещает представлять себе *всякое* изменение значения переменной в виде добавления некоторого «приращения» к уже имеющемуся значению. Наоборот, когда речь идет об оценке *результата* уже происшедшего изменения, приходится говорить именно о приращении значений переменных (например, о зависимости приращения функции от приращения независимой переменной) и «точка зрения суммы» ($x_1=x+\Delta x$ или $x_1=x+h$), как ее называет Маркс, становится вполне оправданной. На этом переходе «алгебраического» метода к «дифференциальному» Маркс специально останавливается в своей последней работе «Теорема Тейлора», которая, к сожалению, осталась незаконченной и только частично помещена поэтому в первой части настоящей книги. (Очень подробное описание этой рукописи Маркса, почти с полным ее текстом, помещено во второй части книги, стр. 498—562.) Здесь Маркс подчеркивает, что, в то время как в «алгебраическом» методе $x_1 - x$ существует для нас только в этой форме разности, а не как некоторая $x_1 - x = h$ и поэтому не как сумма $x_1 = x + h$, при переходе к «дифференциальному» методу мы можем рассматривать h «как *приращение* (положительное или отрицательное) от x. Это мы тоже вправе сделать, так как $x_1 - x = \Delta x$ и само это Δx, вместо того чтобы служить, как в нашем способе, простым символом или простым знаком для разности x-ов, т. е. для $x_1 - x$, может трактоваться так же, как величина разности $x_1 - x$, столь же неопределенная, как $x_1 - x$, и изменяющаяся при ее изменении.

Итак,

$$x_1 - x = \Delta x$$

или $=$ неопределенной величине h. Отсюда следует, что

$$x_1 = x + h$$

и $f(x_1)$ или y_1 превращается в $f(x + h)$» (стр. 522).

Таким образом, было бы крайне несправедливо представлять себе точку зрения Маркса как состоящую в отвержении всех других методов, применяемых в дифференциальном исчислении. Если эти методы оказываются успешными, Маркс ставит перед собой задачу объяснить секрет их успеха. И после того, как это удается ему, т. е. после того, как рассматриваемый метод оказывается обоснованным и условия его применимости выполняются, Маркс считает переход к этому методу не только вполне оправданным, но и целесообразным.

Вслед за своими рукописями 1881 г., содержащими основные результаты его размышлений о сущности дифференциального исчисления, Маркс собирался послать Энгельсу третью работу, относящуюся к истории методов дифференциального исчисления. Эту историю он хотел обрисовать сначала на конкретных примерах различных методов доказательства теоремы о производной произведения, но потом отказался от этого намерения и перешел к общей характеристике основных периодов в истории методов дифференциального исчисления.

Третья работа не была оформлена Марксом. Сохранились только указания на то, что он собирался написать ее, и черновик рукописи, из которого мы узнаем, как составлялся и менялся у Маркса план его исторического очерка на эту тему. Этот черновик полностью опубликован в первой части книги (см. стр. 137—189). Все указания Маркса о том, что в текст нужно внести те или иные страницы из других рукописей, при этом учтены полностью. Рукопись дает нам возможность выяснить точку зрения Маркса на историю основных методов дифференциального исчисления:

1) «мистического дифференциального исчисления» Ньютона и Лейбница,

2) «рационального дифференциального исчисления» Эйлера и Даламбера,

3) «чисто алгебраического исчисления» Лагранжа.

Характерною чертою методов Ньютона и Лейбница является, по Марксу, то обстоятельство, что их творцы не видели «алгебраических» корней дифференциального исчисления: они начинали непосредственно с его оперативных формул, происхождение и смысл которых оставались поэтому непонятными и даже таинственными, а само исчисление выступало «как самостоятельный, отличный от обыкновенной алгебры способ вычисления» (стр. 153), как только что открытая, совершенно особая математическая дисциплина, «до которой обычной алгебре, как до звезды небесной, далеко» (стр. 199).

На вопрос о том, «каким же образом... был получен исходный пункт для дифференциальных символов как оперативных формул», Маркс отвечает, что это делалось «при помощи либо скрытых, либо явных метафизических допущений, которые в свою очередь ведут к метафизическим, нематематическим следствиям: происходит насильственное уничтожение неких величин, преграждающих путь выводу и, однако, им самим порожденных» (стр. 123).

В другом месте об этих же методах Ньютона и Лейбница Маркс пишет: «$x_1 = x + \Delta x$ сразу превращается в $x_1 = x + dx$..., где dx предпосылается с помощью метафизического *разъяснения*. Сперва существует, а затем разъясняется». «Из этой произвольной предпосылки вытекает следствие, что ...члены... должны быть *фокуснически удалены*, чтобы получить правильный результат» (стр. 165).

Иными словами, поскольку способы *введения* в математику дифференциальных символов остаются невыясненными, более того, вообще неверными, так как дифференциалы dx, dy отождествляются попросту с приращениями Δx, Δy, то оказываются необоснованными, представляющимися как «насильственное», «фокусническое» уничтожение и способы их *удаления*. Приходится придумывать метафизически некие актуально бесконечно малые величины, которые трактуются *одновременно* и как обычные отличные от нуля (как теперь говорят, «архимедовы») величины, и как величины, «исчезающие» (обращающиеся в нули) по сравнению с конечными или бесконечно малыми величинами более низких порядков (т. е. как «неархимедовы» величины), проще говоря, как и нули, и не нули одновременно. «... Не остается ничего другого,— говорит в этой связи Маркс,— как представлять себе приращения переменной h бесконечно малыми и приписать им, как таковым, *самостоятельное существование*, например, в символах... dx, dy. Но бесконечно малые величины также величины, как и бесконечно большие (слово бесконечно [малое] на самом деле означает только неопределенно малое); эти dy, dx, ... тоже фигурируют поэтому в вычислении как обыкновенные алгебраические величины, и в ... уравнении...

$$k = 2x\,dx + dx\,dx$$

член $dx\,dx$ имеет такое же право на существование, как и $2x\,dx$». Поэтому «самым удивительным является рассуждение, посредством которого этот член насильственно отбрасывается» (стр. 151, 153).

Наличие таких актуально бесконечно малых, т. е. формально противоречивых, объектов, которые не вводятся с помощью математически обоснованных последовательностей операций, а предпосылаются на основе метафизических «разъяснений» и удаляются затем посредством «трюка», и делает, по Марксу, исчисление Ньютона и Лейбница *мистическим*, несмотря на ряд доставляемых им преимуществ, благодаря тому, что оно начинается сразу же с оперативных формул.

В то же время Маркс высоко оценивает, конечно, *историческое* значение методов Ньютона и Лейбница. «Итак,— пишет он,— сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому» (стр. 169).

Следующим этапом развития методов дифференциального исчисления является, по Марксу, «рациональное дифференциальное исчисление» Даламбера и Эйлера. Математически неправильные методы Ньютона и Лейбница здесь исправляются уже, но исходный пункт остается тот же. «Даламбер начинает прямо с *отправного пункта Ньютона и Лейбница*:

$$x_1 = x + dx.$$

Но он вносит сразу фундаментальную поправку:

$$x_1 = x + \Delta x,$$

т. е. x + *неопределенное*, но прежде всего *конечное приращение* *, которое он называет h. Превращение этого h или Δx в dx... у него лишь конечный результат развития или по крайней мере его заключительная стадия, тогда как у мистиков и инициаторов исчисления оно является исходным пунктом» (стр. 169, 171). И Маркс подчеркивает, что при этом удаление дифференциальных символов из окончательного результата происходит также «посредством правильной математической операции. Они, следовательно, удалены теперь без трюка» (стр. 173).

Маркс высоко оценивает поэтому историческое значение методов Даламбера. «Даламбер сорвал с дифференциального исчисления покров тайны и тем самым сделал огромный шаг вперед»,— пишет он (стр. 175).

Поскольку, однако, исходным пунктом у Даламбера остается то же представление изменения x как суммы x + существующее заранее, независимо от изменения x, приращение Δx, подлинная диалектика процесса дифференцирования не вскрывается еще Даламбером. И Маркс делает в адрес Даламбера критическое замечание: «Даламбер исходит из $(x+dx)$, но исправляет эти выражения, заменяя их на $(x+\Delta x)$, соответственно на $(x+h)$; теперь становится необходимым некоторое развитие, с помощью которого Δx или h превращается в dx, но к этому и сводится все развитие, которое действительно происходит» (стр. 221).

Как известно, для получения производной $\frac{dy}{dx}$ из отношения конечных разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Даламбер прибегал к «предельному переходу». В руководствах, которыми пользовался Маркс, этому переходу к пределу предшествовало разложение выражения $f(x+h)$ в ряд по целым возрастающим степеням h, в котором коэффициентом при h в первой степени была «уже готовая» производная $f'(x)$. Задача сводилась поэтому к тому, чтобы «освободить» ее от множителя h и от других членов ряда. Это было бы естественнее сделать, однако, определив попросту производную как коэффициент при h в первой степени в разложении $f(x+h)$ в ряд по степеням h.

Действительно, «в первом методе 1) [Ньютона и Лейбница], как и в рациональном 2), искомый реальный коэффициент фабрикуется в готовом виде теоремой о биноме и встречается уже как второй член развернутого ряда, стало быть, в члене, необходимо содержащем h^1. Весь дальнейший ход дифференцирования как в 1), так и в 2)

---

* Под «конечным приращением» в литературе, которой пользовался Маркс, понималось *отличное от нуля* конечное приращение.— *Ред.*

есть, следовательно, роскошь. Отбросим поэтому в сторону этот бесполезный балласт» (стр. 177).

Именно это и было сделано Лагранжем — основателем следующего этапа в развитии методов дифференциального исчисления: «чисто алгебраического» исчисления в периодизации Маркса.

Марксу сначала метод Лагранжа, «чья теория производных функций подвела новую базу под дифференциальное исчисление» (стр. 193), очень понравился. Теорема Тейлора, с помощью которой обычно осуществляется разложение $f(x+h)$ в ряд по степеням h, исторически выступавшая как завершающая построение всего дифференциального исчисления, при этом обращалась в его исходный пункт, связывающий его непосредственно с математикой, предшествующей этому исчислению (не пользующейся еще его специфической символикой). И Маркс замечал по этому поводу: «Подлинные и в силу этого простейшие взаимосвязи нового со старым открываются всегда лишь после того, как это новое само приобретет уже завершенную форму, и можно сказать, что в дифференциальном исчислении это возвращение (отнесение) назад было осуществлено теоремами Тейлора и Маклорена *. Поэтому только Лагранжу пришла в голову мысль свести дифференциальное исчисление к строго алгебраической основе» (стр. 199).

Вскоре Маркс обнаружил, однако, что это сведéние не удалось Лагранжу. Как известно, Лагранж пытался доказать, что, «вообще говоря», т. е. за исключением «некоторых частных случаев», в которых дифференциальное исчисление «неприменимо», выражение $f(x+h)$ разложимо в ряд

$$f(x)+ph+qh^2+rh^3+\ \ldots,$$

где $p, q, r, \ldots$ — коэффициенты при степенях h — суть новые функции от x, независимые от h и «произведенные» из $f(x)$.

Но доказательство этого — по существу, не имеющего достаточно точного математического смысла — предложения у Лагранжа, естественно, не получилось. «Этот скачок из *обыкновенной алгебры*, и притом *с помощью обыкновенной алгебры*, в *алгебру переменных* [т. е. общую теорию функций, отображающих движение и изменение вообще.— *Ред.*] принимается за *совершившийся факт*, он не доказывается и, первым делом, *противоречит всем законам* обыкновенной алгебры» (стр. 207),— пишет об этом доказательстве Лагранжа Маркс.

* Теорему Маклорена можно рассматривать — так это делает и Маркс (стр. 195, 197) — как частный случай теоремы Тейлора.— *Ред.*

И Маркс заключает в отношении «исходного уравнения» Лагранжа, что оно не только не доказано, но что самое «выведение этого уравнения из алгебры представляется... покоящимся на обмане» (стр. 207).

В заключительной части рукописей метод Лагранжа выступает как завершение исправленного Даламбером метода Ньютона и Лейбница, как «алгебраизация» полученной Тейлором с помощью этого метода формулы. «Таким же образом Фихте примыкал к Канту, Шеллинг — к Фихте, Гегель — к Шеллингу, причем ни Фихте, ни Шеллинг, ни Гегель не исследовали общей основы Канта, идеализма вообще: иначе они не смогли бы развивать ее дальше» (стр. 209).

Мы видим, что в историческом очерке Маркс дает нам наглядный пример того, в чем должно состоять, с его точки зрения, применение методов материалистической диалектики и к такой науке, как история математики.

Подготовка настоящего издания «Математических рукописей» К. Маркса потребовала большой работы. Текст рукописей был полностью расшифрован; проведена работа, связанная с датировкой рукописей; отделены выписки и конспекты от собственных высказываний Маркса; на основе анализа математического содержания рукописей образованы единицы хранения, которые можно рассматривать как цельные рукописи (дело в том, что многие рукописи представляют собой не тетради, а отдельные листки, часто совсем не упорядоченные). В подавляющем большинстве случаев были установлены источники, из которых Маркс делал выписки или которые конспектировал. Были выделены, с помощью сопоставления конспектов с источниками, все собственные замечания Маркса, содержащиеся в конспектах. Осуществлен перевод всех самостоятельных работ и замечаний Маркса на русский язык.

Задача отделить собственные замечания Маркса от конспектов и выдержек оказалась сопряженной с рядом трудностей. Маркс писал свои конспекты для себя, чтобы иметь нужный ему материал под рукой. Как всегда, он пользовался большим количеством самых разнообразных источников, но если источник не представлялся ему заслуживающим особого внимания, если это был, например, просто достаточно распространенный в те времена в Англии компилятивный учебник, то Маркс чаще всего не сопровождал делаемые им выписки указанием, откуда они взяты. Задача осложнялась еще и тем, что большинство книг, которыми пользовался Маркс, в настоящее время представляют собой библиографическую редкость. В конечном счете всю эту работу удалось завершить только непосредственно в Англии, где для решения этой задачи были детально обследованы и изучены фонды соответствующей литературы в библиотеках: Британского музея, Лондонского и Кембриджского университетов, университетского колледжа Лондона, колледжей Тринити и Сент-Джемса в Кембридже, Лондонского Королевского общества, а также личные библиотеки видных английских ученых XIX века — де Моргана и Грейвза. Были наведены справки и в других библиотеках, например колледжа Сент-Катарина и др. По рукописям, у которых естественно было предполагать немецкие источники, немецким историком математики Вуссингом по просьбе Института были обследованы библиотечные фонды ГДР.

Несколько недостававших страниц рукописей были любезно предоставлены в фотокопиях Институтом социальной истории в Амстердаме, где хранятся оригиналы математических рукописей К. Маркса.

Поскольку рукописи носят черновой характер, в них встречаются пропуски и даже ошибки в выкладках. Соответствующие вставки или исправления заключены в квадратные скобки. В связи с этим квадратные скобки у самого Маркса пришлось заменить двойными квадратными скобками. Слова, которые Маркс писал сокращенно, приводятся полностью, но текст, в основном, не изменяется. Местами даже сохранена теперь уже устаревшая орфография.

Основной язык рукописей — немецкий. Если источник рукописи французский или английский, Маркс иногда тоже пишет весь текст по-французски или по-английски. В ряде случаев текст оказывается у Маркса настолько смешанным, что трудно бывает даже сказать, на каком собственно языке написана рукопись.

Большие трудности были сопряжены также с точной датировкой рукописей. Об этих трудностях в применении к каждой отдельной рукописи подробно сказано в ее описании. Последнее дается по архивному номеру рукописи и присвоенному ей заголовку, характеризующему источник или содержание. Там, где заголовок или подзаголовок принадлежит самому Марксу, он приводится в кавычках на языке оригинала и в русском переводе. В первой части книги заголовки, не принадлежащие Марксу, сопровождаются звездочкой.

Описание рукописей дается в порядке расположения архивных листов. Собственная нумерация Маркса, в том числе и буквенная, приводится в описании вместе с указанием архивных листов. Публикуемые тексты Маркса сопровождаются указаниями архивных листов, на которых они находятся. Все рукописи относятся к ф. 1 оп. 1.

Язык математических рукописей Маркса во многих случаях отличен от привычного для нас теперь языка, и для понимания мысли Маркса приходится обращаться к использованным им источникам и выяснять смысл употребляемых в них терминов. Чтобы не прерывать текст Маркса, такие пояснения даются нами в примечаниях в конце книги. Там, где оказывается необходимой более подробная информация о содержании источников, которыми пользовался Маркс, она приводится в Приложении. Все такие примечания и справки носят чисто фактический характер.

В текстах Маркса имеется большое число подчеркиваний, с помощью которых он выделяет места, представляющиеся ему особенно существенными. Все такие подчеркивания воспроизводятся путем выделения особым шрифтом.

* * *

Книга подготовлена профессором Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова С. А. Яновской, ей же принадлежат Предисловие, Описание математических рукописей (составленное при участии А. З. Рывкина), Приложение и Примечания. В подготовке книги принимал участие проф. К. А. Рыбников, который провел, кроме того, большую работу по выявлению источников, которыми пользовался К. Маркс при работе над «Математическими рукописями».

При подготовке настоящего издания были учтены замечания и советы, высказанные академиками А. Н. Колмогоровым и И. Г. Петровским.

Всю работу по редактированию книги, подготовке ее к печати и чтению корректур провели А. З. Рывкин (Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука») и О. К. Сенекина (Институт марксизма-ленинизма при ЦК КПСС).

Книга сопровождается указателем цитируемой и упоминаемой литературы, а также указателем имен. Ссылки на страницы текста Маркса выделены в указателях курсивом.

Институт марксизма-ленинизма
при ЦК КПСС

К. МАРКС

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ЕГО ПРИРОДА И ИСТОРИЯ

ДВЕ РУКОПИСИ
О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ
ИСЧИСЛЕНИИ

I

* ÜBER DEN BEGRIFF DER ABGELEITETEN FUNKTION [1]

I

Wächst die unabhängige Variable x zu x_1, so die abhängige Variable y zu y_1 [2].

Hier sub I) der ganz einfache Fall betrachtet, wo x nur in der ersten Potenz erscheint.

1) $y = ax$; wenn x zu x_1 wächst,

$$y_1 = ax_1 \quad \text{und} \quad y_1 - y = a(x_1 - x).$$

Fände jetzt die *Differentialoperation* statt, d. h. liessen wir x_1 bis auf x abnehmen, so

$$x_1 = x; \quad x_1 - x = 0,$$

also

$$a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0.$$

Ferner, da y bloss zu y_1 ward, weil x zu x_1, würde nun ebenfalls

$$y_1 = y; \quad y_1 - y = 0.$$

Also

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

verwandelt in $0 = 0$.

Erst die Differentiation setzen und sie dann wieder aufheben führt also wörtlich zu *Nichts*. Die ganze Schwierigkeit im Verständnis der Differentialoperation (wie in dem der *Negation der Negation* überhaupt) liegt eben darin, zu sehn, *wie* sie sich von solch einfacher Prozedur unterscheidet und deshalb zu wirklichen Resultaten führt.

* О ПОНЯТИИ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ [1]

I

Пусть независимая переменная x возрастает до x_1 и, значит, зависимая переменная y возрастает до y_1 [2].

Здесь sub I) рассматривается простейший случай, когда x появляется лишь в первой степени.

1) $y = ax$; если x возрастает до x_1, то

$$y_1 = ax_1 \quad \text{и} \quad y_1 - y = a(x_1 - x).$$

Если бы мы теперь произвели *дифференциальную операцию*, т. е. дали бы x_1 уменьшиться до x, то получили бы

$$x_1 = x; \quad x_1 - x = 0,$$

следовательно,

$$a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0.$$

Далее, так как y возросло до y_1 лишь вследствие того, что x возросло до x_1, то мы имели бы также

$$y_1 = y; \quad y_1 - y = 0.$$

Таким образом,

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

превратилось бы в $0 = 0$.

Сначала полагание разности, а затем обратное ее снятие приводит, таким образом, буквально к *ничему*. Вся трудность в понимании дифференциальной операции (как и в понимании *отрицания отрицания* вообще) заключается именно в том, чтобы увидеть, *чем* она отличается от такой простой процедуры и как ведет поэтому к действительным результатам.

Dividieren wir $a\,(x_1 - x)$ und entsprechend auch die linke Seite der Gleichung, durch den Faktor $x_1 - x$, so erhalten

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

Da y die *abhängige Variable*, kann es überhaupt keine unabhängige Bewegung vollziehen [hier, weil $y = ax$], y_1 kann daher nicht $= y$ werden, also auch nicht $y_1 - y = 0$, ohne dass vorher $x_1 = x$ geworden.

Andrerseits haben wir gesehn, dass x_1 nicht $= x$ werden konnte in der Funktion $a\,(x_1 - x)$, ohne letztre zu 0 zu machen. Der Faktor $x_1 - x$ war daher *notwendig* eine *endliche Differenz* [3] zur Zeit, wo beide Seiten der Gleichung durch ihn dividiert worden. Im Moment der Herstellung des Verhältnisses

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

ist $x_1 - x$ daher stets eine endliche Differenz; folglich ist

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

ein *Verhältnis endlicher Differenzen*, und demgemäss

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Also:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder}^4 \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

wo die Konstante a als *Grenzwert* des Verhältnisses der endlichen Differenzen der beiden Variablen figuriert [5].

Da a konstant, kann keine Veränderung mit ihm vorgehn, also auch nicht mit der auf es reduzierten *rechten Seite* der Gleichung. Unter solchen Umständen verläuft sich der *Differentialprozess* auf der linken Seite

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und dies ist eine Eigentümlichkeit solch einfacher Funktionen wie ax.

Nimmt im Nenner des Verhältnisses x_1 ab, so nähert es sich x; die Grenze seiner Abnahme ist erreicht, sobald es zu x wird. Hiermit ist die Differenz $x_1 - x_1 = x - x = 0$ gesetzt und daher auch $y_1 - y = y - y = 0$. Wir erhalten so

$$\frac{0}{0} = a.$$

Если мы разделим $a(x_1 - x)$, соответственно и левую сторону уравнения, на множитель $x_1 - x$, то получим

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

Так как y является *зависимой переменной*, то она вообще не может совершать никакого независимого движения. Поэтому [здесь, поскольку $y = ax$] не может стать $y_1 = y$, а значит и $y_1 - y = 0$, без того, чтобы ранее x_1 не стала равной x.

С другой стороны, мы видели, что x_1 не могла стать равной x в функции $a(x_1 - x)$ без обращения последней в 0. Поэтому множитель $x_1 - x$ *необходимо* являлся *конечной разностью* [3] в тот момент, когда мы разделили на него обе стороны уравнения. Таким образом, в момент составления отношения

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$x_1 - x$ всегда представляет собой конечную разность, и, следовательно, $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ — *отношение конечных разностей*; соответственно этому

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Итак,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или}^{4} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

где постоянная a фигурирует как *предел* отношения конечных разностей обеих переменных [5].

Так как a постоянна, то ни она, ни, стало быть, приведенная к ней *правая сторона* уравнения не могут претерпевать никаких изменений. В таком случае *дифференциальный процесс* протекает на левой стороне:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

и это является особенностью таких простых функций, как ax.

Пусть в знаменателе отношения [переменная] x_1 убывает, приближаясь к x; граница ее убывания будет достигнута, как только x_1 обратится в x. Тем самым разность $x_1 - x$ станет равной $x - x = 0$, и поэтому также $y_1 - y = y - y = 0$. Мы получим, таким образом,

$$\frac{0}{0} = a.$$

Da im Ausdruck $\frac{0}{0}$ jede Spur seines Ursprungs und seiner Bedeutung erlischt, ersetzen wir ihn durch $\frac{dy}{dx}$, wo die endlichen Differenzen $x_1 - x$ oder Δx und $y_1 - y$ oder Δy als *aufgehobne* oder *verschwundene* Differenzen symbolisiert erscheinen oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verwandelt in $\frac{dy}{dx}$. Also

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

Der von einigen rationalisierenden Mathematikern festgehaltne Trost, quantitativ seien dy und dx in der Tat nur unendlich klein, [ihr Verhältnis] nur annähernd $\frac{0}{0}$, ist Chimere, wie es sich sub II) noch handgreiflicher zeigen wird.

Noch zu erwähnende Eigentümlichkeit des betrachteten Falls ist, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ und ebenso $\frac{dy}{dx} = a$, der Grenzwert [des Verhältnisses] der endlichen Differenzen daher zugleich auch der Grenzwert [des Verhältnisses] der Differentialen, ist.

2) Ein zweites Beispiel desselben Falls ist

$$\begin{matrix} y = x \\ y_1 = x_1 \end{matrix}; \quad y_1 - y = x_1 - x;$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \qquad \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 1.$$

II

Da $y = f(x)$, die Funktion x, aber in ihrem *entwickelten algebraischen Ausdruck*[6] sich auf der rechten Seite der Gleichung befindet, nennen wir diesen Ausdruck die *Originalfunktion von* x, seine erste durch Differentiation erhaltene Modifikation die *vorläufig «Abgeleitete» Funktion* x und seine schliesslich durch den *Differentialprozess* erhaltne Gestalt die *«Abgeleitete» Funktion von* x[7].

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$.

Wächst x zu x_1, so

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$

$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x) =$$

$$= a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x).$$

Так как в выражении $\frac{0}{0}$ испарился всякий след его происхождения и значения, то мы заменяем его на $\frac{dy}{dx}$, где конечные разности $x_1 - x$ или Δx и $y_1 - y$ или Δy появляются в символической форме как *снятые* или *исчезнувшие* разности, так что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превращается в $\frac{dy}{dx}$. Итак,

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

Утешение, за которое крепко держатся некоторые рационализирующие математики, что якобы количественно dy и dx в действительности являются лишь бесконечно малыми, [что их отношение] лишь близко к $\frac{0}{0}$, есть химера, как это будет еще осязательнее показано sub II).

Стоит еще упомянуть как особенность рассмотренного случая, что как $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, так и $\frac{dy}{dx} = a$, т. е. предел [отношения] конечных разностей является одновременно и пределом [отношения] дифференциалов.

2) Вторым примером того же случая может служить:

$$\begin{matrix} y = x \\ y_1 = x_1 \end{matrix}; \quad y_1 - y = x_1 - x;$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \qquad \frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = 1.$$

II

Когда $y = f(x)$, причем на правой стороне уравнения находится функция x в ее *развернутом алгебраическом выражении* [6], то мы называем это выражение *первоначальной функцией* от x, его первую модификацию, полученную путем полагания разности,— *предварительной «производной»* функцией x, а окончательный вид, который оно принимает в результате *дифференциального процесса*,— *«производной» функцией от* x [7].

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx - e.$

Если x возрастает до x_1, то

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$

$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x) =$$

$$= a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x).$$

Daher

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c.$$

Die *vorläufig «Abgeleitete»*

$$a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c$$

ist hier der *Grenzwert* des *Verhältnisses* der endlichen Differenzen, d. h., wie klein auch immer diese Differenzen genommen werden mögen, der Wert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist gegeben in jener «Abgeleiteten». Aber er fällt hier nicht wie sub I) zusammen mit dem Grenzwert des Verhältnisses der Differentialen *.

Wenn in der Funktion

$$a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c$$

die Variable x_1 abnimmt, bis sie die *Grenze* ihrer Abnahme erreicht hat, d. h. *gleich* x geworden ist, verwandelt sich x_1^2 in x^2, x_1x in x^2, und x_1+x in $2x$ und wir erhalten die *«Abgeleitete» Funktion* x:

$$3ax^2+2bx+c.$$

Hier zeigt sich schlagend:

Erstens: um die «Abgeleitete» zu erhalten, muss $x_1=x$ gesetzt werden, also im *strikten mathematischen Sinn* $x_1-x=0$, ohne jede Flause von bloss unendlicher Annäherung.

Zweitens: dadurch, dass $x_1=x$ gesetzt wird, also $x_1-x=0$, tritt durchaus nichts Symbolisches in die «Abgeleitete» ein **. Die ursprünglich durch Variation von x eingeführte Grösse x_1 verschwindet nicht, sie wird nur *reduziert* auf ihren minimalen Grenzwert $=x$ und bleibt ein in die Originalfunktion x neu eingeführtes Element, welches durch seine Kombinationen teils mit sich selbst,

---

* Im Entwurf dieser Arbeit (4146, Pl. 4) folgt:

«Andrerseits geht der Differentialprozess jetzt vor in der vorläufig «Abgeleiteten» Funktion x (rechte Seite), während derselbe Prozess auf [der] linken Seite jene Bewegung notwendig begleitet».— *Red.*

** Im Entwurf lautet der folgende Satz:

«b) Die Findung «der Abgeleiteten» aus der Originalfunktion x verlief so, dass wir erst eine *endliche Differentiation* [das Setzen der endlichen Differenz] vornahmen; diese liefert eine vorläufig «Abgeleitete», welche der *Grenzwert* von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist. Der Differentialprozess, zu dem wir dann schreiten, *reduziert* diesen *Grenzwert auf seine Minimalgrösse*. Die in der ersten Differentiation eingeführte Grösse x_1 verschwindet nicht...».— *Red.*

Отсюда

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c.$$

Предварительная «производная»

$$a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c$$

является здесь *пределом отношения* конечных разностей, т. е., сколь бы малыми мы ни взяли эти разности, значение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет дано этой «производной». Однако оно не совпадает, как sub 1), с пределом отношения дифференциалов *.

Если в функции

$$a\,(x_1^2+x_1x+x^2)+b\,(x_1+x)+c$$

переменная x_1 убывает, пока не достигнет *границы* своего убывания, т. е. пока не станет *равной* x, то x_1^2 превращается в x^2, x_1x в x^2, а x_1+x в $2x$, и мы получаем *«производную» функцию* x:

$$3ax^2+2bx+c.$$

Здесь ярко обнаруживается, что:

Во-первых, для получения «производной» необходимо положить $x_1=x$, стало быть, в *строгом математическом смысле* $x_1-x=0$, без всяких уверток насчет лишь бесконечного приближения.

Во-вторых, полагание $x_1=x$, а следовательно, $x_1-x=0$ не вносит в «производную» ровно ничего символического **. Введенная первоначально через изменение x величина x_1 не исчезает, она лишь *приводится* к своему минимальному пределу $=x$ и остается некоторым вновь введенным в первоначальную функцию x элементом, который в комбинациях частично с самим собой, частично с x

---

* После этой фразы в черновике к этой работе (4146, л. 4) говорится: «С другой стороны, дифференциальный процесс происходит теперь в предварительной «производной» функции x (правая сторона), между тем как тот же процесс на левой стороне необходимо сопровождает это движение».— *Ред.*

** Вместо этого в черновике говорится:

«б) Отыскание «производной» из первоначальной функции x протекало так, что мы сначала предприняли некоторое *конечное дифференцирование* [полагание конечной разности]; последнее дает нам предварительную «производную», являющуюся *пределом* для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Дифференциальный процесс, к которому мы затем переходим, *приводит* этот *предел к его минимальной величине.* Введенная в первом дифференцировании величина x_1 не исчезает...».— *Ред.*

teils mit dem x der Originalfunktion die schliessliche «Abgeleitete» liefert, d. h. die auf ihre *Minimalgrösse reduzierte vorläufige «Abgeleitete»*.

Die Reduktion von x_1 auf x innerhalb der ersten (vorläufigen) «Abgeleiteten» Funktion verwandelt auf der linken Seite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$, also:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c,$$

so dass die *Abgeleitete* als *Grenzwert* des Verhältnisses der Differentialen erscheint.

Das transzendentale oder symbolische Unglück ereignet sich nur auf der linken Seite, hat aber seine Schrecken bereits verloren, da es nun nur als Ausdruck eines Prozesses erscheint, der seinen wirklichen Gehalt bereits auf der rechten Seite der Gleichung bewährt hat.

In der «Abgeleiteten»

$$3ax^2 + 2bx + c$$

existiert die Variable x unter ganz anderen Bedingungen als in der Originalfunktion x (nämlich als in $ax^3 + bx^2 + cx - e$). Sie [diese Abgeleitete] kann also ihrerseits selbst wieder als eine Originalfunktion auftreten und Mutter einer andern «Abgeleiteten» durch erneuten Differentialprozess werden. Dies kann sich so oft wiederholen als die Variable x nicht definitiv aus einer der «Abgeleiteten» entfernt ist, also endlos fortdauern bei Funktionen von x, die nur in endlosen Reihen darstellbar sind, was allzumeist der Fall.

Die Symbole $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. zeigen nur das Stammregister der «Abgeleiteten» mit Bezug auf die erstgegebne Originalfunktion x an. Sie werden nur mysteriös, sobald man sie als *Ausgangspunkt* der Bewegung behandelt, statt als blosse *Ausdrücke sukzessiv abgeleiteter Funktionen x*. Dann erscheint es allerdings wunderbar, dass ein Verhältnis Verschwundner von neuem potenzierte Grade der Verschwindung durchlaufen soll, während nichts Wunderbares darin ist, dass z. B. $3x^2$ den Differentialprozess durchlaufen kann, so gut wie seine Stammutter x^3. Man hätte ja auch von $3x^2$ als Originalfunktion von x ausgehn können.

Aber *notabene*. Ausgangsstätte des *Differentialprozesses* ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ faktisch nur in Gleichungen wie sub I), wo x nur in der ersten Potenz первоначальной функции дает окончательную «производную», т. е. предварительную *«производную», приведенную к ее минимальной величине.*

Приведение x_1 к x внутри первой (предварительной) «производной» функции превращает на левой стороне $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$, значит,

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c,$$

так что *производная* появляется как *предел* отношения дифференциалов.

Трансцендентальное или символическое злоключение происходит лишь на левой стороне, но оно уже потеряло свой ужасающий вид, ибо выступает теперь лишь как выражение процесса, реальное содержание которого уже выявлено на правой стороне уравнения.

В «производной»

$$3ax^2 + 2bx + c$$

переменная x находится в совершенно других условиях, чем в первоначальной функции x (именно, чем в $ax^3 + bx^2 + cx - e$). Поэтому она [эта производная] в свою очередь может выступить в качестве первоначальной функции и при помощи возобновленного дифференциального процесса стать матерью некоторой другой «производной». Это может повторяться до тех пор, пока переменная x не будет окончательно удалена из какой-либо «производной», следовательно, это может продолжаться бесконечно у функций от x, представимых лишь бесконечными рядами, как это бывает в большинстве случаев.

Символы $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. указывают лишь родословную «производной» по отношению к сначала заданной первоначальной функции x. Таинственными же они становятся лишь в том случае, если трактовать их как *исходный пункт* движения, а не просто как *выражения последовательно выведенных функций* x. Тогда действительно кажется удивительным, что отношение исчезнувших должно снова пройти более высокие степени исчезновения, между тем как никто не удивится тому, что, например, $3x^2$ может пробежать процесс дифференцирования столь же успешно, как и ее прародительница x^3. Ведь и из $3x^2$ можно исходить как из первоначальной функции от x.

Однако *notabene.* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является исходным пунктом *дифференциального процесса* фактически лишь в уравнениях, какие мы имели sub I), где x входит лишь в первой степени. Но тогда, как показано sub I), vorkommt. Dann jedoch, wie sub I) gezeigt, das Resultat:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}.$$

In der Tat ist hier also durch den Differentialprozess, den $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durchlaufen, *kein neuer Grenzwert* gefunden worden, was nur möglich, solange die vorläufig «Abgeleitete» die Variable x einschliesst, solange also $\frac{dy}{dx}$ Symbol eines realen Prozesses bleibt*.

Es hindert dies natürlich in keiner Art, dass im Differentialcalculus die Symbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. und deren Kombination auch die rechte Seite der Gleichung bilden. Dann weiss man aber auch, dass solche rein symbolische Gleichungen nur die *Operationen* anzeigen, die nachher auf wirkliche Funktionen von Variablen anzuwenden sind.

2) $y = ax^m$.

Wird x zu x_1, so $y_1 = ax_1^m$ und

$$y_1 - y = a(x_1^m - x^m) =$$
$$= a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc. bis zum Glied } x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Also

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \ldots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Wenden wir nun den Differentialprozess auf diese «*vorläufig Abgeleitete*» an, so dass

$$x_1 = x \text{ oder } x_1 - x = 0$$

wird, so verwandelt sich

$$x_1^{m-1} \text{ in } x^{m-1};$$

$$x_1^{m-2}x \text{ in } x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1};$$
$$x_1^{m-3}x^2 \text{ in } x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}$$

und endlich

$$x_1^{m-m}x^{m-1} \text{ in } x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}.$$

---

* Im Entwurf (Pl.7) lautet dieser Satz:

«Dies kann nur dort resultieren, wo die vorläufig «Abgeleitete» Funktion die Variable x einschliesst, daher auch durch deren Bewegung ein wirklicher Neuwert gebildet werden kann, daher $\frac{dy}{dx}$ Symbol eines realen Prozesses ist». — *Red.*

в результате получается

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}\ .$$

Таким образом, здесь с помощью дифференциального процесса, который пробегает $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, не находится на самом деле *никакого нового предела*. Это [отыскание нового предела] возможно, лишь поскольку предварительная «производная» содержит переменную x, т. е. поскольку $\frac{dy}{dx}$ остается символом некоторого реального процесса *.

Это, конечно, отнюдь не препятствует тому, чтобы в дифференциальном исчислении символы $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. и их комбинации входили также и в правую сторону уравнения. Но тогда мы знаем также, что такие чисто символические уравнения лишь указывают те *операции*, которые затем надо выполнить над действительными функциями от переменных.

2) $y = ax^m$.

Если x превращается в x_1, то $y_1 = ax_1^m$ и

$$y_1 - y = a(x_1^m - x^m) =$$
$$= a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{и т. д. до члена } x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Стало быть,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \ldots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Если мы теперь применим к этой *«предварительной производной»* дифференциальный процесс, так что станет

$$x_1 = x \text{ или } x_1 - x = 0,$$

то

x_1^{m-1} превратится в x^{m-1};

$x_1^{m-2}x$ » » $x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1}$;

$x_1^{m-3}x^2$ » » $x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}$

и, наконец,

$x_1^{m-m}x^{m-1}$ превратится в $x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}$.

---

* Соответствующая фраза в черновике (л. 7) выглядит так:

«Это может получиться только там, где предварительная «производная» функция содержит переменную x, почему также ее движением может быть образовано некоторое подлинно новое значение, так что $\frac{dy}{dx}$ есть символ некоторого реального процесса».— *Ред.*

Wir erhalten also m. mal die Funktion x^{m-1}, und die «Abgeleitete» ist daher max^{m-1}.

Durch die Gleichsetzung von $x_1 = x$ innerhalb der «vorläufig Abgeleiteten»* wird auf der linken Seite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verwandelt in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$, daher

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}.$$

Sämtliche Operationen des Differentialcalculs könnten in dieser Weise behandelt werden, was aber eine verdammt nutzlose Weitläufigkeit wäre. Doch folgt hier noch ein Beispiel, weil in den bisherigen die Differenz $x_1 - x$ *nur einmal* in der Funktion x vorkam und daher durch die Bildung von

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

aus der rechten Seite verschwand. Dies nicht der Fall im folgenden:

3) $y = a^x$;

wird x zu x_1, so

$$y_1 = a^{x_1}.$$

Daher

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x (a^{x_1 - x} - 1).$$

[Aber]

$$a^{x_1 - x} = \{1 + (a - 1)\}^{x_1 - x},$$

und

$$\{1 + (a-1)\}^{x_1 - x} = 1 + (x_1 - x)(a - 1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \text{etc.}$$ [8]

Daher

$$y_1 - y = a^x (a^{x_1 - x} - 1) = a^x \left\{(x_1 - x)(a - 1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a - 1)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

$\therefore$ [9] $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= a^x \left\{(a - 1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a - 1)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

* D. h. auf der rechten Seite.— *Red.*

Мы получаем, таким образом, m раз функцию x^{m-1}, и «производная» есть поэтому max^{m-1}.

Благодаря приравниванию $x_1 = x$ внутри «предварительной производной» * на левой стороне $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превращается в $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}.$$

Можно бы изложить таким манером все операции дифференциального исчисления, но это было бы чертовски бесполезным педантизмом. Все же мы приведем здесь еще один пример, ибо в предыдущих разность $x_1 - x$ входила в функцию x *лишь один раз* и поэтому при составлении выражения

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

исчезала с правой стороны. Это не имеет места в следующем случае:

3) $y = a^x$;

если x превращается в x_1, то

$$y_1 = a^{x_1}.$$

Отсюда

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x (a^{x_1 - x} - 1).$$

[Но]

$$a^{x_1 - x} = \{1 + (a - 1)\}^{x_1 - x}$$

и

$$\{1 + (a - 1)\}^{x_1 - x} = 1 + (x_1 - x)(a - 1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + \text{и т. д.}$$ [8]

Отсюда

$$y_1 - y = a^x (a^{x_1 - x} - 1) = a^x \Big\{ (x_1 - x)(a - 1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + \\ + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a - 1)^3 + \text{и т. д.} \Big\}.$$

$\therefore$ [9] $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= a^x \Big\{ (a - 1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a - 1)^3 + \text{и т. д.} \Big\}.$$

* То есть на правой стороне.— *Ред.*

Wird nun $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$, so erhalten wir für die «*Abgeleitete*»:

$$a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Also:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Nennen wir die Summe der Konstanten in der Klausel A, so:

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x;$$

dies A aber $=$ dem Napierschen Logarithmus der Wurzel a, also: $\frac{dy}{dx}$, oder wenn wir für y seinen Wert setzen: $\frac{da^x}{dx} = \log a \cdot a^x$,

und

$$da^x = \log a \cdot a^x\, dx.$$

Nachträglich [10]

Es wurden

1) Fälle betrachtet, wo der Faktor $(x_1 - x)$ nur einmal in [dem Ausdruck], der [zur] «*vorläufig Abgeleiteten*» [führt], i. e. [in] der endlichen Differenzgleichung [11] enthalten ist, daher [wird] durch Division beider Seiten mit $x_1 - x$ gebildet

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[kein Betreten der Differenz $x_1 - x$ enthält], derselbe Faktor also aus der Funktion x eliminiert wird.

2) (Im Beispiel: $d(a^x)$) Fälle, wo Faktoren $(x_1 - x)$ in der Funktion x bleiben nach Bildung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ [12].

3) Es ist noch zu betrachten der Fall wo Faktor $x_1 - x$ *nicht direkt* aus der ersten Differenzgleichung ([die zu] (der «vorläufig Abgeleiteten») [führt]) zu evolvieren ist.

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2},$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2};$$

wir dividieren die Funktion von x, also auch die linke Seite, durch

Если теперь станет $x_1 = x$ и, значит, $x_1 - x = 0$, то мы получим для «*производной*»

$$a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{и т. д.}\right\}.$$

Итак,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{и т. д.}\right\}.$$

Если мы теперь обозначим сумму постоянных в скобках через A, то

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x;$$

здесь, однако, $A =$ неперову логарифму числа a, стало быть,

$\frac{dy}{dx}$ или, если подставить вместо y ее значение, $\frac{da^x}{dx} = \log a \cdot a^x$,

и

$$da^x = \log a \cdot a^x \, dx.$$

Дополнительно [10]

Были

1) рассмотрены случаи, где множитель $(x_1 - x)$ лишь один раз содержится в [выражении, ведущем к] «*предварительной производной*», т. е. в конечном разностном уравнении [11], вследствие чего при делении обеих частей на $x_1 - x$ образуется [такое выражение для]

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

[которое не содержит вхождений разности $x_1 - x$], т. е. этот множитель исключается из функции x.

2) (В примере: $d(a^x)$) рассмотрены случаи, где множители $(x_1 - x)$ остаются в функции x после образования [отношения] $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ [12].

3) Следует рассмотреть еще тот случай, где множитель $x_1 - x$ *непосредственно не* исключается из первого разностного уравнения ([ведущего к] «предварительной производной»).

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2},$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2};$$

мы делим эту функцию от x — следовательно, и левую сторону —

$x_1 - x$. Dann

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \left(\text{oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}.$$

Um die Wurzelgrösse aus Zähler zu entfernen, Zähler und Nen multipliziert mit $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$, und erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Aber

$$\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Wird x_1 nun $= x$, oder $x_1 - x = 0$, so

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Also

$$dy \text{ oder } d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

на $x_1 - x$. Тогда

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\left(\text{или } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}.$$

Чтобы освободить числитель от иррациональности, умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$ и получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Но

$$\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Если теперь становится $x_1 = x$ или $x_1 - x = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Следовательно,

$$dy \text{ или } d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

* ÜBER DAS DIFFERENTIAL [13]

I

1) $f(x)$ oder $y = uz$ sei zu differenzieren, u und z sind beide abhängige Funktionen der unabhängigen Variablen x; sie sind unabhängige Variablen gegenüber ihrer Funktion y, die von ihnen abhängt, also auch von x.

$$y_1 = u_1 z_1,$$

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u (z_1 - z),$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{z_1 \Delta u}{\Delta x} + \frac{u \Delta z}{\Delta x} \text{ *}.$$

Wird nun auf der rechten Seite $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$, so $u_1 - u = 0$, $z_1 - z = 0$, also auch Faktor z_1 in [dem Ausdruck] $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ zu z, endlich auf der linken Seite $y_1 - y = 0$. Also:

A) $\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$.

Welche Gleichung multipliziert mit dem allen ihren Gliedern gemeinschaftlichen Nenner dx wird

B) dy oder $d(uz) = z\,du + u\,dz$ [14].

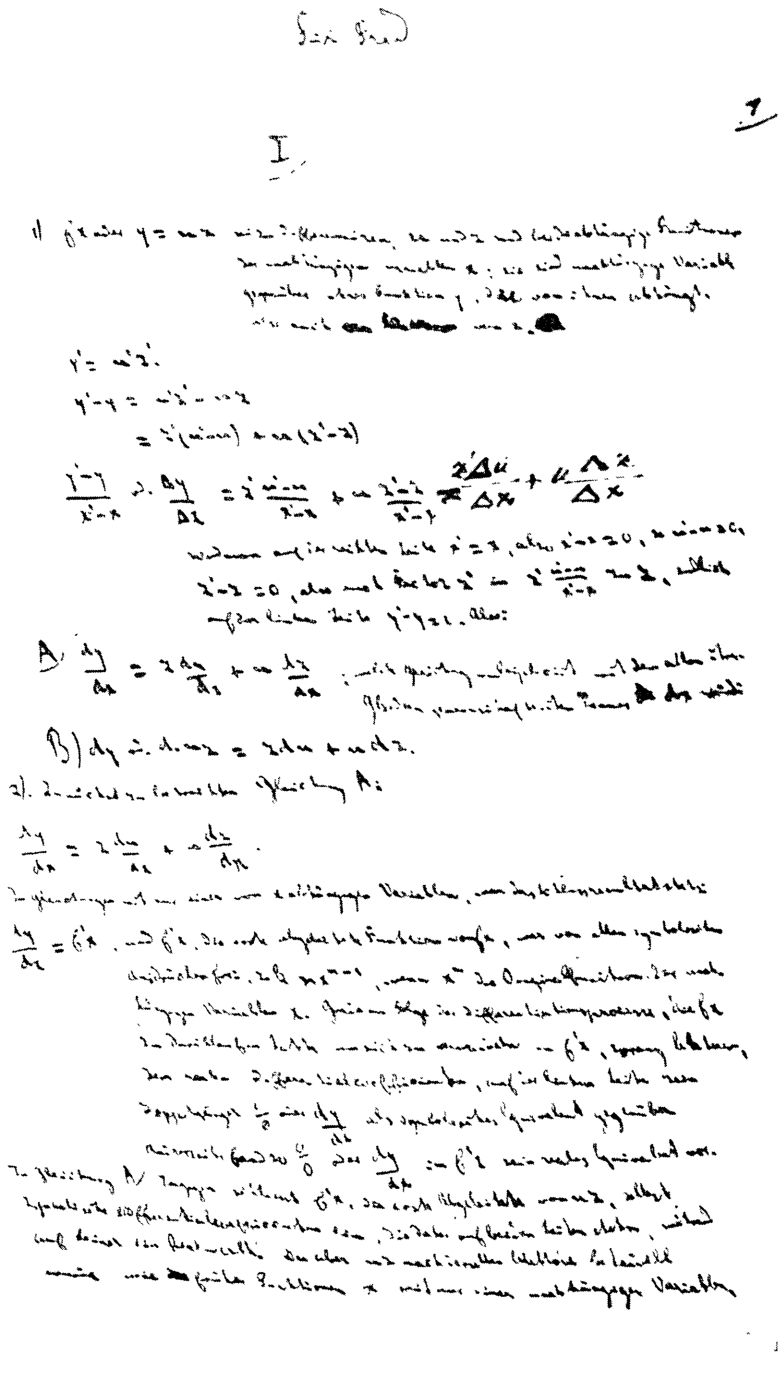
2) Zunächst zu betrachten Gleichung A):

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

In Gleichungen mit nur einer von x abhängigen Variablen war das Schlussresultat stets

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

* Letzter Teil der Gleichung anscheinend von Engels's hinzugefügt.— *Red.*



Первая страница работы «О дифференциале».

* О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ [13]

I

1) Пусть нужно продифференцировать $f(x)$ или $y = uz$, где u и z — функции, зависящие обе от независимой переменной x; они являются независимыми переменными относительно зависящей от них функции y, которая, таким образом, зависит также от x.

$$y_1 = u_1 z_1,$$

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u (z_1 - z),$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{z_1 \Delta u}{\Delta x} + \frac{u \Delta z}{\Delta x}\ ^{*}.$$

Если теперь на правой стороне станет $x_1 = x$, следовательно, $x_1 - x = 0$, то $u_1 - u = 0$, $z_1 - z = 0$, следовательно, и множитель z_1 [в выражении] $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ превратится в z и, наконец, на левой стороне $y_1 - y = 0$. Таким образом,

A) $\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$.

Это уравнение, умноженное на общий всем его членам знаменатель dx, превращается в

B) dy или $d(uz) = z\,du + u\,dz$ [14].

2) Рассмотрим сперва уравнение A):

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}\ .$$

В уравнениях лишь с одной зависящей от x переменной конечный результат всегда был

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

* Последняя часть равенства дописана Энгельсом.— *Ред.*

und $f'(x)$, die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$, war von allen symbolischen Ausdrücken frei [15], z. B. mx^{m-1}, wenn x^m die Originalfunktion der unabhängigen Variablen x. Grade infolge der Differentiationsprozesse, die $f(x)$ zu durchlaufen hatte, um sich zu verwandeln in $f'(x)$, sprang letzterem, dem realen Differentialkoeffizienten [16], auf der linken Seite, sein Doppelgänger $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ als symbolisches Äquivalent gegenüber. Andrerseits fand so $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ in $f'(x)$ sein reales Äquivalent vor.

In Gleichung A) dagegen schliesst $f'(x)$, die erste Abgeleitete von uz, selbst symbolische Differentialkoeffizienten ein, die daher auf beiden Seiten stehn, während auf keiner ein Realwert. Da aber uz nach derselben Methode behandelt wurde, wie früher Funktionen x mit nur einer unabhängigen Variablen, stammt dieser Kontrast im Resultat offenbar her aus dem eigentümlichen Charakter der Ausgangsfunktion selbst, nämlich aus uz. Näheres darüber sub 3).

Vorläufig aber noch zu sehn, ob kein Haken in der *Ableitung* der Gleichung A).

Auf ihrer rechten Seite wurden

$$\frac{u_1-u}{x_1-x} \text{ oder } \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{und} \quad \frac{z_1-z}{x_1-x} \text{ oder } \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

zu $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$, weil $x_1=x$ ward, also $x_1-x=0$. Statt $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ setzten wir aber ohne weiteres $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. War das zulässig, da jene $\frac{0}{0}$ hier als *Multiplikatoren der Variablen u und z* resp. figurieren, während in den Fällen mit einer abhängigen Variablen der einzige symbolische Differentialkoeffizient, der sich ergab, — $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ — keinen Multiplikator hatte ausser der Konstanten 1?

Setzen wir die ursprüngliche Knotengestalt von $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ in die rechte Seite, so wird sie: $z\frac{0}{0}+u\frac{0}{0}$. Multiplizieren wir also z und u mit dem Zähler des jedes derselben begleitenden $\frac{0}{0}$, so erhalten wir: $\frac{0}{0}+\frac{0}{0}$; und da die Variablen z und u selbst $=0$ [17] geworden, so sind где $f'(x)$ — первая производная функция от $f(x)$ — была свободна от всяких символических выражений [15], как, например, mx^{m-1} для случая, когда x^m есть первоначальная функция независимой переменной x. Именно вследствие процессов дифференцирования, которые функция $f(x)$ должна была пробежать, чтобы превратиться в $f'(x)$, навстречу последнему, т. е. реальному дифференциальному коэффициенту [16], появился на левой стороне в качестве символического эквивалента его двойник $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$. С другой стороны, $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$ нашло, таким образом, в $f'(x)$ свой реальный эквивалент.

В уравнении же А) сама $f'(x)$, первая производная от uz, включает в себя символические дифференциальные коэффициенты, которые поэтому стоят на обеих сторонах, в то время как реального значения нет ни на одной. Но так как с uz мы обращались, следуя тому же методу, как прежде с функциями x с одной лишь независимой переменной, то этот контраст в результате, очевидно, обусловливается специфическим характером самой исходной функции, т. е. uz. Подробнее об этом sub 3).

Предварительно, однако, посмотрим еще, нет ли в *выводе* уравнения А) какой-нибудь загвоздки.

В правой его части

$$\frac{u_1-u}{x_1-x} \text{ или } \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \frac{z_1-z}{x_1-x} \text{ или } \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

превратились в $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$, так как стало $x_1=x$, следовательно, $x_1-x=0$ Вместо $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ мы написали, однако, без долгих размышлений $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Было ли это допустимо при условии, что эти $\frac{0}{0}$ фигурируют здесь в качестве *множителей при переменных* u и z соответственно, тогда как в случаях с одной зависимой переменной единственный символический дифференциальный коэффициент, который там получался, — $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$ — не имел никакого множителя, кроме постоянной 1?

Если мы подставим первоначальную узловую форму выражений $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ на правую сторону, то последняя превратится в $z\frac{0}{0}+u\frac{0}{0}$. Если бы мы помножили далее z и u на числитель сопровождающего каждое из них [выражения] $\frac{0}{0}$, то получили бы $\frac{0}{0}+\frac{0}{0}$; и так как сами переменные z и u стали $=0$ [17], то и производные их также es auch ihre Abgeleiteten, also schliesslich:

$$\frac{0}{0}=0 \text{ und nicht } z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}.$$

Diese Prozedur ist aber mathematisch falsch.

Nehmen wir z. B.

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

so erhält man nicht erst den Zähler $= 0$, weil man damit begänne $u_1 - u = 0$ zu setzen, sondern der Zähler wird nur 0 oder $u_1 - u = 0$, weil der Nenner, die Differenz der unabhängigen variablen Grösse x, d. h. $x_1 - x = 0$ geworden.

Was also den Variablen u und z gegenüberspringt, ist nicht 0, sondern $\left(\frac{0}{0}\right)$, *dessen Zähler in dieser Form von seinem Nenner unzertrennlich bleibt*. Als Multiplikator könnte $\frac{0}{0}$ daher nur dann seine Koeffizienten nullifizieren, wenn und sofern

$$\frac{0}{0}=0.$$

Selbst in der gewöhnlichen Algebra wäre es falsch, falls ein Produkt $P\cdot\frac{m}{n}$ die Form $P\cdot\frac{0}{0}$ annähme, ohne weiteres zu schliessen, dass es $=0$ *sein muss*, obgleich es hier stets $=0$ gesetzt *werden kann*, weil wir beliebig die Nullifikation mit Zähler oder Nenner beginnen können[18].

Z. B. $P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Wird [$x=a$ woraus] $x^2=a^2$, also $x^2-a^2=0$ gesetzt, so erhalten: $P\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$ und letztres $=0$ setzbar, da $\frac{0}{0}$ ebensogut 0, als alles andre Zahl sein kann.

Lösen wir dagegen x^2-a^2 in seine Faktoren auf, so erhalten wir:

$$P\cdot\frac{x-a}{x-a}\cdot(x+a)=P(x+a), \text{ und da } x=a \;{}^{19}, \; =2Pa.$$

Die sukzessive Differentiation — z. B. von x^3, wo $\frac{0}{0}$ erst bei der vierten Ableitung $= 0$ wird, nachdem in der dritten die Variable x alle geworden und durch eine Konstante ersetzt — beweist, dass $\frac{0}{0}$ nur unter ganz bestimmten Bedingungen $= 0$ wird.

равны нулю; следовательно, в итоге

$$\frac{0}{0}=0, \text{ а не } z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}.$$

Эта процедура, однако, математически ошибочна.

Возьмем, например,

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Числитель получился $=0$ не потому, что мы начали с приравнивания $u_1-u=0$; числитель становится равным нулю, или $u_1-u=0$, лишь потому, что знаменатель, т. е. разность независимой переменной величины x, или x_1-x, стала равна 0.

Таким образом, переменным u и z противостоит не 0, а $\left(\frac{0}{0}\right)$, *числитель которого в этой форме неотделим от его знаменателя*. Поэтому $\frac{0}{0}$ в качестве множителя может обратить свои коэффициенты в нуль лишь тогда и поскольку $\frac{0}{0}=0$.

Даже в обычной алгебре было бы ошибочно в случае, когда произведение $P\cdot\frac{m}{n}$ оказалось бы имеющим вид $P\cdot\frac{0}{0}$, сразу же сделать вывод отсюда, что оно *должно быть* равно 0, хотя здесь оно всегда *может быть* положено равным нулю, поскольку мы по произволу можем начать нулификацию с числителя или со знаменателя[18].

Например, $P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Если мы положим $[x=a$, откуда$]$ $x^2=a^2$, т. е. $x^2-a^2=0$, то получим $P\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$. А последнее можно положить равным нулю, так как $\frac{0}{0}$ столь же хорошо может быть нулем, как и любым другим [числом].

Если же разложим x^2-a^2 на его множители, то получим

$$P\cdot\frac{x-a}{x-a}\cdot(x+a)=P(x+a) \quad \text{и, так как} \quad x=a \quad {}^{19}, \quad =2Pa.$$

Последовательное дифференцирование — например, [функции] x^3, где $\frac{0}{0}$ становится $=0$ лишь для четвертой производной, после того как в третьей переменная x исчезла и была заменена постоянной, — показывает, что лишь при вполне определенных условиях $\frac{0}{0}$ становится $=0$.

In unsrem Fall aber, wo der Ursprung der $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ als respektiven Differentialausdrücke von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ bekannt ist, gebührt ihnen auch von vornherein die Uniform $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$.

3) In den früher behandelten Gleichungen, wie $y = x^m$, $y = a^x$ etc., steht einer *Originalfunktion von* x die von ihm «Abhängige» y gegenüber.

In $y = uz$ sind beide Seiten mit «Abhängigen» besetzt. Wenn hier y direkt von u und z abhängt, so u und z ihrerseits wieder von x. Dieser spezifische Charakter der Originalfunktion uz prägt sich notwendig auch seiner «Abgeleiteten» auf.

Dass u eine Funktion von x, und z eine andre Funktion von x, ist darstellbar in:

$$u = f(x), \quad u_1 - u = f(x_1) - f(x),$$

daher

$$z = \varphi(x); \quad z_1 - z = \varphi(x_1) - \varphi(x).$$

Aber die Ausgangsgleichung liefert weder für $f(x)$ noch für $\varphi(x)$ Originalfunktionen von x, d. h. bestimmte Werte * in x. Folglich figurieren u und z bloss als Namen, als Symbole von x abhängiger Funktionen; daher werden auch nur die *allgemeinen Formen dieses Abhängigkeitsverhältnisses*:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \qquad \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}$$

zunächst durch den Ableitungsprozess aus uz geliefert. Erreicht der Prozess nun den Punkt, wo $x_1 = x$ gesetzt, also $x_1 - x = 0$, so verwandeln sich jene allgemeine Formen in

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

und die symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ erscheinen als solche der «Abgeleiteten» einverleibt.

In Gleichungen mit nur einer abhängigen Variablen hat aber $\frac{dy}{dx}$ durchaus keinen andren Inhalt als hier $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Es ist auch bloss

* Gemeint ist: «bestimmte Ausdrücke». — *Red.*

В нашем случае, однако, где известно происхождение этих $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{0}$ как соответственных дифференциальных выражений для $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, им сразу подобает мундир $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$.

3) В ранее рассмотренных уравнениях, как $y = x^m$, $y = a^x$ и т. д., некоторой *первоначальной функции от* x противостоит «зависимая» от нее y.

В $y = uz$ обе стороны заняты «зависимыми». Если y здесь непосредственно «зависит» от u и z, то u и z в свою очередь зависят от x. Этот специфический характер первоначальной функции uz неизбежно накладывает свой отпечаток и на ее «производную».

Что u есть функция от x, а z — некоторая другая функция от x, можно выразить следующим образом:

$$u = f(x), \qquad u_1 - u = f(x_1) - f(x),$$

поэтому

$$z = \varphi(x); \qquad z_1 - z = \varphi(x_1) - \varphi(x).$$

Но исходное уравнение не дает ни для $f(x)$, ни для $\varphi(x)$ первоначальных функций от x, т. е. определенных значений * в x. Вследствие этого u и z фигурируют лишь как имена, как символы функций, зависящих от x; поэтому лишь *общие формы этого отношения зависимости*:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \qquad \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x},$$

даются непосредственно процессом вывода производной от uz. Когда процесс достигает такого пункта, где полагается $x_1 = x$, т. е. $x_1 - x = 0$, эти общие формы превращаются в

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

и символические дифференциальные коэффициенты $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ появляются, как таковые, внутри «производной».

Но в уравнениях с одной лишь зависимой переменной $\frac{dy}{dx}$ не имеет решительно никакого другого содержания, кроме того, какое имеют здесь $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Оно также есть лишь символическое

* Здесь в смысле «определенных выражений».— *Ред.*

der symbolische Differentialausdruck von

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$ [20].

Obgleich aber die Natur der $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, d. h. symbolischer Differentialkoeffizienten überhaupt, sich keineswegs ändert, wenn sie *innerhalb der Abgeleiteten selbst* erscheinen, also auch auf der rechten Seite der Differentialgleichung, ändert sich damit jedoch ihre Rolle und der Charakter der Gleichung.

Repräsentieren wir die Originalfunktion von uz allgemein durch $f(x)$, so ihre erste «Abgeleitete» durch $f'(x)$,

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

erscheint dann als:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

Dieselbe allgemeine Form erhalten wir für Gleichungen mit nur einer abhängigen Variablen. In beiden Fällen entstehn die Ausgangsformen von $\frac{dy}{dx}$ aus den Ableitungsprozessen, die $f(x)$ in $f'(x)$ verwandeln. Sobald daher $f(x)$ zu $f'(x)$ geworden, steht letzterem auch $\frac{dy}{dx}$ als sein eigner symbolischer Ausdruck, als sein Doppelgänger oder symbolisches Äquivalent gegenüber.

In beiden Fällen spielt $\frac{dy}{dx}$ daher *dieselbe Rolle.*

Anders mit $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Zusammen mit den andern Elementen von $f'(x)$, dem sie einverleibt sind, finden sie in $\frac{dy}{dx}$ ihren symbolischen Ausdruck oder ihr symbolisches Äquivalent vor, aber sie selbst stehn keinem $f'(x)$, $\varphi'(x)$ gegenüber, dessen symbolische Doppelgänger sie ihrerseits wären. Sie sind einseitig zur Welt gekommen, Schattenfiguren ohne Körper, der sie geworfen, symbolische Differentialkoeffizienten ohne realen Differentialkoeffizienten, d. h. ohne entsprechende äquivalente «Abgeleitete». Der symbolische Differentialkoeffizient wird so zum *selbständigen Ausgangspunkt*, dessen reales Äquivalent erst zu finden ist. So ist die Initiative von dem rechten Pol, dem algebraischen, auf den linken, den symbolischen, verschoben. Damit erscheint aber дифференциальное выражение для

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\,^{20}.$$

Хотя природа $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, т. е. вообще символических дифференциальных коэффициентов, ничуть не меняется, если они появляются *внутри самой производной*, т. е. и на правой стороне дифференциального уравнения, тем самым, однако, меняется их роль, а также характер уравнения.

Если мы представим первоначальную функцию от uz в общем виде через $f(x)$ и, значит, ее первую «производную» через $f'(x)$, то

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

представится так:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

Эту же общую форму мы получаем для уравнений с одной лишь зависимой переменной. В обоих случаях исходные формы для $\frac{dy}{dx}$ возникают из процессов вывода, которые преобразуют $f(x)$ в $f'(x)$. Поэтому, коль скоро $f(x)$ преобразовалось в $f'(x)$, последнему также противостоит $\frac{dy}{dx}$ в качестве его собственного символического выражения, его двойника или символического эквивалента.

В обоих случаях $\frac{dy}{dx}$ играет поэтому *одинаковую роль*.

Иначе обстоит дело с $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Вместе с другими элементами [производной] $f'(x)$, в которую они включены, они находят в $\frac{dy}{dx}$ свое символическое выражение, свой символический эквивалент, но сами они со своей стороны не противостоят никаким $f'(x)$, $\varphi'(x)$, для которых они в свою очередь были бы символическими двойниками. Односторонне появились они на свет, тени без тела, которое их отбросило, символические дифференциальные коэффициенты без реальных дифференциальных коэффициентов, т. е. без соответствующих эквивалентных [им] «производных». Символический дифференциальный коэффициент становится, таким образом, *самостоятельным исходным пунктом*, реальный эквивалент которого лишь должен быть найден. Таким образом, инициатива передвинулась с правого, алгебраического полюса на левый, символический. Но тем самым и дифференциальное исчисление выступает как некое auch der Differentialcalculus als eine spezifische Rechnungsart, die bereits selbständig auf ihrem eignen Boden operiert. Denn seine Ausgangspunkte $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sind nur ihm angehörige und ihn charakterisierende mathematische Grössen. Und dieser Umschlag der Methode ergab sich hier als Resultat der algebraischen Differentiation von *uz*. Die algebraische Methode schlägt also von selbst in die ihr entgegengesetzte Differentialmethode um *.

Was sind nun die entsprechenden «Abgeleiteten» der symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$? Die Ausgangsgleichung $y = uz$ liefert keine Data zur Lösung dieser Frage. Doch bleibt letztere beantwortbar, wenn man für u und z beliebige Originalfunktionen von x setzt, z. B.:

$$u = x^4, \qquad z = x^3 + ax^2.$$

Damit verwandeln sich aber auch sofort die symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ in *Operationssymbole*, in Symbole von Prozessen, verrichtbar mit x^4 und $x^3 + ax^2$ zur Auffindung ihrer «Abgeleiteten». Ursprünglich entstanden als symbolischer Ausdruck der «Abgeleiteten», also bereits vollzogner, spielt der symbolische Differentialkoeffizient jetzt die Rolle des Symbols erst zu vollziehender Differentiationsoperationen.

Zugleich verwandelt sich die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

---

* Im Entwurf der Arbeit «Über das Differential» (4148, Pl. 16—17) läutet dieser Absatz:

«Umgekehrt mit $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Geboren innerhalb der Abgeleiteten, finden sie zusammen mit den übrigen Elementen derselben ihren eignen symbolischen Ausdruck, daher ihr symbolisches Äquivalent in $\frac{dy}{dx}$ vor. Aber sie selbst existieren ohne äquivalente, wirkliche Differentialkoeffizienten, d. h. ohne Abgeleitete $f'(x)$, $\varphi'(x)$, deren simbolische Ausdrücke sie ihrerseits wären. Sie sind die fertigen Differentialsymbole, deren Realwerte als Schatten figurieren, deren Körper erst zu suchen. Das Problem hat sich also unterderhand verkehrt. Symbolische Differentialkoeffizienten werden selbständige *Ausgangspunkte*, wofür das Äquivalent, der wirkliche Differentialkoeffizient ober die entsprechende abgeleitete Funktion, erst zu finden ist. Damit ist die Initiative von dem rechten Pol auf den linken verschoben. Da dieser Umschlag der Methode aus der algebraischen Bewegung der Funktion *uz* entsprang, ist er selbst algebraisch nachgewiesen». — *Red.*

специфическое исчисление, которое оперирует уже самостоятельно, на собственной почве, ибо исходные пункты его $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины. И это оборачивание метода получилось здесь как результат алгебраического дифференцирования uz. Алгебраический метод, таким образом, сам собой превращается в противоположный ему дифференциальный метод *.

Но что же представляют собой «производные», соответствующие символическим дифференциальным коэффициентам $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$? Исходное уравнение $y = uz$ не дает никаких данных для решения этого вопроса. На последний можно, однако, ответить, если вместо u и z представить произвольные первоначальные функции от x, например:

$$u = x^4, \quad z = x^3 + ax^2.$$

Но тем самым символические дифференциальные коэффициенты $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ тотчас же превращаются в *оперативные символы*, в символы процессов, которые должны быть выполнены над x^4 и $x^3 + ax^2$ для отыскания их «производных». Первоначально возникший как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций дифференцирования, символический дифференциальный коэффициент теперь играет роль символа тех операций дифференцирования, которые только предстоит еще произвести.

Одновременно с этим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

* Этот абзац в варианте работы «о дифференциале» (4148, л. 16—17) изложен так:

«Обратно с $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Рожденные внутри производной, они находят — вместе с остальными элементами последней — в $\frac{dy}{dx}$ свое собственное символическое выражение, следовательно, свой символический эквивалент. Но сами они существуют без эквивалентов, подлинных дифференциальных коэффициентов, т. е. без производных $f'(x)$, $\varphi'(x)$, символическими выражениями которых они со своей стороны были бы. Они перед нами как готовые дифференциальные символы, реальные значения которых подобны теням, тело которых нужно отыскать. Таким образом, задача буквально под руками обернулась. Символические дифференциальные коэффициенты становятся в полном смысле *исходными пунктами*, эквивалент которых — подлинный дифференциальный коэффициент или соответствующую производную функцию — еще нужно найти. Этим инициатива сдвинута с правого полюса на левый. Так как это оборачивание метода возникло из алгебраического движения функции uz, то оно само алгебраически обосновано».— *Ред.*

— von vornherein bloss symbolisch, weil ohne symbolfreie Seite — in eine allgemeine symbolische Operationsgleichung.

Ich bemerke noch, dass * von früher Zeit im 18. Jahrhundert bis heutigen Tag die allgemeine Aufgabe des Differentialcalculus gewöhnlich so formuliert wird: für den symbolischen Differentialkoeffizienten sein reales Äquivalent zu finden.

4)

A) $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\,\frac{dz}{dx}$.

Dies ist offenbar nicht der einfachste Ausdruck der Gleichung A), da alle ihre Glieder den Nenner dx gemein haben. Dieser weggestrichen, so:

B) $d(uz)$ oder $dy = z\,du + u\,dz$.

In B) ist jede Spur seiner Herkunft aus A) ausgelöscht. Es gilt daher ebensosehr, wenn u und z von x abhängen, als wenn sie ohne alles Verhältnis zu x nur wechselseitig voneinander abhängen [21]. Es ist von vornherein eine symbolische Gleichung und kann von vornherein als eine symbolische Operationsgleichung dienen. Im letzteren Fall besagt es, dass wenn

$$y = zu \text{ etc.,}$$

d. h. = einem aus beliebiger Anzahl Variabler zusammengesetzten Produkt, dy = einer Summe von Produkten, worin der Reihe nach je einer der Faktoren als variabel, die andern Faktoren aber als konstant behandelt werden etc.

Für unsern Zweck, nämlich weitere Untersuchung des Differentials von y überhaupt, passt jedoch die Form B) nicht. Setzen wir daher:

$$u = x^4, \qquad z = x^3 + ax^2,$$

so [operieren wir weiter so:]

$$du = 4x^3\,dx, \qquad dz = (3x^2 + 2ax)\,dx,$$

wie früher nachgewiesen bei Gleichungen mit nur einer abhängigen Variablen. Diese Werte von du, dz gebracht in die Gleichung A), so

A) $\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,\frac{4x^3\,dx}{dx} + x^4\,\frac{(3x^2 + 2ax)\,dx}{dx}$; also:

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4\,(3x^2 + 2ax);$$

* Im Entwurf folgt: «dass abgesehn von wenigen Ausnahmen».— *Red.*

— с самого начала чисто символическое, ибо не имеет свободной от символов стороны,— превращается в общее символическое оперативное уравнение.

Замечу еще, что * с начала 18-го века до настоящего времени общая задача дифференциального исчисления формулируется обычно так: найти для символического дифференциального коэффициента его реальный эквивалент.

4)

A) $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$.

Очевидно, что это не простейшее выражение для уравнения A), ибо все его члены содержат общий знаменатель dx. Отбросив его, получим:

B) $d(uz)$ или $dy = z\,du + u\,dz$.

В B) исчез всякий след его происхождения из A). Оно справедливо поэтому как для случая, когда u и z зависят от x, так и для случая, когда они — независимо от какого бы то ни было отношения к x — лишь взаимозависимы [21]. Это — с самого начала символическое уравнение и может с самого начала служить как символическое оперативное уравнение. В последнем случае оно утверждает, что если

$$y = zu \quad \text{и т. д.},$$

т. е. y = произведению любого числа переменных, то dy = сумме произведений, в каждом из которых один из множителей рассматривается поочередно как переменный, остальные же — как постоянные.

Для нашей цели — именно для дальнейшего исследования дифференциала от y вообще — форма B), однако, не подходит. Поэтому если мы положим

$$u = x^4, \quad z = x^3 + ax^2,$$

то [будем действовать дальше так:]

$$du = 4x^3\,dx, \quad dz = (3x^2 + 2ax)\,dx,$$

как это было ранее показано для уравнений с одной лишь зависимой переменной. Вставим эти значения для du и dz в уравнение A). Тогда:

A) $\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\frac{4x^3\,dx}{dx} + x^4\frac{(3x^2 + 2ax)\,dx}{dx}$; следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4(3x^2 + 2ax);$$

---

* В черновике: «что за небольшими исключениями».— *Ред.*

daher

$$dy = \{(x^3 + ax^2)\, 4x^3 + x^4\, (3x^2 + 2ax)\}\, dx.$$

Der Ausdruck in Klammern ist die erste Abgeleitete von uz; da aber $uz = f\,(x)$, ist seine Abgeleitete $= f'\,(x)$; setzen wir letztres nun an die Stelle der algebraischen Funktion, so:

$$dy = f'\,(x)\, dx.$$

Wir erhielten bereits dasselbe Resultat aus beliebiger Gleichung mit nur einer abhängigen Variablen, z. B.:

$$y = x^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} = f'\,(x),$$

$$dy = f'\,(x)\, dx.$$

Allgemeine haben wir: wenn $y = f\,(x)$, ob diese Funktion von x nun eine Originalfunktion in x sei oder abhängige Variable enthalte, stets $dy = df(x)$ und $df(x) = f'\,(x)\,dx$, also:

B) $dy = f'\,(x)\, dx$, die allgemeingültige Form des Differentials y. Es wäre dies sofort nachweisbar, auch wenn gegeben für $f\,(x)$: $f\,(x,\, z)$, d. h. eine Funktion *zweier voneinander unabhängigen Variablen*. Dies aber für unsern Zweck überflüssig.

II

1) Das Differential

$$dy = f'\,(x)\, dx$$

schaut von vornherein verdächtiger aus als der Differentialkoeffizient

$$\frac{dy}{dx} = f'\,(x),$$

wovon es abgeleitet.

In $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ sind Nenner und Zähler unzertrennlich verbunden; in $dy = f'\,(x)\, dx$ sind sie augenscheinlich getrennt, so dass sich der Schluss aufdrängt, es sei nur ein maskierter Ausdruck für

$$0 = f'\,(x) \cdot 0 \quad \text{oder} \quad 0 = 0,$$

womit «nix ze wolle».

Ein französischer Mathematiker aus dem ersten Drittel des 19. Jahrhunderts, der ganz anders klar als der [dir] bekannte «elegante» поэтому

$$dy = \{(x^3 + ax^2)\, 4x^3 + x^4 (3x^2 + 2ax)\}\, dx.$$

Выражение в скобках есть первая производная от uz; но так как $uz = f(x)$, то его производная $= f'(x)$. Подставив последнюю на место алгебраической функции, получим

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Мы уже получили тот же самый результат из любого уравнения с одной лишь зависимой переменной, например:

$$y = x^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} = f'(x),$$

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Вообще мы имеем: если $y = f(x)$, то независимо от того, является ли эта функция от x некоторой первоначальной функцией в x или содержит зависимые переменные, всегда $dy = df(x)$, а $df(x) = f\ (x)\, dx$, так что:

B) $dy = f'(x)\, dx$ — всеобщая форма дифференциала y. То же самое можно было бы тотчас же показать и в случае, когда $f(x)$ имеет вид $f(x, z)$, т. е. является функцией *двух независимых друг от друга переменных*. Но для нашей цели это излишне.

II

1) Дифференциал

$$dy = f'(x)\, dx$$

выглядит сначала более подозрительно, чем дифференциальный коэффициент

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

из которого он выведен.

В $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ числитель и знаменатель нераздельно связаны друг с другом; в $dy = f'(x)\, dx$ они на вид разделены, так что напрашивается вывод, что это лишь замаскированное выражение для

$$0 = f'(x) \cdot 0 \quad \text{или} \quad 0 = 0,$$

с чем «ничего не поделаешь».

Один французский математик первой трети 19-го века — Бушарла, который, как и известный [тебе] «элегантный» француз [22], но

Franzos [22] die Differentialmethode mit der algebraischen Methode Lagrange's verknüpft hat,— Boucharlat sagt:

Wenn $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ z. B., so ist «$\frac{dy}{dx}$ alias $\frac{0}{0}$, oder vielmehr sein Wert $3x^2$ der Differentialkoeffizient der Funktion y. Da $\frac{dy}{dx}$ also das Symbol, welches die Grenze $3x^2$ repräsentiert, *müsste dx stets unter dy stehn* *, aber *um die algebraischen Operationen zu erleichtern*, behandeln wir $\frac{dy}{dx}$ als gewöhnlichen Bruch und $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ als eine gewöhnliche Gleichung; man erhält dann durch die Befreiung der Gleichung von ihrem Nenner das Resultat:

$$dy = 3x^2\,dx,$$

welcher Ausdruck das Differential von y heisst» [23].

Um also «die algebraischen Operationen zu erleichtern», führt man eine nachgewiesnermassen falsche Formel ein, die man «Differential» tauft.

In der Tat ist der casus nicht so bösartig.

In $\frac{0}{0}$ ** ist der Zähler unzertrennlich vom Nenner, aber warum? Weil beide nur ungetrennt ein Verhältnis ausdrücken, dans l'espèce das auf sein absolutes Minimum reduzierte [24] Verhältnis:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

wo der Zähler zu 0 geworden, weil der Nenner. Getrennt sind beide 0, verlieren daher ihren symbolischen Sinn, ihren Verstand.

Sobald aber $x_1 - x = 0$ in dx eine Form gewinnt, welche es unabänderlich manifestiert als verschwundne Differenz der unabhängigen Variablen x, also auch dy als verschwundne Differenz der Funktion von x oder der Abhängigen y, wird die Trennung des Nenner vom Zähler eine durchaus zulässige Operation. Wo immer dx jetzt stehe, solcher Ortswechsel lässt das Verhältnis von dy zu ihm unberührt. $dy = f'(x)\,dx$ erscheint so uns als eine andre Form von

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und ist stets in letztres umsetzbar [25].

---

* Im Entwurf: «stehen bleiben».— *Red.*

** Im Entwurf: «In der Form $\frac{0}{0}$ ». — *Red.*

совсем по-иному ясно связал дифференциальный метод с алгебраическим методом Лагранжа, говорит:

Если, например, $\frac{dy}{dx}=3x^2$, то «$\frac{dy}{dx}$, иначе $\frac{0}{0}$ или, вернее, его значение $3x^2$ есть дифференциальный коэффициент функции y. Так как $\frac{dy}{dx}$ есть, таким образом, символ, представляющий предел $3x^2$, *то* dx *должно бы всегда стоять** *под* dy. Но *для облегчения алгебраических операций* мы рассматриваем $\frac{dy}{dx}$ как обыкновенную дробь и $\frac{dy}{dx}=3x^2$ как обыкновенное уравнение; освобождая его от знаменателя, мы получаем в результате выражение $dy=3x^2\,dx$, которое называется дифференциалом от y»[23].

Итак, для того чтобы «облегчить алгебраические операции», вводят заведомо ложную формулу, окрещивая ее именем «дифференциал».

В действительности казус не столь злостен.

В $\frac{0}{0}$** числитель неотделим от знаменателя, но почему? Потому, что лишь в неразделенном виде они выражают отношение, именно сведенное к своему абсолютному минимуму отношение[24]:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

где числитель стал нулем потому, что им стал знаменатель. Разделенные, они — оба нули и утрачивают поэтому свое символическое значение, свой смысл.

Но как только $x_1-x=0$ получает в dx форму, которая неизменно представляет его как исчезнувшую разность независимой переменной x, а следовательно, и dy как исчезнувшую разность функции от x или зависимой y, так отделение знаменателя от числителя становится вполне допустимой операцией. Где бы теперь ни находился dx, такая перемена места не затрагивает отношения к нему dy. Итак, $dy=f'(x)\,dx$ выступает перед нами как другая форма для

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

и всегда может быть заменен последней[25].

---

* В черновике: «оставаться».— *Ред.*

** В черновике: «В форме $\frac{0}{0}$».— *Ред.*

2) Das Differential $dy = f'(x)\, dx$ ergab sich durch direkte algebraische Ableitung aus A) (sieh I, 4), während die algebraische Ableitung der Gleichung A) schon bewiesen hatte, dass Differentialsymbole, dans l'espèce der symbolische Differentialkoeffizient, welche ursprünglich entstehn als bloss symbolische Ausdrücke algebraisch vollzogner Differentiationsprozesse, notwendig wieder in selbständige Ausgangspunkte, in Symbole erst zu verrichtender Operationen oder in Operationssymbole umschlagen, daher auch die auf algebraischem Weg entstandnen symbolischen Gleichungen in symbolische Operationsgleichungen.

Wir sind also doppelt berechtigt, das Differential $dy = f'(x)\, dx$ als symbolische Operationsgleichung zu behandeln. Wir wissen dabei jetzt a priori, dass wenn

$$y = f(x) \quad [\text{und}] \quad dy = df(x),$$

dass wenn die durch $df(x)$ angezeigte Differentialoperation an $f(x)$ vollzogen wird, das Resultat: $dy = f'(x)\,dx$, und dass sich hieraus schliesslich ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Aber auch erst vom Augenblick, wo das Differential als Ausgangspunkt des Calculus funktioniert, ist die Umkehrung der algebraischen Differentiationsmethode vollendet, und erscheint daher der Differentiationskalkulus selbst als eine ganz aparte, spezifische Rechnungsweise mit variablen Grössen.

Um dies zu veranschaulichen, fasse ich die von mir angewandte algebraische Methode allgemein zusammen, indem statt bestimmter algebraischer Ausdrücke in x nur $f(x)$ gesetzt, und die «vorläufig Abgeleitete» (sieh das erste Manuskript *) als $f^1(x)$ bezeichnet wird im Unterschied von der definitiv «Abgeleiteten» $f'(x)$. Dann, wenn

$$f(x) = y, \qquad f(x_1) = y_1,$$

[so]

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y \text{ oder } \Delta y,$$

$$f^1(x)\,(x_1 - x) = y_1 - y \text{ oder } \Delta y.$$

Die vorläufig Abgeleitete $f^1(x)$ *muss* ** Ausdrücke in x_1 und x enthalten ganz wie ihr Faktor $x_1 - x$, mit der *einzigen Ausnahme*,

* Sieh «Über dem Begriff der abgeleiteten Funktion», S. 28.— *Red.*

** Im Entwurf: «*muss* in der *Regel*».— *Red.*

2) Дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ был получен прямым алгебраическим выводом из А) (см. I, 4). Но алгебраический вывод уравнения А) уже показал, что дифференциальные символы, в данном случае символический дифференциальный коэффициент, возникающие первоначально лишь как символические выражения алгебраически выполненных процессов дифференцирования, необходимо снова превращаются в самостоятельные исходные пункты, в символы операций, которые еще только предстоит выполнить, или в оперативные символы. Вследствие этого и возникшие на алгебраическом пути символические уравнения превращаются в символические оперативные уравнения.

Таким образом, мы вдвойне вправе рассматривать $dy = f'(x)\,dx$ как символическое оперативное уравнение. При этом мы знаем теперь a priori, что если в

$$y = f(x) \quad [\text{и}] \quad dy = df(x)$$

выполнить над $f(x)$ указанную посредством $df(x)$ дифференциальную операцию, то результатом будет $dy = f'(x)\,dx$, и что отсюда, наконец, получается

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Но лишь с того момента, когда дифференциал функционирует как исходный пункт исчисления, завершено оборачивание алгебраического метода дифференцирования, и дифференциальное исчисление само выступает поэтому как совершенно особый, специфический способ вычисления с переменными величинами.

Чтобы сделать это более наглядным, я подведу общий итог примененному мною алгебраическому методу, заменяя только при этом определенные алгебраические выражения в x выражением $f(x)$ и обозначая «предварительную производную» (см. первую рукопись *) через $f^1(x)$, в отличие от окончательной «производной» $f'(x)$. Тогда, если

$$f(x) = y, \qquad f(x_1) = y_1,$$

[то]

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y \text{ или } \Delta y, \qquad\qquad f^1(x)(x_1 - x) = y_1 - y \text{ или } \Delta y.$$

Предварительная производная $f^1(x)$, точно так же как ее множитель $x_1 - x$, *должна* ** содержать выражения в x_1 и x, *за единственным исключением*, когда $f(x)$ есть первоначальная функция

* См. «О понятии производной функции», стр. 29.— *Ред.*

** В черновике: «*должна* как *правило*».— *Ред.*

wenn $f(x)$ eine Originalfunktion *ersten Grades* ist

$$f^1(x) = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Wird nun in $f^1(x)$ gesetzt

$$x_1 = x, \quad \text{also} \quad x_1 - x = 0,$$

so erhalten:

$$f'(x) = \frac{0}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx}$$

und schliesslich:

$$f'(x)\,dx = dy \quad \text{oder} \quad dy = f'(x)\,dx.$$

Das Differential von y ist also der Schlusspunkt der algebraischen Entwicklung; es wird der Ausgangspunkt des sich auf eignem Boden bewegenden Differentialcalculus. dy — isoliert betrachtet, d.h. ohne sein Äquivalent — die Differentielle [26] von y, spielt hier sofort dieselbe Rolle wie Δy in der algebraischen Methode, und dx, die Differentielle von x, dieselbe Rolle wie dort Δx.

Hätten wir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)$$

von seinem Nenner befreit, so [erhielten wir]:

I) $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x$.

Dagegen ausgehend vom Differentialcalculus als fertiger, aparter Rechnungsart — und dieser Ausgang ward selbst algebraisch abgeleitet,— beginnen wir sofort mit dem Differentialausdruck von I), nämlich:

II) $dy = f'(x)\,dx$.

3) Da sich die symbolische Gleichung des Differentials gleich bei der algebraischen Behandlung der elementarsten Funktionen mit nur einer abhängigen Variablen einstellt, scheint es, dass auch der Umschlag in der Methode viel einfacher als es an dem Beispiel

$$y = uz$$

geschah, entwickelt werden konnte.

Die elementarsten Funktionen sind die von einem Grad; sie sind:

a) $y = x$, welches liefert den Differentialkoeffizienten $\frac{dy}{dx} = 1$, also: das Differential $dy = dx$.

b) $y = x \pm ab$; es liefert den Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx} = 1$, also wieder: das Differential $dy = dx$.

первой степени

$$f^1(x) = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Положив теперь в $f^1(x)$

$$x_1 = x, \quad \text{т. е.} \quad x_1 - x = 0,$$

получим:

$$f'(x) = \frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx}$$

и окончательно:

$$f'(x)\,dx = dy \text{ или } dy = f'(x)\,dx.$$

Дифференциал от y есть, таким образом, конечный пункт алгебраического развития: он становится исходным пунктом движущегося на собственной почве дифференциального исчисления. dy, рассматриваемая изолированно, т. е. без ее эквивалента,— дифференциальная частица [26] от y — играет тут сразу ту же роль, что и Δy в алгебраическом методе, а dx — дифференциальная частица от x — ту же роль, что там Δx.

Если бы мы освободили

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)$$

от его знаменателя, то [получили бы]:

I) $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x$.

Наоборот, исходя из дифференциального исчисления как готового, обособленного способа вычисления — а такой исходный пункт в свою очередь был выведен алгебраически,— мы сразу начинаем с дифференциального выражения уравнения I), именно:

II) $dy = f'(x)\,dx$.

3) Так как символическое уравнение дифференциала появляется уже при алгебраической трактовке самых элементарных функций с одной лишь зависимой переменной, то может казаться, что и оборачивание метода можно было бы произвести гораздо проще, чем это произошло на примере

$$y = uz.$$

Самые элементарные функции суть функции первой степени:

a) $y = x$, что дает дифференциальный коэффициент $\frac{dy}{dx} = 1$, следовательно, дифференциал $dy = dx$.

b) $y = x \pm ab$, что дает дифференциальный коэффициент $\frac{dy}{dx} = 1$, следовательно, опять дифференциал $dy = dx$.

c) $y = ax$; es liefert den Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx} = a$, also: das Differential $dy = a\,dx$.

Nehmen wir den allereinfachsten Fall (unter a)). So:

$$y = x,$$

$$y_1 = x_1;$$

$$y_1 - y \text{ oder } \Delta y = x_1 - x \text{ oder } \Delta x.$$

I) $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; also auch $\Delta y = \Delta x$. Wird nun in $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $x_1 = x$ gesetzt oder $x_1 - x = 0$, so:

II) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 1$; also $dy = dx$.

Wir sind von vornherein, sobald wir I) erhalten, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, gezwungen auf der linken Seite weiterzuoperieren, weil die rechte von der Konstanten 1 besetzt ist. Und damit scheint doch der *Umschlag in der Methode*, der die Initiative von der rechten Seite auf die linke wirft, von Haus aus ein für allemal bewiesen, in der Tat das erste Wort der algebraischen Methode selbst.

Sehn wir uns die Sache näher an.

Das wirkliche Resultat war:

I) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

II) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 1$.

Da beide, I) und II), zum selben Resultat führen, haben wir die Wahl zwischen beiden. Jedenfalls erscheint das Setzen von $x_1 - x = 0$ als eine überflüssige und daher willkürliche Operation. Ferner: operieren wir in II) weiter von der linken Seite aus, da auf der rechten «nix ze wolle», so erhalten:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Schlussfolgerung wäre, das $\frac{0}{0} = 0$, also die Methode, wodurch $\frac{0}{0}$ erhalten wurde, irrig. Beim ersten coup führt sie zu nichts Neuem und gleich beim zweiten zu Nichts [27].

Endlich: wir wissen aus der Algebra, dass wenn zweite Seiten von zwei Gleichungen identisch, es auch die ersten sein müssen.

c) $y = ax$, что дает дифференциальный коэффициент $\frac{dy}{dx} = a$, следовательно, дифференциал $dy = a\,dx$.

Рассмотрим наипростейший случай (sub a)). Тогда:

$$y = x, \; y_1 = x_1;$$

$$y_1 - y \text{ или } \Delta y = x_1 - x \text{ или } \Delta x.$$

I) $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$; следовательно, и $\Delta y = \Delta x$. Если теперь в $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ положить $x_1 = x$, или $x_1 - x = 0$, то:

II) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx} = 1$; следовательно, $dy = dx$.

С самого начала, как только получено I), т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, мы вынуждены оперировать в дальнейшем на левой стороне уравнения, так как правая занята постоянной 1. Но тем самым *оборачивание метода*, перебрасывающее инициативу с правой стороны на левую, представляется как будто с самого начала раз навсегда доказанным, в действительности первым словом самóго алгебраического метода.

Присмотримся к делу поближе.

Действительный результат был:

I) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

II) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx} = 1$.

Так как оба, I) и II), приводят к одному и тому же результату, то мы можем выбирать между ними. Во всяком случае полагание $x_1 - x = 0$ представляется излишней, а потому и произвольной операцией. Кроме того, оперируя далее над II), исходя из левой его стороны, так как на правой «делать нечего», мы получим:

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Заключительным выводом было бы, что $\frac{0}{0} = 0$, т. е. метод, с помощью которого было получено $\frac{0}{0}$, ошибочен. При первом шаге он не дает ничего нового, а уже при втором — ведет к ничему [27].

Наконец, мы знаем из алгебры, что если вторые стороны двух уравнений тождественны, то и первые тоже должны быть

Folgt daher, dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Da aber x und das von ihm abhängige y beides variable Grössen sind, kann sich Δx, obgleich eine endliche Differenz, endlos verkürzen, in andern Worten, sich 0 *nähern*, soviel man will, also *unendlich klein* werden, daher auch das von ihm abhängige Δy. Da ferner $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, so folgt daraus, dass $\frac{dy}{dx}$ wirklich nicht das extravagante $\frac{0}{0}$ bedeutet, sondern umgekehrt die Sonntagsuniform von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, sobald dies als Verhältnis unendlich kleiner Differenzen funktioniert, also anders als in der gewöhnlichen Differenzenrechnung.

Das Differential $dy = dx$ seinerseits hat aber keinen Sinn, oder vielmehr grade nur soviel Sinn, als wir für die beiden Differentiellen in der Analyse von $\frac{dy}{dx}$ entdeckten. Nähmen wir dies in der zuletzt gegebnen Deutung[28], so könnten wir mit dem Differential schon Wunderoperationen verrichten, wie z. B. die Rolle von $a\,dx$ in der Bestimmung der Subtangente der Parabel zeigt, wozu keineswegs erheischt, dass die Natur von dx, dy wirklich begriffen sei.

4) Bevor ich übergehe zu Abschnitt III, der den historischen Entwicklungsgang des Differentialcalculus auf verkürztestem Masstab skizziert, noch ein Beispiel der bisher angewandten algebraischen Methode. Um sie schlagend zu kennzeichnen, stelle ich die bestimmte Funktion auf die linke Seite, welche stets die Seite der Initiative, weil wir von der Linken zur Rechten schreiben, deshalb auch die allgemeine Gleichung:

$$x^m + Px^{m-1} + \text{etc.} + Tx + U = 0,$$

und nicht

$$0 = x^m + Px^{m-1} + \text{etc.} + Tx + U.$$

Wenn Funktion y und unabhängige Variable x verteilt sind auf zwei Gleichungen, wovon die erste y als Funktion der Variablen u darstellt, die zweite dagegen u als Funktion von x, sei *der beiden gemeinschaftliche symbolische Differentialkoeffizient zu finden* [29]. Nimm an:

$$\begin{array}{llcl} 1) & 3u^2 = y, & \multirow{2}{*}{dann} & 3u_1^2 = y_1, \\ 2) & x^3 + ax^2 = u\,; & & x_1^3 + ax_1^2 = u_1. \end{array}$$

тождественны. Отсюда следует, что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Но так как x и зависящая от нее y — обе переменные величины, то Δx, оставаясь конечной разностью, может, однако, бесконечно уменьшаться, другими словами, *приближаться* к нулю сколь угодно близко, т. е. становиться *бесконечно малой*, равно как и зависящая от нее Δy. Из $\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что $\frac{dy}{dx}$ в действительности означает не экстравагантное $\frac{0}{0}$, а, наоборот, есть праздничный мундир для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда это последнее функционирует как отношение бесконечно малых разностей, т. е. иначе, чем в обыкновенном разностном исчислении.

Но дифференциал $dy = dx$ в свою очередь лишен всякого смысла или, вернее, имеет лишь ровно столько смысла, сколько мы его открыли в обеих дифференциальных частицах, анализируя $\frac{dy}{dx}$. Если взять это последнее в только что приданном ему значении [28], то уже можно совершать с дифференциалом чудесные операции, как это показывает, например, роль $a\,dx$ в определении подкасательной параболы, для чего отнюдь не требуется действительного проникновения в природу dx, dy.

4) Прежде чем я перейду к разделу III, где будет дан самый краткий набросок исторического хода развития дифференциального исчисления, рассмотрим еще один пример применявшегося до сих пор алгебраического метода. Чтобы четко охарактеризовать его, я помещаю конкретную функцию на левой стороне, являющейся всегда стороной инициативы, так как мы пишем слева направо; отсюда и общее уравнение:

$$x^m+Px^{m-1}+\text{и т. д.}+Tx+U=0,$$

а не

$$0=x^m+Px^{m-1}+\text{и т. д.}+Tx+U.$$

Пусть функция y и независимая переменная x разделены и находятся в двух уравнениях, из которых первое представляет y как функцию переменной u, второе же — u как функцию от x, и пусть *требуется найти символический дифференциальный коэффициент, общий обоим уравнениям* [29]. Допустим:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \ 3u^2=y, & \text{тогда} & 3u_1^2=y_1, \\ 2)\ \ x^3+ax^2=u; & & x_1^3+ax_1^2=u_1. \end{array}$$

Behandeln wir zunächst Gleichung 1):

$$3u_1^2 - 3u^2 = y_1 - y,$$
$$3(u_1^2 - u^2) = y_1 - y,$$
$$3(u_1 - u)(u_1 + u) = y_1 - y,$$
$$3(u_1 + u) = \frac{y_1 - y}{u_1 - u} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Wird nun auf der linken Seite gesetzt $u_1 = u$, also $u_1 - u = 0$, dann:

$$3(u + u) = \frac{dy}{du},$$
$$3(2u) = \frac{dy}{du},$$
$$6u = \frac{dy}{du}.$$

Setzen wir nun für u seinen Wert $x^3 + ax^2$, so:

3) $6(x^3 + ax^2) = \frac{dy}{du}$.

Wenden wir uns jetzt zu Gleichung 2), so:

$$x_1^3 + ax_1^2 - x^3 - ax^2 = u_1 - u,$$
$$(x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) = u_1 - u,$$
$$(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x) = u_1 - u,$$
$$(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 + x) = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Setzen wir $x_1 = x$ auf der linken Seite, so $x_1 - x = 0$; daher

$$(x^2 + xx + x^2) + a(x + x) = \frac{du}{dx}.$$

4) $3x^2 + 2ax = \frac{du}{dx}$.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen 3) und 4) miteinander, so:

5) $6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$[30].

So algebraisch gefunden die Operationsformel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

die stellenweise auch anwendbar auf Gleichungen mit zwei unabhängigen Variablen.

Займемся сперва уравнением 1):

$$3u_1^2-3u^2=y_1-y,$$
$$3(u_1^2-u^2)=y_1-y,$$
$$3(u_1-u)(u_1+u)=y_1-y,$$
$$3(u_1+u)=\frac{y_1-y}{u_1-u} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Если теперь положить на левой стороне $u_1=u$, следовательно, $u_1-u=0$, то

$$3(u+u)=\frac{dy}{du},$$
$$3(2u)=\frac{dy}{du},$$
$$6u=\frac{dy}{du}.$$

Вставим вместо u его значение x^3+ax^2, тогда:

3) $6(x^3+ax^2)=\dfrac{dy}{du}$.

Обратимся теперь к уравнению 2), тогда:

$$x_1^3+ax_1^2-x^3-ax^2=u_1-u,$$
$$(x_1^3-x^3)+a(x_1^2-x^2)=u_1-u,$$
$$(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1-x)(x_1+x)=u_1-u,$$
$$(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1+x)=\frac{u_1-u}{x_1-x} \text{ или } \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Полагаем на левой стороне уравнения $x_1=x$, тогда $x_1-x=0$ и, следовательно,

$$(x^2+xx+x^2)+a(x+x)=\frac{du}{dx}.$$

4) $3x^2+2ax=\dfrac{du}{dx}$.

Теперь перемножим уравнения 3) и 4), тогда:

5) $6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax)=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$[30].

Таким образом, алгебраически найдена оперативная формула

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

которая порою применима также и к уравнениям с двумя независимыми переменными.

Dass es nun keine Hexerei ist, eine an bestimmte Funktionen nachgewiesene Entwicklung in eine ganz allgemeine Form umzusetzen, zeige das obige Beispiel. Nimm an:

1) $y = f(u)$, so $y_1 = f(u_1)$, daher $y_1 - y = f(u_1) - f(u)$,

2) $u = \varphi(x)$, $u_1 = \varphi(x_1)$, $u_1 - u = \varphi(x_1) - \varphi(x)$.

Aus der Differenz sub 1) ergibt sich:

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u}; \qquad \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du},$$

da aber $df(u) = f'(u)\,du$, so

$$\frac{dy}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du};$$

folglich:

3) $\frac{dy}{du} = f'(u)$.

Aus der Differenz sub 2) folgt:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

und da $d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$, so

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(u)\,dx}{dx},$$

also:

4) $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$.

Multiplizieren wir Gleichung 3) mit 4), so:

5) $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx}$[31] $= f'(u) \cdot \varphi'(x)$ q.e.d.

N. III. Schluss dieser zweiten Lieferung folgt, sobald John Landen nachgesehn auf Museum[32].

Что теперь не требуется никакой ловкости рук для того, чтобы придать общую форму обнаруженному на конкретных функциях развитию, видно на следующем примере. Пусть:

1) $y = f(u)$, тогда $y_1 = f(u_1)$, следовательно, $y_1 - y = f(u_1) - f(u)$,

2) $u = \varphi(x)$, $u_1 = \varphi(x_1)$, $u_1 - u = \varphi(x_1) - \varphi(x)$.

Из разности sub 1) вытекает:

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du}.$$

Но так как $df(u) = f'(u)\,du$, то

$$\frac{dy}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du};$$

следовательно:

3) $\frac{dy}{du} = f'(u)$.

Из разности sub 2) следует:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

но так как $d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)\,dx}{dx},$$

следовательно:

4) $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$.

Перемножим уравнения 3) и 4), тогда:

5) $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ или $\frac{dy}{dx}$ [31] $= f'(u) \cdot \varphi'(x)$, что и требовалось доказать.

N. III. Конец этого второго выпуска последует после того, как будет просмотрен в Музее Джон Ланден [32].

НАБРОСКИ И ДОПОЛНЕНИЯ К РАБОТЕ «О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ» [33]

* ERSTER ENTWURF [34]

Sobald zur Differentiation der $f\ (u, z)$ [$=uz$], wo die Variablen u und z beide Funktionen von x sind, geschritten wird, erhalten wir im Unterschied von den frühern Fällen, wo nur eine *abhängige Variable*, nämlich y, Differentialausdrücke auf beiden Seiten, nämlich:

in *erster Instanz*:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx};$$

in *zweiter reduziert*:

$$dy = z\,du + u\,dz,$$

welches letztere auch nicht dieselbe Form hat wie bei einer abhängigen Variablen, z.B. $dy = max^{m-1}\,dx$, denn hier gibt uns $\frac{dy}{dx}$ sofort die von Differentialsymbolen befreite $f'(x) = max^{m-1}$, was in $dy = z\,du + u\,dz$ keineswegs der Fall. Aus den Gleichungen mit einer abhängigen Variablen haben wir ein für allemal gesehn, wie die abgeleiteten Funktionen von [Funktionen in] x, im obigen Fall von x^m, gewonnen werden durch wirkliche Differentiation [Differenzsetzung] und deren spätere Aufhebung, und wie zugleich für die abgeleitete Funktion das symbolische Äquivalent $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ entspringt. Dass $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ gesetzt wird, erscheint hier nicht nur zulässig, sondern notwendig, da $\frac{0}{0}$ in seiner eignen waldursprünglichen Form = jeder Grösse, indem $\frac{0}{0} = X$, stets $0 = 0$ liefern muss. Hier aber erscheint $\frac{0}{0}$, gleich einem ganz bestimmten Spezialwert, $= mx^{m-1}$ und ist selbst das symbolische Resultat der Operationen, wodurch dieser

* ПЕРВЫЙ НАБРОСОК [34]

Как только мы приступаем к дифференцированию $f(u, z)$ $[=uz]$, где переменные u и z обе суть функции от x, мы в отличие от прежних случаев, где была лишь одна *зависимая переменная*, именно y, получаем дифференциальные выражения на обеих сторонах, именно:

в *первой инстанции*:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx};$$

во *второй сокращенно*:

$$dy = z\,du + u\,dz.$$

Это последнее имеет уже и не ту форму, как в случае с одной зависимой переменной, например, $dy = max^{m-1}\,dx$, ибо здесь $\frac{dy}{dx}$ дает нам тотчас же освобожденную от дифференциальных символов $f'(x) = max^{m-1}$, что отнюдь не имеет места в $dy = z\,du + u\,dz$. На уравнениях с одной зависимой переменной мы раз навсегда увидели, как производные функции от [функций в] x — в упомянутом выше случае для x^m — получаются путем действительного дифференцирования [полагания разности] и последующего его снятия и как вместе с тем для производной функции возникает ее символический эквивалент $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$. Подстановка $\frac{dy}{dx}$ вместо $\frac{0}{0}$ представляется здесь не только допустимой, но и необходимой, так как $\frac{0}{0}$ в его собственном девственно первобытном виде равно любой величине, поскольку $\frac{0}{0} = X$ всегда должно дать $0 = 0$. Здесь, однако, $\frac{0}{0}$ выступает как равное некоторому вполне определенному частному значению, как равное

Wert abgeleitet wird aus x^m; als solches Resultat ist es ausgedrückt in $\frac{dy}{dx}$. Hier wird also $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ in seinem Ursprung nachgewiesen als symbolischer Wert oder Differentialausdruck des bereits abgeleiteten $f'(x)$ nicht umgekehrt $f'(x)$ vermittelst des Symbols $\frac{dy}{dx}$ gefunden.

Zugleich aber, sobald wir einmal dies Resultat gewonnen, also uns schon auf dem Boden des Differentialcalculus bewegen, können wir umgekehrt, wenn wir z. B.

$$x^m = f(x) = y$$

zu differenzieren haben, von vornherein wissen

$$dy = mx^{m-1}\,dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Hier gehn wir also von dem Symbol aus; es figuriert nicht mehr als das Resultat der Ableitung der Funktion x, sondern bereits als *symbolischer Ausdruck* [35], der anzeigt, welche Operationen mit $f(x)$ vorzunehmen, um den Realwert von $\frac{dy}{dx}$, i.e. $f'(x)$, zu erhalten. Im ersten Fall wird $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ erhalten als symbolisches Äquivalent von $f'(x)$, und dies notwendig das erste, um den Ursprung von $\frac{dy}{dx}$ zu entdecken; im zweiten Fall wird $f'(x)$ erhalten als Realwert des Symbols $\frac{dy}{dx}$. Dann aber, wo die Symbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. zu Operationsformeln des Differentialcalculus [36] geworden, können sie als solche Formeln auch auf der *rechten Seite der Gleichung* erscheinen, wie dies schon der Fall in dem einfachsten Fall $dy = f'(x)\,dx$. Wenn solche Gleichung in ihrer Schlussgestalt nicht wie in diesem Fall uns sofort $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ etc. gibt, so dies der Beweis, dass sie eine Gleichung ist, die nur symbolisch ausdrückt, welche Operationen in der Anwendung auf *bestimmte Funktionen* vorzunehmen sind.

Und dies sofort der Fall — und der einfachste Fall — bei $d(uz)$, wo u und z beide Variable, aber beide zugleich Funktionen derselben dritten Variablen, z.B. von x, sind [37].

mx^{m-1}, и само есть символический результат тех операций, посредством которых это значение выводится из x^m. В качестве такого результата оно и представлено в $\frac{dy}{dx}$. Здесь, следовательно, $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ показан в его происхождении как символическое значение или дифференциальное выражение для уже выведенной [производной] $f'(x)$, а не наоборот, $f'(x)$ найдена посредством символа $\frac{dy}{dx}$.

Но в то же время, получив однажды этот результат и оказавшись, таким образом, уже на почве дифференциального исчисления, мы можем, наоборот, если, например, требуется дифференцировать

$$x^m = f(x) = y,$$

заранее знать

$$dy = mx^{m-1}\,dx$$

или

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Здесь, следовательно, мы исходим из символа; он не выступает больше как результат вывода функции x, но уже как *символическое выражение* [35], указывающее, какие операции следует произвести над $f(x)$, чтобы получить реальное значение для $\frac{dy}{dx}$, т. е. $f'(x)$. В первом случае $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$ получается как символический эквивалент для $f'(x)$, и с этого необходимо начинать, чтобы выявить происхождение $\frac{dy}{dx}$; во втором случае $f'(x)$ получается как реальное значение символа $\frac{dy}{dx}$. После того, однако, как символы $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. стали оперативными формулами дифференциального исчисления [36], они могут в качестве таких формул появляться и на *правой стороне уравнения*, как это имеет место уже в простейшем случае $dy = f'(x)\,dx$. Если такое уравнение в его заключительном виде, в отличие от того, что имеет место в данном случае, не дает нам тотчас же $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ и т. д., то это означает, что оно есть уравнение, которое лишь символически выражает, какие операции в применении к *определенным функциям* следует выполнить.

Это как раз и имеет место в случае — и притом простейшем случае — $d(uz)$, где u и z — обе переменные, но одновременно с этим и функции одной и той же третьей переменной, например x [37].

Sei zu differenzieren $f(x)$ oder $y = uz$, wo u und z *beide von x abhängige Variable*. Dann

$$y_1 = u_1 z_1$$

und

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz.$$

Also:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 z_1}{x_1 - x} - \frac{uz}{x_1 - x},$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x}.$$

Aber

$$u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u (z_1 - z),$$

da dies gleich

$$z_1 u_1 - z_1 u + u z_1 - uz = z_1 u_1 - uz.$$

Also:

$$\frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

Wird nun auf zweiter Seite $x_1 - x = 0$, oder $x_1 = x$, so wird $u_1 - u = 0$, also $u_1 = u$, und $z_1 - z = 0$, also $z_1 = z$; wir erhalten daher

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

und daher

$$d(uz) \text{ oder } dy = z\,du + u\,dz.$$

Es ist nun zu bemerken für diese Differentiation von uz — im Unterschied von unsern früheren Fällen, wo wir *nur eine abhängige Variable* hatten, — dass wir hier sofort Differentialsymbole auf beiden Seiten der Gleichung finden, nämlich:

in *erster Instanz*:

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx};$$

in *zweiter*

$$d(uz) \text{ oder } dy = z\,du + u\,dz,$$

Пусть нужно продифференцировать $f(x)$ или $y = uz$, где u и z — *переменные, зависящие обе от* x. Тогда

$$y_1 = u_1 z_1$$

и

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz.$$

Следовательно,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 z_1}{x_1 - x} - \frac{uz}{x_1 - x},$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x}.$$

Но

$$u_1 z_1 - uz = z_1 (u_1 - u) + u (z_1 - z),$$

так как это равно

$$z_1 u_1 - z_1 u + u z_1 - uz = z_1 u_1 - uz.$$

Итак,

$$\frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

Если на второй стороне становится $x_1 - x = 0$, или $x_1 = x$, то $u_1 - u = 0$, т. е. $u_1 = u$ и $z_1 - z = 0$, т. е. $z_1 = z$; мы получаем поэтому

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

и, следовательно,

$$d(uz) \text{ или } dy = z\,du + u\,dz.$$

Относительно этого дифференцирования uz необходимо заметить, что в отличие от наших прежних случаев, где мы имели *лишь одну зависимую переменную*, здесь дифференциальные символы находятся сразу на обеих сторонах уравнения, именно:

в *первой инстанции*:

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx};$$

во *второй*:

$$d(uz) \text{ или } dy = z\,du + u\,dz,$$

welches auch nicht dieselbe Form hat, wie bei einer unabhängigen Variablen, wie z.B. $dy = f'(x)\,dx$; denn hier gibt uns Division durch dx sofort $\frac{dy}{dx} = f'(x)$: den vom symbolischen Koeffizient freien Spezialwert der aus function x abgeleiteten $f'(x)$, was keineswegs der Fall ist in $dy = z\,du + u\,dz$.

In den Funktionen mit *nur einer abhängigen Variablen* wurde gezeigt, wie aus einer Funktion x, z.B. $f(x) = x^m$, eine zweite Funktion x, $f'(x)$ oder im gegebnen Fall mx^{m-1} abgeleitet wird *vermittelst wirklicher Differentiation und späterer Aufhebung derselben* und wie aus diesem Prozess zugleich für die abgeleitete Funktion das symbolische Äquivalent $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ auf der linken Seite der Gleichung entspringt.

Ferner: das Setzen von $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ war hier nicht nur zulässig, sondern mathematisch notwendig, da $\frac{0}{0}$ in seiner eignen waldursprünglichen Form jeden Grössenwert haben kann, weil $\frac{0}{0} = X$ stets $0 = 0$ liefern muss. Hier aber erscheint $\frac{0}{0}$ als symbolisches Äquivalent eines ganz bestimmten Realwerts, wie z.B. oben mx^{m-1}, und ist selbst nur Resultat der Operationen, wodurch dieser Wert abgeleitet aus x^m; als solches Resultat ist es festgehalten in der Form $\frac{dy}{dx}$.

Hier also, wo $\frac{dy}{dx}\left(= \frac{0}{0}\right)$ in seinem Ursprung nachgewiesen, wird keineswegs $f'(x)$ vermittelst des Symbols $\frac{dy}{dx}$ gefunden, sondern im Gegenteil der Differentialausdruck $\frac{dy}{dx}$ als symbolisches Äquivalent der bereits abgeleiteten Funktion x.

Sobald dies Resultat aber einmal gewonnen, können wir umgekehrt verfahren. Ist eine $f(x)$, z.B. x^m, zu differenzieren, so suchen wir erst den Wert von dy und finden $dy = mx^{m-1}\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$. Hier figuriert der symbolische Ausdruck als Ausgangspunkt. [Wir] bewegen uns so bereits auf dem Boden des Differentialcalculs, d.h. $\frac{dy}{dx}$ etc. dienen bereits als *Formeln*, welche bekannte mit der Funktion x vorzunehmende Differentialoperationen anzeigen. Im ersten что также имеет форму, отличную от получавшейся при одной независимой переменной, как, например, $dy = f'(x)\,dx$; ибо здесь деление на dx дает нам сразу $\frac{dy}{dx} = f'(x)$: свободное от символического коэффициента специальное выражение для произведенной из функции x функции $f'(x)$, что отнюдь не имеет места в $dy = z\,du + u\,dz$.

Для функций с *одной лишь зависимой переменной* было показано, как из некоторой функции x, например, $f(x) = x^m$, выводится некоторая вторая функция x, $f'(x)$ или в данном случае mx^{m-1} *посредством подлинного дифференцирования и его последующего снятия* и как из этого же процесса возникает одновременно на левой стороне уравнения для производной функции символический эквивалент $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$.

Далее, полагание $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ было здесь не только допустимо, но математически необходимо, ибо $\frac{0}{0}$ в его собственной девственно первобытной форме может иметь любое численное значение, так как $\frac{0}{0} = X$ всегда дает с необходимостью $0 = 0$. Здесь же $\frac{0}{0}$ выступает как символический эквивалент некоторого вполне определенного реального значения, как, например, выше mx^{m-1}, и само является лишь результатом операций, посредством которых это значение выведено из x^m; как такой результат, оно закрепляется в форме $\frac{dy}{dx}$.

Здесь, следовательно, где $\frac{dy}{dx}\left(= \frac{0}{0}\right)$ показано в его происхождении, не $f'(x)$ получается посредством символа $\frac{dy}{dx}$, но, наоборот, дифференциальное выражение $\frac{dy}{dx}$ получается как символический эквивалент уже произведенной функции x.

Но как только этот результат уже получен, мы можем действовать обратным образом. Если требуется продифференцировать какую-нибудь $f(x)$, например x^m, то мы сначала ищем значение dy и находим $dy = mx^{m-1}\,dx$, откуда $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$. Здесь символическое выражение фигурирует как исходный пункт и [мы] оперируем уже на почве дифференциального исчисления, иными словами, $\frac{dy}{dx}$ и т. д. служат нам уже *формулами*, указывающими, каким известным нам дифференциальным операциям надлежит подвергнуть функцию x.

Fall ward $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ erhalten als symbolisches Äquivalent von $f'(x)$, im zweiten wird $f'(x)$ gesucht und erhalten als Realwert der Symbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

Dienen diese Symbole aber bereits als Operationsformeln des Differentialcalculs, so können sie als solche Formeln auch auf der rechten Seite der Gleichung erscheinen, wie dies bereits geschah in dem einfachsten Fall $dy=f'(x)\,dx$. Wenn solche Gleichung in ihrer Schlussgestalt nicht wie im erwähnten Fall sofort reduzierbar auf $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ etc., i.e. auf einen Realwert, so beweist das, dass sie eine Gleichung ist, die nur symbolisch ausdrückt, welche Operationen vorzunehmen, sobald *bestimmte Funktionen* an die Stelle ihrer unbestimmten [Zeichen] treten.

Der einfachste Fall, wo dies eintritt, ist bei $d\,(uz)$, wo u und z beide variabel, aber beide zugleich Funktionen derselben 3ten Variablen, z.B. von x, sind.

Wenn wir hier erhalten sofort bei dem Differenzierungsprozess (sieh Anfang hiervon aus Heft I, wiederholt p. 10 dieses Heftes *)

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}\,,$$

so nicht zu vergessen, dass u und z hier beide *von x abhängige Variable*, wie y nur abhängig von x, weil von z und u. Bei *einer* abhängigen Variablen hatten wir diese auf der symbolischen Seite, wir haben jetzt auf der rechten Seite zwei Variablen u und z, die unabhängig gegenüber y, aber beide *abhängig von x* sind, und ihr Charakter [als] von x abhängiger Variablen erscheint in ihren respektiven symbolischen Koeffizienten $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$. Treten abhängige Variablen auch auf die rechte Seite, so müssen daher notwendig auch symbolische Differentialkoeffizienten innerhalb derselben auftreten.

Aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

folgt:

$$d\,(uz)\ \text{oder}\ dy=z\,du+u\,dz.$$

Diese Gleichung zeigt aber nur die Operationen an, die vorzunehmen, sobald u und z als bestimmte Funktionen von x gegeben sind.

---

* Sieh S. 82.— *Red.*

В первом случае $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ было получено как символический эквивалент для $f'(x)$, во втором — ищут и получают $f'(x)$ как реальное значение символов $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д.

Но если эти символы служат уже оперативными формулами дифференциального исчисления, то, как таковые, они могут появиться также и на правой стороне уравнения, как это имело уже место в простейшем случае $dy = f'(x)\,dx$. Если подобное уравнение в его заключительной форме не может быть, как в простейшем случае, тотчас сведено к $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ и т. д., т. е. к некоторому реальному значению, то это означает, что данное уравнение лишь символически выражает, какие операции нужно будет выполнить, когда место неопределенных [знаков функций] займут *определенные функции.*

Простейшим случаем, где это имеет место, является $d(uz)$, где u и z — обе переменные, но обе одновременно функции одной и той же третьей переменной, например x.

Если процесс дифференцирования сразу же приводит нас к

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

(см. начало этого из тетради I, повторенное на стр. 10 этой тетради *), то не следует забывать, что u и z здесь обе *зависимые от* x *переменные*, как и y, которая зависит от x лишь потому, что зависит от z и u. При *одной* зависимой переменной мы имеем последнюю на символической стороне. Теперь же мы имеем на правой стороне две переменные u и z, независимые от y, но обе *зависимые от* x, и их характер [как] переменных, зависимых от x, выступает в соответствующих им символических коэффициентах $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Если зависимые переменные выступают и на правой стороне, то на этой стороне необходимо должны поэтому выступать также и символические дифференциальные коэффициенты.

Из уравнения

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

следует:

$$d(uz) \text{ или } dy=z\,du+u\,dz.$$

Но это уравнение лишь указывает на операции, которые нужно выполнить, коль скоро u и z даны как определенные функции от x.

---

* См. стр. 83. — *Ред.*

Der einfachste Fall wäre z.B.

$$u = ax, \qquad z = bx.$$

Dann

$$d(uz) \text{ oder } dy = bx \cdot a\,dx + ax \cdot b\,dx.$$

Dividieren wir beide Seiten durch dx, so:

$$\frac{dy}{dx} = abx + bax = 2abx$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ab + ba = 2ab.$$

Nehmen wir aber von vornherein das Produkt

$$y \text{ oder } uz = ax \cdot bx = abx^2,$$

so

$$uz \text{ oder } y = abx^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2abx, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2ab.$$

Sobald wir Formel erhalten wie z.B. $[w =]\ z\,\frac{du}{dx}$, ist klar, dass die Gleichung, what we might call allgemeiner Operationsgleichung, symbolischer Ausdruck zu verrichtender Differentialoperationen [ist]. Nehmen wir z.B. [den] Ausdruck $y\,\frac{dx}{dy}$, wo y Ordinate, x Abszisse, so ist dies der allgemeine symbolische Ausdruck für die Subtangente jeder beliebigen Kurve (ganz wie $d(uz) = z\,du + u\,dz$ solches für Differentiation jedes Produkts zweier Variablen, die von derselben dritten abhängen). Solange wir aber den Ausdruck lassen wie er ist, führt er zu weiter nichts, obgleich wir für dx die sinnliche Vorstellung haben, dass es Differential der Abszisse, und für dy, dass es Differential der Ordinate.

Um irgendein positives Resultat zu erhalten, müssen wir erst die Gleichung einer bestimmten Kurve nehmen, die uns einen bestimmten Wert von y in x und daher auch für dx gibt, wie z.B. $y^2 = ax$, die Gleichung der gewöhnlichen Parabel, und dann durch Differentiation erhalten $2y\,dy = a\,dx$; hence $dx = \frac{2y\,dy}{a}$. Setzen wir diesen bestimmten Wert für dx in die allgemeine Formel der Subtangente $y\,\frac{dx}{dy}$, so erhalten

$$\frac{y\,\frac{2y\,dy}{a}}{dy} = \frac{y \cdot 2y\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a},$$

Простейшим случаем был бы, например,

$$u = ax, \qquad z = bx.$$

Тогда

$$d(uz) \text{ или } dy = bx \cdot a\,dx + ax \cdot b\,dx.$$

Разделив обе части на dx, получим:

$$\frac{dy}{dx} = abx + bax = 2abx$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ab + ba = 2ab.$$

Если же мы взяли бы с самого начала произведение

$$y \text{ или } uz = ax \cdot bx = abx^2,$$

то

$$uz \text{ или } y = abx^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2abx, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2ab.$$

Коль скоро получена формула, подобная, например, $[w =]\, z\frac{du}{dx}$, ясно, что это уравнение, которое можно назвать общим оперативным уравнением, есть символическое выражение подлежащих выполнению дифференциальных операций. Если, например, мы возьмем выражение $y\frac{dx}{dy}$, где y — ордината, а x — абсцисса, то это — общее символическое выражение для подкасательной любой кривой (совершенно так же, как $d(uz) = z\,du + u\,dz$ есть таковое для дифференцирования произведения любых двух переменных, зависящих от одной и той же третьей). Но покуда мы оставляем это выражение таким, как оно есть, оно нам больше ничего не дает, хотя мы и представляем себе наглядно, что dx есть дифференциал абсциссы, а dy —дифференциал ординаты.

Чтобы получить какой бы то ни было положительный результат, мы должны сначала взять уравнение какой-нибудь определенной кривой, которое давало бы нам определенное значение для y в x, а поэтому и для dx, как, например, уравнение обыкновенной параболы: $y^2 = ax$. Дифференцируя последнее, получим $2y\,dy = a\,dx$; следовательно, $dx = \frac{2y\,dy}{a}$. Подставив это определенное значение для dx в общую формулу подкасательной $y\frac{dx}{dy}$, получим

$$\frac{y\,\frac{2y\,dy}{a}}{dy} = \frac{y \cdot 2y\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a},$$

und da $y^2 = ax$ [so ist dies]

$$= \frac{2ax}{a} = 2x,$$

welches der Wert der *Subtangente* der gewöhnlichen Parabel; i.e. sie *ist* $= 2 \times$ *Abszisse*. Aber wenn wir die Subtangente τ nennen, so liefert die allgemeine Gleichung $y \frac{dx}{dy} = \tau$, nur $y\,dx = \tau\,dy$. Vom Standpunkt der Differentialcalculs aus daher die Frage meist so gestellt (mit Ausnahme von Lagrange): den Realwert für $\frac{dy}{dx}$ zu finden.

Die Schwierigkeit scheint hervorzutreten, wenn wir für $\frac{dy}{dx}$ etc. ihre Originalform $\frac{0}{0}$ setzen dann

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dz}{dx}$$

erscheint als

$$\frac{0}{0} = z \cdot \frac{0}{0} + u \cdot \frac{0}{0},$$

Gleichung, die richtig ist, aber zu nichts führt, und um so weniger, da die drei $\frac{0}{0}$ aus verschiednen Differentialkoeffizients entspringen, von deren verschiednen Ableitungen nichts mehr sichtbar ist; aber zu erwägen:

1) Selbst in der ersten Darstellung mit einer unabhängigen Variablen erhalten erst

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = f'(x); \text{ also } \quad dy = f'(x)\,dx.$$

Aber da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}, \quad dy = 0 \quad \text{und} \quad dx = 0, \quad \text{also} \quad 0 = 0.$$

Indem wir wieder für $\frac{dy}{dx}$ seinen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ setzen, begehn wir hier jedoch einen positiven Fehler, denn $\frac{0}{0}$ hier nur gefunden als symbolisches Äquivalent des realen Werts $f'(x)$, und als solches ist es festgehalten im Ausdruck $\frac{dy}{dx}$, also auch in $dy = f'(x)\,dx$.

а так как $y^2 = ax$, [то это]

$$= \frac{2ax}{a} = 2x,$$

что является значением *подкасательной* обыкновенной параболы Таким образом, она равна удвоенной *абсциссе*. Но если мы обозначим подкасательную через τ, то общее уравнение $y\frac{dx}{dy} = \tau$ дает лишь $y\,dx = \tau\,dy$. С точки зрения дифференциального исчисления вопрос поэтому чаще всего ставился так (за исключением Лагранжа): найти реальное значение для $\frac{dy}{dx}$.

Может показаться, что эта трудность выявляется уже, если мы подставим вместо $\frac{dy}{dx}$ и т. д. их первоначальную форму $\frac{0}{0}$; тогда

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

примет вид

$$\frac{0}{0} = z \cdot \frac{0}{0} + u \cdot \frac{0}{0}$$

— уравнение правильное, но ни к чему не ведущее, тем более что эти три $\frac{0}{0}$ возникли из различных дифференциальных коэффициентов, от различия в происхождении которых больше ничего не осталось. Однако следует учесть:

1) Уже при первом изложении в случае одной независимой переменной мы получили сперва

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = f'(x), \text{ следовательно, } dy = f'(x)\,dx.$$

Но, так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}, \quad dy = 0 \quad \text{и} \quad dx = 0, \quad \text{следовательно,} \quad 0 = 0.$$

Заменяя обратно $\frac{dy}{dx}$ его неопределенным выражением $\frac{0}{0}$, мы совершаем здесь, однако, положительную ошибку, ибо $\frac{0}{0}$ найдено тут лишь как символический эквивалент реального значения $f'(x)$ и как таковой закреплено в выражении $\frac{dy}{dx}$, следовательно, также в $dy = f'(x)\,dx$.

2) $\frac{u_1-u}{x_1-x}$ wird $\frac{du}{dx}$ oder $\frac{0}{0}$, weil die Variable $x_1=x$ wird oder $x_1-x=0$; wir erhalten also sofort nicht 0, sondern $\frac{0}{0}$ für $\frac{u_1-u}{x_1-x}$; wir wissen aber im allgemeinen, dass $\frac{0}{0}$ jeden Wert haben kann, und dass es im bestimmten Fall den Spezialwert hat, der sich ergibt, sobald für u eine bestimmte Funktion von x tritt; wir sind also nicht nur berechtigt $\frac{du}{dx}$ für $\frac{0}{0}$ zu setzen, sondern müssen es tun, da $\frac{du}{dx}$ ebenso wie $\frac{dz}{dx}$ hier nur als Symbole für vorzunehmende Differentialoperationen figurieren. Solange wir [aber] bei dem Resultat

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

also

$$dy=z\,du+u\,dz,$$

stehenbleiben, bleiben auch $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, du, dz unbestimmte Werte, so gut wie das jeden Werts fähige $\frac{0}{0}$.

3) In der gewöhnlichen Algebra selbst kann $\frac{0}{0}$ als Form erscheinen für Ausdrücke, die einen Realwert haben, eben weil $\frac{0}{0}$ Symbol jeder Grösse sein kann. Sei z.B. gegeben $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, setzen wir $x=a$, so $x-a=0$ und $x^2=a^2$, daher $x^2-a^2=0$. Wir erhalten also

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{0}{0};$$

das Resultat soweit richtig; es beweist aber keineswegs, da $\frac{0}{0}$ jeden Wert haben kann, dass $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ keinen reellen Wert hat.

Zerlegen wir x^2-a^2 in seine Faktoren, so selbes $=(x+a)(x-a)$; also

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=(x+a)\cdot\frac{x-a}{x-a}=x+a;$$

als wenn $x-a=0$, so $x=a$, daher $x+a=a+a=2a$[38].

2) $\frac{u_1-u}{x_1-x}$ обращается в $\frac{du}{dx}$ или в $\frac{0}{0}$ потому, что x_1 становится равной x, или $x_1-x=0$, таким образом, мы сразу получаем для $\frac{u_1-u}{x_1-x}$ не 0, а $\frac{0}{0}$. Но мы знаем вообще, что $\frac{0}{0}$ может иметь любое значение и что в определенных случаях оно имеет специальное значение, получаемое, если вставить вместо u некоторую определенную функцию от x; значит, мы не только имеем право заменить $\frac{0}{0}$ через $\frac{du}{dx}$, но и должны это сделать, ибо как $\frac{du}{dx}$, так и $\frac{dz}{dx}$, фигурируют в данном случае лишь как символы подлежащих выполнению дифференциальных операций. [Но] покуда мы не идем дальше результата

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

следовательно,

$$dy=z\,du+u\,dz,$$

эти $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, du, dz остаются столь же неопределенными, как и могущее принимать любое значение $\frac{0}{0}$.

3) Даже в обыкновенной алгебре $\frac{0}{0}$ может появиться как форма для выражений, имеющих некоторое реальное значение, именно потому, что $\frac{0}{0}$ может быть символом любой величины. Пусть, например, дано $\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Положим, $x=a$, тогда $x-a=0$ и $x^2=a^2$, поэтому $x^2-a^2=0$. Мы получаем, следовательно,

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{0}{0};$$

до сих пор результат правилен, но, хотя $\frac{0}{0}$ и может иметь любое значение, неправильно было бы на этом основании утверждать, что $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ никакого реального значения не имеет.

Разложив x^2-a^2 на множители, получим $(x+a)(x-a)$; значит,

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=(x+a)\cdot\frac{x-a}{x-a}=x+a;$$

следовательно, если $x-a=0$, то $x=a$, и поэтому $x+a=a+a=2a$ [38].

Hätten wir in einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung das Glied $P\,(x - a)$, so wenn $x = a$, also $x - a = 0$, notwendig $P\,(x - a) = P \cdot 0 = 0$; ebenso, unter denselben Voraussetzungen, $P\,(x^2 - a^2) = 0$. Die Zersetzung von $x^2 - a^2$ in seine Faktoren $(x + a)(x - a)$ würde nichts daran ändern, denn

$$P\,(x+a)\,(x-a) = P\,(x+a) \cdot 0 = 0.$$

Daher folgt aber keineswegs, dass wenn vermittelst Gleichsetzung von $x = a$, das Glied $P \cdot \left(\frac{0}{0}\right)$ sich entwickelt hätte, sein Wert notwendigerweise $= 0$.

$\frac{0}{0}$ kann jeden Wert haben, weil $\frac{0}{0} = X$ stets $0 = X \cdot 0 = 0$ liefert; aber weil $\frac{0}{0}$ jeden Wert haben kann, hat es eben nicht notwendig den Wert 0, und wenn wir seine Herkunft kennen, ist, sobald sich ein realer Wert dahinter versteckt, dieser auch auffindbar.

So zum Beispiel $P \cdot \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, wenn $x = a$, $x - a = 0$, also auch $x^2 = a^2$, $x^2 - a^2 = 0$; daher

$$P \cdot \frac{x^2 - a^2}{x - a} = P \cdot \frac{0}{0}.$$

Obgleich wir mathematisch ganz richtig dies Resultat erhalten, so wäre es aber nicht minder mathematisch falsch ohne weiteres anzunehmen, dass $P \cdot \frac{0}{0} = 0$, weil diese Voraussetzung einschlösse, dass $\frac{0}{0}$ notwendig keinen andern Wert als 0 haben kann und daher

$$P \cdot \frac{0}{0} = P \cdot 0.$$

Vielmehr wäre zu untersuchen, ob sich kein anderes Resultat ergibt durch Zersetzung von $x^2 - a^2$ in seine Faktoren $(x + a)(x - a)$; dies verwandelt in der Tat den Ausdruck in

$$P \cdot (x + a) \cdot \frac{x - a}{x - a} = P \cdot (x + a) \cdot 1,$$

und [wenn] $x = a$ in $P \cdot 2a$ oder in $2Pa$. Sobald wir also mit Variablen [39] rechnen, ist es um so mehr nicht nur berechtigt, sondern geboten, die

Если бы в обыкновенном алгебраическом уравнении имелся член вида $P\,(x-a)$, то при $x=a$, т. е. $x-a=0$, необходимо было бы $P(x-a)=P\cdot 0=0$; при тех же предположениях и $P\,(x^2-a^2)=0$. Разложение x^2-a^2 на множители $(x+a)\,(x-a)$ не внесло бы в это никаких изменений, ибо

$$P\,(x+a)\,(x-a)=P\,(x+a)\cdot 0=0.$$

Отсюда, однако, отнюдь не следует, что если при полагании $x=a$ получается член вида $P\cdot\left(\frac{0}{0}\right)$, то его значение необходимо равно нулю. $\frac{0}{0}$ может иметь любое значение, так как $\frac{0}{0}=X$ всегда дает $0=X\cdot 0=0$; но именно потому, что $\frac{0}{0}$ может принимать любое значение, оно не должно непременно быть равным нулю, и если нам известно его происхождение, то, коль скоро за ним скрывается некоторое реальное значение, последнее также может быть найдено.

Так, например, $P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}$; если $x=a$, $x-a=0$ и, следовательно, также $x^2=a^2$, $x^2-a^2=0$, то

$$P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}=P\cdot\frac{0}{0}.$$

Хотя этот результат и получен математически вполне правильно, было бы, однако, математически не менее ложно без дальнейшего допустить, что $P\cdot\frac{0}{0}=0$, так как из этого предположения вытекало бы, что $\frac{0}{0}$ безусловно не может иметь иного значения, кроме нуля, и что, следовательно,

$$P\cdot\frac{0}{0}=P\cdot 0.$$

Более того, нужно было бы исследовать, не получится ли какой-либо другой результат при разложении x^2-a^2 на его множители $(x+a)\,(x-a)$; действительно, это разложение превращает данное выражение в

$$P\cdot(x+a)\cdot\frac{x-a}{x-a}=P\cdot(x+a)\cdot 1,$$

и [если] $x=a$, то и в $P\cdot 2a$ или в $2Pa$. Тем более, когда мы оперируем переменными [39], то не только правомерно, но и абсолютно необходимо закрепить происхождение $\frac{0}{0}$ посредством

Herkunft von $\frac{0}{0}$ durch die Differentialsymbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ etc. festzuhalten, nachdem wir ursprünglich bewiesen haben, dass sie entspringen als symbolisches Äquivalent der abgeleiteten Funktionen von Variablen, die bestimmte Differentiationsprozesse [zu] durchlaufen haben. Sind sie so ursprünglich das Resultat solcher Differentiationsprozesse, so können sie eben darum *umgekehrt* [zu] Symbolen mit den Variablen erst vorzunehmender Prozesse werden, also [zu] *Operationssymbolen*, die statt als Resultate, als Ausgangspunkte figurieren, und dies ist ihr wesentlicher Dienst im Differentialcalcul. Als solche Operationssymbole können sie selbst zum Inhalt der Gleichungen zwischen den verschiednen Variablen werden (bei implizierten Funktionen steht von vornherein auf der rechten Seite [der Gleichung] 0 und die abhängige wie unabhängige Variablen mit ihren Koeffizienten auf der linken).

So in der Gleichung, die wir erhalten:

$$\frac{d(uz)}{dx} \text{ oder } \frac{'dy}{dx} = \frac{z\,du}{dx} + \frac{u\,dz}{dx}.$$

Von dem früher Gesagten abgesehen, erscheinen hier die von x abhängigen Funktionen z und u selbst unverändert als z und u wieder; aber jede derselben ausgestattet mit dem symbolischen Differentialkoeffizienten der andern als Faktor.

Die Gleichung hat also nur den Wert einer allgemeinen Gleichung, die durch Symbole anzeigt, welche Operationen vorzunehmen, sobald u und z respektiv, als abhängige Variable, zwei bestimmte Funktionen von x, gegeben sind.

Nur sobald [wir] bestimmte Funktionen von [x] haben für u und z, kann $\frac{du}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ und $\frac{dz}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ und daher auch $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ zu 0 werden, also der Wert von $\frac{0}{0}=0$ kann nicht präsumiert werden, sondern müsste sich aus den bestimmten Funktionsgleichungen selbst ergeben.

Wäre z. B. $u = x^3 + ax^2$, so

$$\left(\frac{0}{0}\right) = \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax, \qquad \left(\frac{0}{0}\right)_2 = \frac{d^3u}{dx^3} = 6,$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)_1 = \frac{d^2u}{dx^2} = 6x + 2a, \qquad \left(\frac{0}{0}\right)_3 = \frac{d^4u}{dx^4} = 0,$$

also $\frac{0}{0}$ in diesem Fall $= 0$.

дифференциальных символов $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ и т. д., после того как мы предварительно доказали, что они возникают в качестве символических эквивалентов для производных функций от переменных, подвергшихся определенным процессам дифференцирования. Таким образом, если первоначально они представляют собой результат пройденных процессов дифференцирования, то именно в силу этого они могут играть и *обратную* роль — символов тех операций, которым еще только полагается подвергнуть переменные, т. е. *оперативных символов*, фигурирующих уже не как результат, а как исходный пункт,— и в этом и состоит их существенная роль в дифференциальном исчислении. В качестве подобных оперативных символов они сами могут стать содержанием уравнений между различными переменными (в случае неявных функций на правой стороне [уравнения] с самого начала стоит 0, а все зависимые и независимые переменные с их коэффициентами находятся на левой).

Так и обстоит дело в уравнении, которое мы получаем:

$$\frac{d\,(uz)}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{z\,du}{dx} + \frac{u\,dz}{dx}.$$

Если отвлечься от ранее сказанного, зависимые от x функции z и u появляются здесь сами неизмененными снова как z и u, но каждая из них наделена в качестве множителя символическим дифференциальным коэффициентом другой.

Это уравнение имеет, следовательно, значение лишь некоторого общего уравнения, указывающего посредством символов, какие операции нужно выполнить, если u и z даны соответственно как зависимые переменные двумя определенными функциями от x.

Лишь когда u и z суть [некоторые] определенные функции от [x], выражения $\frac{du}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ и $\frac{dz}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ и, следовательно, также $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ могут обратиться в 0, т. е. значение $\frac{0}{0}=0$ не может быть заранее предвосхищено, а должно само явиться следствием определенных уравнений, выражающих функциональную зависимость.

Если, например, $u=x^3+ax^2$, то

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{du}{dx}=3x^2+2ax, \qquad \left(\frac{0}{0}\right)_2=\frac{d^3u}{dx^3}=6,$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)_1=\frac{d^2u}{dx^2}=6x+2a, \qquad \left(\frac{0}{0}\right)_3=\frac{d^4u}{dx^4}=0,$$

т. е. в этом случае $\frac{0}{0}=0$.

Das Kurze und Lange von der Geschichte ist, dass wir hier vermittelst der Differentiation selbst die *Differentialkoeffizienten in ihrer symbolischen Form als Resultat* erhalten, als Werte [des Symbols $\frac{dy}{dx}$ in] der Differentialgleichung, nämlich in der Gleichung

$$\frac{d(uz)}{dx} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Nun wissen wir aber, dass $u =$ einer bestimmten Funktion von x, z. B. $f(x)$. Daher $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$, in seinem Differentialsymbol $\frac{du}{dx}$ ist gleich $f'(x)$, erster abgeleiteten Funktion von $f(x)$. Ebenso $z = \varphi(x)$ z. B., und so ebenfalls $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$, ditto — von $\varphi(x)$. Nun liefert uns aber die Originalgleichung selbst weder u noch z in irgendeiner bestimmten Funktion von x, wie wäre z. B.

$$u = x^m, \quad z = \sqrt{x}.$$

Sie liefert uns nur u und z als allgemeine Ausdrücke für jede 2 beliebige Funktionen von x, deren Produkt zu differenzieren ist.

Die Gleichung besagt, dass, wenn ein Produkt irgend zweier Funktionen von x, vorgestellt durch uz, zu differenzieren ist, erst für den symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$ der entsprechende Realwert zu finden, d. h. die erste abgeleitete Funktion say of $f(x)$, und dieser Wert zu multiplizieren mit $\varphi(x) = z$; dann der Realwert von $\frac{dz}{dx}$ ebenso zu finden und zu multiplizieren mit $f(x) = u$; endlich die zwei so erhaltnen Produkte zu addieren. Die Operationen des Differentialcalculs sind hier bereits als bekannt unterstellt.

Die Gleichung ist also nur eine symbolische Andeutung von vorzunehmenden Operationen, und die symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ werden hier zugleich zu Symbolen, der in jedem konkreten Fall erst zu vollziehenden Differentialoperationen, während sie ursprünglich selbst abgeleitet wurden als symbolische Formeln bereits vollzogner Differentialoperationen.

Sobald sie diesen Charakter angenommen, können sie selbst zum Inhalt der Differentialgleichungen werden, wie z. B. im *Taylorschen Theorem*:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \text{etc.}$$

Сущность всей этой истории состоит в том, что мы здесь посредством самого дифференцирования получаем *дифференциальные коэффициенты в их символической форме как результат*, как значения [символа] $\frac{dy}{dx}$ в дифференциальном уравнении, именно в уравнении

$$\frac{d\,(uz)}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\,\frac{dz}{dx}.$$

Но мы знаем, что $u =$ некоторой определенной функции от x, например $f(x)$. Поэтому $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ в его дифференциальном символе $\frac{du}{dx}$ равно $f'(x)$, т. е. первой производной функции от $f(x)$. Точно так же $z = \varphi(x)$, например, и поэтому равным образом $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$, т. е. первой производной функции от $\varphi(x)$. Но само первоначальное уравнение не дает нам ни u, ни z в виде какой-нибудь определенной функции от x, как было бы, например, $u = x^m$, $z = \sqrt{x}$.

Оно дает u и z лишь как общие выражения для любых двух функций от x, произведение которых нужно дифференцировать.

Это уравнение говорит, что если требуется продифференцировать представленное выражением uz произведение каких-нибудь двух функций от x, то следует сперва найти соответствующее реальное значение символического дифференциального коэффициента $\frac{du}{dx}$, т. е. первую производную функцию, скажем, от $f(x)$, и помножить это значение на $\varphi(x) = z$, затем найти таким же образом реальное значение $\frac{dz}{dx}$ и помножить его на $f(x) = u$, наконец, сложить оба полученных таким образом произведения. Операции дифференциального исчисления предполагаются здесь уже известными.

Таким образом, данное уравнение есть лишь символическое указание подлежащих выполнению операций, а символические дифференциальные коэффициенты $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ становятся тут вместе с тем символами дифференциальных операций, которые лишь предстоит еще выполнить в каждом конкретном случае, тогда как первоначально они сами были выведены как символические формулы уже выполненных дифференциальных операций.

Коль скоро они приняли такой характер, они сами могут стать содержанием дифференциальных уравнений, как, например, в *теореме Тейлора*:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \text{ и т. д.}$$

Dies sind dann aber auch nur allgemeine, symbolische Operationsgleichungen. Das Interessante an diesem Falle der Differentiation von uz ist daher, dass es der einfachste, worin sich im Unterschied zu der Entwicklung der Fälle, wo die unabhängige Variable x bloss eine abhängige Variable y hat, durch Anwendung der ursprünglichen Methode selbst die Differentialsymbole auch auf der rechten Seite der Gleichung (ihrem Entwicklungsausdrucks) [sich] einstellen, daher zugleich als Operationssymbole auftreten und als solche zum Inhalt der Gleichung selbst werden.

Diese Rolle, worin sie zu verrichtende Operationen anzeigen und daher als Ausgangspunkt dienen, ist ihre eigentliche Rolle im bereits auf eignem Boden sich bewegenden Differentialcalcul, aber es ist sicher, dass dieser Umschlag, diese Umkehrung der Rollen, von keinem Mathematiker berücksichtigt und noch weniger durch eine ganz elementare Differentialgleichung als notwendig nachgewiesen worden. Es wird nur als Tatsache erwähnt, dass während die Entdecker des Differentialcalculus und das Gros ihrer Nachfolger die Differentialsymbole zum Ausgangspunkt des Calculs machen, Lagrange umgekehrt die algebraische Ableitung [40] der wirklichen Funktionen der unabhängigen Variablen zum Ausgangspunkt macht und die Differentialsymbole zu bloss symbolischen Ausdrücken der bereits abgeleiteten Funktionen macht.

Kehren wir noch einmal zu $d\,(uz)$ zurück, so haben wir zunächst als Produkt der Setzung von $x_1 - x = 0$, als Produkt der Differentialoperation selbst erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Da die Nenner hier dieselben, so erhalten wir als reduzierten Ausdruck

$$dy = z\,du + u\,dz.$$

Dies entspricht dem, dass im Fall bloss einer abhängigen Variablen wir erhielten als symbolischen Ausdruck der abgeleiteten Funktion von x, der $f'(x)$ (z. B. von max^{m-1}, was $f'(x)$, wenn $ax^m = f(x)$), auf der linken Seite $\frac{dy}{dx}$ als ihren symbolischen Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und erst als Resultat hiervon

$$dy = f'(x)\,dx$$

Но в таком случае это уже тоже лишь общие символические оперативные уравнения. Дифференцирование uz представляет интерес потому, что это простейший случай, в котором — в отличие от развертывания таких случаев, где независимая переменная x имеет только одну зависимую от нее переменную y,— самое применение первоначального метода ведет к появлению дифференциальных символов и на правой стороне уравнения (его развертывающегося выражения), здесь они поэтому выступают одновременно как оперативные символы и как таковые становятся содержанием самого уравнения.

Эта роль, в которой они указывают подлежащие выполнению операции и поэтому служат исходным пунктом, есть присущая им роль в действующем уже на собственной почве дифференциальном исчислении; но не подлежит сомнению, что на этот поворот, на это оборачивание ролей никто из математиков не обратил внимания, и тем более никто из них не доказал необходимость этого на каком-либо совершенно элементарном дифференциальном уравнении. Упоминается лишь как факт, что, между тем как изобретатели дифференциального исчисления и большинство их последователей делают дифференциальные символы исходным пунктом исчисления, Лагранж, наоборот, берет за исходный пункт алгебраический вывод реальных [40] функций независимых переменных, а дифференциальные символы делает чисто символическими выражениями произведенных функций.

Возвращаясь еще раз к $d(uz)$, мы получаем сначала в результате полагания $x_1 - x = 0$, в результате самой дифференциальной операции:

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Так как знаменатели здесь одни и те же, то мы получаем в качестве приведенного выражения

$$dy = z\,du + u\,dz.$$

Это соответствует тому, что в случае одной лишь зависимой переменной мы получили в качестве символического выражения для производной функции от x, т. е. для $f'(x)$ (например, для max^{m-1}, которое есть $f'(x)$, если $ax^m = f(x)$), на левой стороне $\frac{dy}{dx}$ как ее символическое выражение

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

и лишь как результат отсюда

$$dy = f'(x)\,dx$$

$\left(\text{z. B. } \frac{dy}{dx} = max^{m-1};\ dy = max^{m-1}\,dx,\right.$ welches das Differential of function $\left.y\right)$ $\left(\text{letzteres können wir gleich wieder umwandeln in } \frac{dy}{dx} = \right.$ $\left.= max^{m-1}\right)$. Aber der Fall

$$dy = z\,du + u\,dz$$

unterscheidet sich wieder dadurch, dass die Differentialen du, dz hier auf der rechten Seite als Operationssymbole stehn, und dass erst nach Verrichtung der Operationen, die sie anzeigen, dy bestimmt ist. Wenn

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad z = \varphi(x),$$

so wissen wir, dass wir für du erhalten

$$du = f'(x)\,dx$$

und für [dz]

$$dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Also:

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Im ersten Fall also erst der Differentialkoeffizient

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

gefunden und dann das Differential

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Im zweiten erst das Differential dy und dann der Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx}$. Im ersten Fall, wo die Differentialsymbole selbst erst aus den mit der $f(x)$ vorgehenden Operationen entspringen, muss erst die abgeleitete Funktion, der wirkliche Differentialkoeffizient gefunden sein, damit ihm als sein symbolischer Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ gegenübertrete, und erst nachdem er gefunden, kann davon abgeleitet werden das Differential $dy = f'(x)\,dx$.

Umgekehrt in $dy = z\,du + u\,dz$.

$\Big($например, $\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$; $dy = max^{m-1}\,dx$, что и есть дифференциал функции $y\Big)$ $\Big($последний мы можем сразу же превратить обратно в $\frac{dy}{dx} = max^{m-1}\Big)$. Но случай

$$dy = z\,du + u\,dz$$

отличается еще тем, что дифференциалы du, dz стоят здесь на правой стороне как оперативные символы и dy определяется лишь после выполнения указанных ими операций.
Если

$$u = f(x) \quad \text{и} \quad z = \varphi(x),$$

то мы знаем, что для du мы получаем

$$du = f'(x)\,dx,$$

а для [dz]

$$dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Таким образом, в первом случае сначала был получен дифференциальный коэффициент

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

а затем уже дифференциал

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Во втором — сначала дифференциал dy, а затем дифференциальный коэффициент $\frac{dy}{dx}$. В первом случае, где сами дифференциальные символы появляются лишь из выполняемых над $f(x)$ операций, должна быть сперва найдена производная функция — реальный дифференциальный коэффициент, чтобы навстречу ему выступило $\frac{dy}{dx}$, как его символическое выражение, и лишь после того, как он найден, может быть выведен дифференциал $dy = f'(x)\,dx$.

Наоборот, в $dy = z\,du + u\,dz$.

Da du, dz hier als Operationssymbole figurieren und zwar Operationen andeuten, deren Ausführung wir bereits aus dem Differentialcalcul kenne so, um den Realwert von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, müssen wir erst in jedem konkreten Fall für u seinen Wert in x und für z ditto seinen Wert in x setzen, um zu finden

$$dy = \varphi(x) f'(x)\, dx + f(x) \varphi'(x)\, dx;$$

dann ergibt erst die Division durch dx den Realwert von

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) f'(x) + f(x) \varphi'(x).$$

Was für $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc., gilt für alle komplizierteren Formeln, wo die *Differentialsymbole* selbst als Inhalt allgemeiner symbolischer Operationsgleichungen erscheinen.

Так как du, dz фигурируют здесь как оперативные символы, и притом указывающие на такие операции, выполнению которых мы уже научились в дифференциальном исчислении, то для отыскания реального значения $\frac{dy}{dx}$ мы должны сначала в каждом конкретном случае заменить u и z их значениями в x, чтобы найти

$$dy = \varphi(x) f'(x)\, dx + f(x)\, \varphi'(x)\, dx,$$

и лишь дальнейшее деление на dx дает нам реальное значение для

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) f'(x) + f(x)\, \varphi'(x).$$

То же, что для $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д., имеет место и для всех более сложных формул, где сами *дифференциальные символы* появляются как содержание общих символических оперативных уравнений.

* ZWEITER ENTWURF [41]

[I]

. . . .

Wir gingen von der algebraischen Ableitung von $f'(x)$ aus, um dadurch zugleich ihren symbolischen Differentialausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ in seinem Ursprung nachzuveisen, und so auch dessen Sinn zu entdecken. Wir müssen jetzt umgekehrt, von den symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ als gegebnen Formeln ausgehn, um die ihnen respektiv entsprechenden realen Äquivalente $f'(x)$, $\varphi'(x)$ zu finden. Und zwar sind diese verschiednen Behandlungsweisen des Differentialcalculs, die von entgegengesetzten Polen ausgehn — und zwei verschiedne historische Schulen charakterisieren —, hier nicht entsprungen aus Änderung unserer subjektiven Methode, sondern aus der Natur der zu behandelnden Funktion uz. Wir behandelten sie, wie die Funktionen x mit nur einer abhängigen Variablen, indem wir vom Pol auf der rechten Seite ausgingen und mit dieser algebraisch operierten. Ich glaube nicht, dass irgendein Mathematiker, sei es an einer so elementaren Funktion wie uz, sei es an irgendeiner andern, diesen notwendigen Umschlag aus der ersten Methode der algebraischen Ableitung (historisch die zweite) nachgewiesen oder vielmehr wahrgenommen hat. Dazu waren sie zu sehr mit in der Materie des Calculus absorbiert.

In der Tat finden wir, dass in der Gleichung

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ ganz ebenso wieder entsprungen aus der Ableitung, die rechts mit uz vorging, wie vorher bei Funktionen x mit einer abhängigen

* ВТОРОЙ НАБРОСОК [41]

[I]

. . . .

Мы исходили из алгебраического вывода $f'(x)$, чтобы этим путем выявить происхождение ее символического дифференциального выражения $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$ и одновременно раскрыть таким образом его смысл. Теперь мы должны, наоборот, исходить из символических дифференциальных коэффициентов $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ как данных формул, чтобы найти соответствующие им реальные эквиваленты $f'(x)$, $\varphi'(x)$. И притом эти различные способы трактовки дифференциального исчисления, исходящие из противоположных полюсов и представляющие две различные исторические школы, здесь возникают не из изменения нашего субъективного метода, а из природы подлежащей рассмотрению функции uz. Мы обращались с нею так же, как с функциями x с одной лишь зависимой переменной, когда мы исходили из полюса на правой стороне и алгебраически над ней оперировали. Я не думаю, чтобы какой-нибудь математик — на столь элементарной функции, как uz, или на какой бы то ни было другой — доказал или хотя бы заметил необходимость этого перехода от первого, алгебраического метода (исторически второго). Для этого они были слишком поглощены материалом исчисления.

На самом деле мы видим, что в уравнении

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ совершенно так же возникло из процесса вывода, происходившего справа над uz, как это раньше имело место для функций x

Variablen; aber anderseits die Differentialsymbole $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ dem $f'(x)$ oder der ersten aus uz Abgeleiteten selbst wieder einverleibt, und bilden daher Elemente des Äquivalents von $\frac{dy}{dx}$.

Die symbolischen Differentialkoeffizienten sind so selbst ihrerseits bereits zum *Gegenstand* oder *Inhalt* der Differentialoperation geworden, statt wie vorher nur als symbolisches Resultat derselben zu figurieren.

Mit diesen beiden Punkten, *erstens*, dass symbolische Differentialkoeffizienten gleich den Variablen ihrerseits selbst wieder zum inhaltlichen Element der Ableitung werden, zu *Gegenständen* von Differentialoperationen, *zweitens*, dass die Fragestellung sich umdreht, indem statt des symbolischen Ausdrucks für die realen Differentialkoeffizienten ($f'(x)$), der reale Differentialkoeffizient für seinen symbolischen Ausdruck zu finden,— mit diesen beiden Punkten ist der dritte gegeben, dass statt als symbolisches Resultat der mit der wirklichen Funktion x vorgegangnen Differentiationsoperationen zu erscheinen, umgekehrt die symbolischen Differentialausdrücke nun die Rolle von Symbolen spielen, die mit der wirklichen Funktion x erst zu verrichtende Differentiationsoperationen anzeigen; dass sie also zu *Operationssymbolen* werden.

In unserem Fall, wo

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

könnten wir nur weiter operieren, wenn wir nicht nur wüssten, dass z und u beide Funktionen von x sind, sondern wenn, wie

$$y = x^m,$$

für u und z wirkliche Werte in x gegeben wären, wie z. B.

$$u = \sqrt{x}, \qquad z = x^3 + 2ax^2.$$

Und so stehn in der Tat $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ als Anzeiger von Operationen, deren Ausführungsweise für jede beliebige Funktion von x, die an die Stelle von u und z gesetzt werden, als bekannt vorausgesetzt ist.

c) Die gefundne Gleichung ist nicht nur symbolische Operationsgleichung, sondern bloß vorbereitende symbolische Operationsgleichung.

Da in

$$[\mathrm{I})] \qquad \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

с одной зависимой переменной, но, с другой стороны, в самое $f'(x)$, или первую производную от uz, в свою очередь оказались включенными дифференциальные символы $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, являющиеся в силу этого элементами эквивалента для $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, сами символические дифференциальные коэффициенты в свою очередь стали уже *предметом* или *содержанием* дифференциальной операции вместо того, чтобы по-прежнему фигурировать лишь в качестве символического ее результата.

Наряду с этими двумя моментами — *во-первых*, с тем, что символические дифференциальные коэффициенты наравне с переменными сами в свою очередь становятся содержательным элементом вывода, *объектами* дифференциальных операций, *во-вторых*, с тем, что оборачивается постановка вопроса, поскольку вместо того, чтобы искать символическое выражение для реальных дифференциальных коэффициентов (для $f'(x)$), ищется реальный дифференциальный коэффициент для его символического выражения,— наряду с этими двумя моментами дан и третий. Именно символические дифференциальные выражения появляются уже не как символический результат совершенных над реальной функцией x дифференциальных операций, а, наоборот, играют теперь роль символов, указывающих на дифференциальные операции, которые должны быть выполнены над реальной функцией x, т. е. становятся, таким образом, *оперативными символами*.

В нашем случае, где

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

мы могли бы оперировать далее, лишь если бы не только знали, что z и u обе являются функциями от x, но и если бы, как в случае $y=x^m$, для u и z были даны реальные значения в x, как, например,

$$u=\sqrt{x},\qquad z=x^3+2ax^2.$$

Итак, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ играют на самом деле роль указателей операций, способ выполнения которых предполагается известным для любых таких функций от x, которые подставляются вместо u и z.

с) Полученное уравнение есть не просто символическое оперативное уравнение, но лишь подготовительное символическое оперативное уравнение.

Так как в

[I)] $$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

der Nenner dx sich in allen Gliedern auf beiden Seiten befindet, so ist ihr reduzierter Ausdruck:

II) dy oder $d(uz) = z\,du + u\,dz$.

Unmittelbar besagt diese Gleichung, dass, wenn ein Produkt zweier beliebiger Variablen (und in weiterer Anwendung dies verallgemeinbar für Produkt jeder beliebiger Anzahl von Variablen) zu differenzieren ist, jeder der beiden Faktoren mit dem Differential des andern Faktors zu multiplizieren und die so erhaltnen zwei Produkte zu addieren sind.

Die erste Operationsgleichung

$$\frac{dy}{dx} = z\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{dz}{dx}$$

wird also, wenn das Produkt zweier beliebiger Variablen zu differenzieren war, als vorbereitende Gleichung überflüssig, nachdem sie ihren Dienst geleistet, nämlich den eine allgemeine symbolische Operationsformel zu liefern, die direkt zum Ziel führt.

Und hier ist zu bemerken, dass das Verfahren der ursprünglichen algebraischen Ableitung wieder in sein Gegenteil umgeschlagen ist. Wir erhielten dort erst

$$\Delta y = y_1 - y$$

als entsprechendes Symbol für $f(x_1) - f(x)$, beides $[f(x_1)$ und $f(x)]$ gewöhnliche algebraische Ausdrücke (da $f(x)$ wie $f(x_1)$ als bestimmte algebraische Funktionen von x gegeben waren). Dann stellte sich $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ dar in $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, darauf $f'(x)$ (die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$) in $\frac{dy}{dx}$, und erst aus der Schlussgleichung des Differentialkoeffizienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

erhielten wir das Differential

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Dagegen liefert uns die obige Gleichung [die] Differentiale dy, dz, du als Ausgangspunkte. So werden nämlich für u und z beliebige bestimmte, algebraische Funktionen von x gesetzt werden, die wir nur andeuten in

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad z = \varphi(x),$$

so wird

$$dy = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x),$$

знаменатель dx находится во всех членах на обеих сторонах, то приведенным выражением этого уравнения будет:

II) dy или $d(uz) = z\,du + u\,dz$.

Непосредственно это уравнение гласит, что если нужно дифференцировать произведение двух произвольных переменных (в дальнейшем применении это может быть обобщено на произведение любого числа переменных), то каждый из обоих множителей нужно помножить на дифференциал другого множителя и сложить полученные два произведения.

Первое оперативное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

становится, таким образом,— если требовалось дифференцировать произведение двух произвольных переменных — как подготовительное уравнение излишним, после того как оно выполнило свою роль, именно: дать общую символическую оперативную формулу, ведущую прямо к цели.

И здесь следует отметить, что способ первоначального алгебраического вывода снова превращается в свою противоположность. Там мы получили сначала $\Delta y = y_1 - y$ как символ, соответствующий $f(x_1) - f(x)$, где обе $[f(x_1)$ и $f(x)]$ суть обыкновенные алгебраические выражения (так как $f(x)$ и $f(x_1)$ были даны в виде определенных алгебраических функций от x). Далее $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ представлялось в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, затем $f'(x)$ (первая производная функция от $f(x)$) — в виде $\frac{dy}{dx}$, и лишь из заключительного уравнения для дифференциального коэффициента

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

мы получали дифференциал

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Напротив, полученное выше уравнение дает нам в качестве исходных пунктов дифференциалы dy, dz, du. Именно, если мы заменим u и z какими-либо определенными алгебраическими функциями от x, которые мы лишь обозначим

$$u = f(x) \quad \text{и} \quad z = \varphi(x),$$

то получим

$$dy = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x),$$

und diese d Zeichen zeigen nur zu verrichtende Differentiation an.

Das Resultat dieser Differentiation hat die allgemeine Form:

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

und

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

Also

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Endlich

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Hier, wo das Differential schon die Rolle eines fertigen Operationssymbols spielt, leiten wir also die Differentialkoeffizienten aus ihm ab, während in der ursprünglichen algebraischen Entwicklung umgekehrt das Differential aus der Gleichung der Differentialkoeffizienten hergeleitet ward.

Nehmen wir das *Differential* selbst, wie wir es in seiner einfachsten Form entwickelt, nämlich aus der Funktion vom ersten Grad:

$$y = ax, \qquad \frac{dy}{dx} = a;$$

daher das Differential

$$dy = a\,dx.$$

Die Gleichung dieser Differentiale scheint viel bedenklicher als die der Differentialkoeffizienten

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = a,$$

woraus sie abgeleitet.

Da $dy = 0$ und $dx = 0$, so $dy = a\,dx$ identisch mit $0 = 0$. Und dennoch sind wir vollständig berechtigt dy und dx für die verschwundenen, aber durch diese Symbole im Verschwinden fixierten Differenzen $y_1 - y$, $x_1 - x$ zu gebrauchen.

Solange wir bei dem Ausdruck

$$dy = a\,dx$$

oder allgemein

$$dy = f'(x)\,dx$$

и эти знаки d указывают лишь на подлежащее выполнению дифференцирование.

Результат этого дифференцирования имеет общий вид:

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

и

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Наконец,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Здесь, где дифференциал играет уже роль готового оперативного символа, мы выводим из него дифференциальные коэффициенты, в то время как в первоначальном алгебраическом развитии, наоборот, дифференциал был получен из уравнения для дифференциальных коэффициентов.

Рассмотрим самый *дифференциал*, как мы его получили в его простейшей форме, именно из функции первой степени:

$$y = ax, \qquad \frac{dy}{dx} = a;$$

отсюда дифференциал

$$dy = a\,dx.$$

Уравнение, связывающее эти два дифференциала, представляется гораздо более сомнительным, чем уравнение для дифференциального коэффициента

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = a,$$

из которого они выведены.

Так как $dy = 0$ и $dx = 0$, то $dy = a\,dx$ тождественно с $0 = 0$. И тем не менее мы имеем полное право употреблять dy и dx вместо исчезнувших, но зафиксированных в своем исчезновении при помощи этих символов разностей $y_1 - y$, $x_1 - x$.

Покуда мы не идем дальше выражения

$$dy = a\,dx$$

или вообще

$$dy = f'(x)\,dx,$$

stehnbleiben, ist er durchaus nichts, als eine andre Darstellung der Tatsache, dass

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

im obigen Fall $= a$ ist, worin wir ihn daher beständig wieder verwandeln können. Aber schon diese Umwandelbarkeit macht ihn zu einem Operationssymbol. Wir sehn sofort, dass wenn wir als Resultat von Differentiationsprozessen gefunden $dy = f'(x)\,dx$, wir beide Seiten nur durch dx zu dividieren haben, um $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, d. h. die Differentialkoeffiziente, zu finden.

So z. B. in $y^2 = ax$

$$d(y^2) = d(ax), \qquad 2y\,dy = a\,dx.$$

Letzte Gleichung von Differentialen liefert uns zwei Gleichungen von Differentialkoeffizienten, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}.$$

$2y\,dy = a\,dx$ liefert uns aber auch *unmittelbar* für dx den Wert $\frac{2y\,dy}{a}$, der z. B. in die allgemeine Formel der Subtangenten $y\frac{dx}{dy}$ gesetzt, und schliesslich $2x$, die doppelte Abszisse, als Wert der Subtangente der gewöhnlichen Parabel herstellen hilft.

II

Wir wollen jetzt ein Beispiel nehmen, wo zuerst die symbolischen Ausdrücke als fertige Operationsformeln des Calculs dienen, daher auch für den symbolischen Differentialkoeffizienten sein Realwert gefunden wird, dann aber die umgekehrte elementare algebraische Darstellung folgen lassen.

1) Die abhängige Funktion y und die unabhängige Variable x seien nicht verbunden in einer einzigen Gleichung, sondern so, dass y in einer ersten Gleichung direkt als Funktion der Variablen u figuriert, u aber in einer zweiten Gleichung direkt als Funktion der Variablen x. Aufgabe: *zu finden den Realwert des symbolischen Differentialkoeffizienten* $\frac{dy}{dx}$.

Sei

a) $y = f(u)$, b) $u = \varphi(x)$.

оно есть не что иное, как лишь некоторая другая запись того факта, что

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

— в нашем случае $=a$,— почему мы всегда имеем возможность снова превратить его в эту последнюю форму. Но уже эта способность к превращению делает его оперативным символом. Мы видим сразу, что, если мы нашли как результат процессов дифференцирования $dy=f'(x)\,dx$, нам нужно лишь поделить обе части на dx, чтобы найти $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, т. е. дифференциальные коэффициенты.

Так, например, в $y^2=ax$

$$d(y^2)=d(ax), \qquad 2y\,dy=a\,dx.$$

Последнее уравнение для дифференциалов дает нам два уравнения для дифференциальных коэффициентов, именно:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{2y}{a}.$$

Но $2y\,dy=a\,dx$ дает нам также и *непосредственно* для dx значение $\frac{2y\,dy}{a}$, которое, например, будучи подставлено в общую формулу подкасательной $y\frac{dx}{dy}$, помогает нам получить окончательно $2x$, удвоенную абсциссу, в качестве значения для подкасательной обыкновенной параболы.

II

Возьмем теперь пример, в котором символические выражения сперва служат готовыми оперативными формулами исчисления и, следовательно, отыскивается реальное значение символического дифференциального коэффициента, а вслед за этим дадим противоположное элементарное алгебраическое изложение.

1) Пусть зависимая функция y и независимая переменная x будут связаны не одним-единственным уравнением, а так, что y фигурирует в некотором первом уравнении непосредственно как функция переменной u, а u — в некотором втором уравнении непосредственно как функция переменной x. Задача: *найти реальное значение символического дифференциального коэффициента* $\frac{dy}{dx}$.

Пусть

a) $y=f(u)$, b) $u=\varphi(x)$.

Zunächst 1) $y = f(u)$ gibt:

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du} = f'(u).$$

2) $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)\,dx}{dx} = \varphi'(x).$

Also

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Aber

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Also

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Beispiel. Wenn a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$, so nach der Formel

$$\frac{dy}{du} = \frac{d(3u^2)}{du} = 6u \quad (= f'(u));$$

aber die Gleichung b) gibt $u = x^3 + ax^2$. Setzen wir diesen Wert von u in $6u$, so

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) \quad (= f'(u)).$$

Ferner:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax \quad (= \varphi'(x)).$$

Also

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) \quad (= f'(u) \cdot \varphi'(x)).$$

2) Wir nehmen jetzt für Ausgangsgleichungen die im letzten Beispiel enthaltnen Gleichungen, um sie jetzt in der ersten algebraischen Weise zu entwickeln.

a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$.

Da $y = 3u^2$, [so] $y_1 = 3u_1^2$, und

$$y_1 - y = 3(u_1^2 - u^2) = 3(u_1 - u)(u_1 + u).$$

Daher

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = 3(u_1 + u).$$

Сперва 1) $y = f(u)$ дает:

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du} = f'(u).$$

2) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d\varphi(x)}{dx} = \dfrac{\varphi'(x)\,dx}{dx} = \varphi'(x).$

Следовательно,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Но

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx};$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Пример. Если a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$, то, по формуле,

$$\frac{dy}{du} = \frac{d(3u^2)}{du} = 6u \quad (= f'(u));$$

но уравнение b) дает $u = x^3 + ax^2$. Если мы вставим это значение u в $6u$, то

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) \quad (= f'(u)).$$

Далее,

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax \quad (= \varphi'(x)).$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) \quad (= f'(u) \cdot \varphi'(x)).$$

2) Возьмем теперь в качестве исходных уравнения, содержащиеся в последнем примере, чтобы развить их теперь по первому, алгебраическому способу.

a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$.

Так как $y = 3u^2$, [то] $y_1 = 3u_1^2$ и

$$y_1 - y = 3(u_1^2 - u^2) = 3(u_1 - u)(u_1 + u).$$

Отсюда

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = 3(u_1 + u).$$

Wird nun $u_1 - u = 0$, also $u_1 = u$, so verwandelt sich $3(u_1 + u)$ in $3(u + u) = 6u$.

Setzen wir in u seinen Wert aus Gleichung b), so

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2).$$

Ferner: da

$$u = x^3 + ax^2, \quad \text{[so]} \quad u_1 = x_1^3 + ax_1^2;$$

also

$$u_1 - u = (x_1^3 + ax_1^2) - (x^3 + ax^2) = (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2),$$
$$u_1 - u = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x);$$

also

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = (x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 + x).$$

Wird nun $x_1 - x = 0$, also $x_1 = x$, so

$$x_1^2 + x_1 x + x^2 = 3x^2$$

und

$$a(x_1 + x) = 2ax.$$

Also:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Multiplizieren wir nun die beiden Funktionen der rechten Seite, so erhalten wir

$$6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax),$$

und dem entspricht auf der linken Seite

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

also wie vorher.

Um den Unterschied der Entwicklung klarer hervortreten zu lassen, werden wir die bestimmten Funktionen der Variablen auf die linke Seite und die von ihr abhängigen Funktionen auf die rechte Seite stellen, da man von den allgemeinen Gleichungen her, wo auf der rechten nur 0 steht, gewohnt ist, die Initiative sich auf der linken Seite zu denken. Also:

a) $3u^2 = y$; b) $x^3 + ax^2 = u$.

Da

$$3u^2 = y, \quad 3u_1^2 = y_1,$$

Если теперь положить $u_1 - u = 0$ и, следовательно, $u_1 = u$, то $3(u_1 + u)$ превращается в $3(u + u) = 6u$.

Вставим вместо u его значение из уравнения b); тогда

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2).$$

Далее, так как

$$u = x^3 + ax^2, \quad [\text{то}] \quad u_1 = x_1^3 + ax_1^2;$$

следовательно,

$$u_1 - u = (x_1^3 + ax_1^2) - (x^3 + ax^2) = (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2),$$

$$u_1 - u = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x);$$

следовательно,

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = (x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 + x).$$

Если теперь положить $x_1 - x = 0$, следовательно, $x_1 = x$, то

$$x_1^2 + x_1 x + x^2 = 3x^2$$

и

$$a(x_1 + x) = 2ax.$$

Следовательно,

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Перемножив теперь обе функции правой стороны, получим

$$6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax),$$

чему соответствует на левой стороне

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

т. е. то же, что и прежде.

Чтобы яснее выступило различие в способе вывода, мы поместим определенные функции переменной на левой стороне, а зависимые от нее функции на правой, так как благодаря общим уравнениям, где справа стоит лишь нуль, мы привыкли мыслить инициативу на левой стороне. Следовательно:

a) $3u^2 = y$, b) $x^3 + ax^2 = u$.

Так как

$$3u^2 = y, \qquad 3u_1^2 = y_1,$$

also

$$3(u_1^2 - u^2) = y_1 - y$$

oder

$$3(u_1 - u)(u_1 + u) = y_1 - y,$$

also

$$3(u_1 + u) = \frac{y_1 - y}{u_1 - u}.$$

Wird nun $u_1 = u$, also $u_1 - u = 0$, so erhalten [wir]

$$3(u + u) \text{ oder } 6u = \frac{dy}{du}.$$

Setzen wir in $6u$ seinen Wert aus Gleichung b), so

$$6(x^3 + ax^2) = \frac{dy}{du}.$$

Ferner, wenn

$$x^3 + ax^2 = u,$$

so

$$x_1^3 + ax_1^2 = u_1$$

und

$$x_1^3 + ax_1^2 - x^3 - ax^2 = u_1 - u;$$

also

$$(x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) = u_1 - u.$$

Lösen wir weiter in Faktoren auf:

$$(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x) = u_1 - u.$$

Daher

$$(x_1^2 + x_1 x + x^2) + a(x_1 + x) = \frac{u_1 - u}{x_1 - x};$$

wird nun $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$, so

$$3x^2 + 2ax = \frac{du}{dx}.$$

Multiplizieren wir die 2 abgeleiteten Funktionen miteinander,

$$6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) = \frac{dy}{dx},$$

und wenn wir umstellen in die herkömmliche Ordnung:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax).$$

то

$$3(u_1^2-u^2)=y_1-y$$

или

$$3(u_1-u)(u_1+u)=y_1-y,$$

следовательно,

$$3(u_1+u)=\frac{y_1-y}{u_1-u}.$$

Если теперь $u_1=u$ и, следовательно, $u_1-u=0$, то получаем

$$3(u+u) \text{ или } 6u=\frac{dy}{du}.$$

Вставим в $6u$ значение u из уравнения b), тогда

$$6(x^3+ax^2)=\frac{dy}{du}.$$

Далее, если

$$x^3+ax^2=u,$$

то

$$x_1^3+ax_1^2=u_1$$

и

$$x_1^3+ax_1^2-x^3-ax^2=u_1-u;$$

следовательно,

$$(x_1^3-x^3)+a(x_1^2-x^2)=u_1-u.$$

Разложим на множители:

$$(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1-x)(x_1+x)=u_1-u.$$

Отсюда

$$(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1+x)=\frac{u_1-u}{x_1-x};$$

когда $x_1=x$, следовательно, $x_1-x=0$, то

$$3x^2+2ax=\frac{du}{dx}.$$

Перемножив обе производные функции, получим:

$$6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax)=\frac{dy}{dx},$$

и, переставляя в обычном порядке,

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}=6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax).$$

Es versteht sich von selbst, dass, infolge ihrer Weitläufigkeit und der oft schwierigen Zerlegung der ersten Differenz $f(x_1) - f(x)$ in Glieder, deren jedes $x_1 - x$ zum factor hat, die letzte Methode als Rechnungsinstrument nicht vergleichbar neben der historisch ältest hergebrachten.

Andrerseits aber geht man in letztrer von dy, dx, $\frac{dy}{dx}$ als gegebnen Operationsformeln aus, während man sie in ersterer, und zwar auf rein algebraischer Weise entspringen sieht. Und weiter behaupte ich nichts. Und wie wird dort in [historisch] ersterer der Ausgangspunkt für die Differentialsymbole als Operationsformeln gewonnen? Entweder durch verhüllte oder unverhüllte metaphysische Voraussetzungen, die selbst wieder zu metaphysischen, unmathematischen Konsequenzen führen, also da ist die gewaltsame Unterdrückung gewisser, der Ableitung im Wege stehender und doch aus ihr selbst hervorgegangner Grössen.

Um nun ein historisches Beispiel des Ausgangs von den 2 entgegengesetzten Polen zu geben, stelle ich zusammen die Lösung des oben entwickelten Kasus $d(uz)$ durch Newton und Leibnitz einerseits, durch Lagrange andrerseits.

1) *Newton.*

Erst wird uns gesagt, dass wenn die variablen Grössen wachsen, $\dot{x}, \dot{y}$ etc. die Geschwindigkeiten ihrer Fluxionen, alias des respektiven Wachstums von x, y etc. bezeichnen. Da ferner numerische Grössen aller möglichen Quantitäten durch grade Linien darstellbar, sind die *Momente* oder *unendlich kleinen Quanta*, die erzeugt werden, gleich dem *Produkt* der Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. und dem unendlich kleinen Zeitteil τ, worin sie verlaufen, also $= \dot{u}\tau$, $\dot{x}\tau$ und $\dot{y}\tau$ [42].

Само собой разумеется, что вследствие громоздкости, а часто и затруднительности разложения первой разности $f(x_1) - f(x)$ на такие члены, каждый из которых содержит множитель $x_1 - x$, последний метод в качестве вычислительного инструмента несравним с исторически сложившимся с давних пор.

Но, с другой стороны, в последнем исходят из dy, dx, $\frac{dy}{dx}$ как данных оперативных формул, тогда как в первом видно их происхождение, и притом чисто алгебраическое. Ничего больше я и не утверждаю. Каким же образом там, в первом [исторически] методе был получен исходный пункт для дифференциальных символов как оперативных формул? При помощи либо скрытых, либо явных метафизических допущений, которые в свою очередь ведут к метафизическим, нематематическим следствиям: происходит насильственное уничтожение неких величин, преграждающих путь выводу и, однако, им самим порожденных.

Чтобы показать на историческом примере различие методов, исходящих из противоположных полюсов, я сопоставлю, решение изложенного выше случая $d(uz)$ Ньютоном и Лейбницем с одной стороны, Лагранжем — с другой.

1) *Ньютон.*

Прежде всего, нам говорят, что если переменные величины растут, то $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д. обозначают скорости их течения, иначе соответствующего роста [переменных] x, y и т. д. Далее, так как численные величины всех возможных количеств могут быть представлены прямыми линиями, то порождаемые *моменты* или *бесконечно малые количества* равны *произведению* скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д. на бесконечно малую частицу времени τ, в течение которой они длятся, следовательно, $= \dot{u}\tau$, $\dot{x}\tau$ и $\dot{y}\tau$ [42].

* DRITTER ENTWURF

Betrachten wir nun das Differential von y in seiner allgemeinen Form $dy = f'(x)\,dx$, so haben wir hier bereits eine rein symbolische Operationsgleichung vor uns, selbst im Fall, wo $f'(x)$ von vornherein eine Konstante ist, wie in $dy = d(ax) = a\,dx$. Dies Kind von $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ schaut verdächtiger aus als seine Mutter. Denn in $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ sind *Nenner und Zähler untrennbar verbunden*; in $dy = f'(x)\,dx$ sind sie augenscheinlich getrennt, so dass sich der Schluss aufdrängt: $dy = f'(x)\,dx$ ist nur ein maskierter Ausdruck für $0 = f'(x) \cdot 0$, also $0 = 0$, womit «nichts zu wolle». Feinere, unserm Jahrhundert angehörige Analytiker, wie z.B. der Franzos Boucharlat, riechen hier auch eine Ratte. Er sagt:

In «$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ z.B. ist $\frac{0}{0}$ alias $\frac{dy}{dx}$, oder vielmehr sein Wert $3x^2$, der Differentialkoeffizient der function y. Da $\frac{dy}{dx}$ also das Symbol ist, welches die Grenze $3x^2$ repräsentiert, müsste dx stets unter dy stehn, aber, um *die algebraischen Operationen zu erleichtern*, behandeln wir $\frac{dy}{dx}$ als gewöhnlichen Bruch und $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ als gewöhnliche Gleichung und erhalten so durch Befreiung der Gleichung von ihrem Nenner dx das Resultat $dy = 3x^2\,dx$, welcher Ausdruck *das Differential von y* heisst»[43].

Um «die algebraischen Operationen zu erleichtern», führen wir also eine falsche Formel ein.

In der Tat verhält sich die Sache nicht so. In $\frac{0}{0}$ $\left(\text{eigentlich } \left(\frac{0}{0}\right)\right.$ zu schreiben$\left.\right)$ besitzt das Verhältnis des Minimalausdrucks von $y_1 - y$ oder von $f(x_1) - f(x)$ oder des Inkrements von $f(x)$ zum Minimalaus-

* ТРЕТИЙ НАБРОСОК

Если мы теперь рассмотрим дифференциал от y в его общей форме $dy = f'(x)\,dx$, то здесь перед нами уже чисто символическое оперативное уравнение, даже в том случае, когда $f'(x)$ с самого начала есть постоянная, как в $dy = d(ax) = a\,dx$. Это дитя [выражения] $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ выглядит подозрительнее, чем его мать. Ибо в $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ *знаменатель и числитель неразрывно связаны*; в $dy = f'(x)\,dx$ они на вид разделены, так что напрашивается вывод: $dy = f'(x)\,dx$ есть лишь замаскированное выражение для $0 = f'(x) \cdot 0$, следовательно, $0 = 0$, а с этим «ничего не поделаешь». Более тонкие, принадлежащие нашему веку аналитики, как, например, француз Бушарла, почуяли тут тоже что-то неладное. Он говорит:

В «$\frac{dy}{dx} = 3x^2$, например, $\frac{0}{0}$, т. е. $\frac{dy}{dx}$ или, вернее, его значение $3x^2$, есть дифференциальный коэффициент функции y. Так как $\frac{dy}{dx}$ есть, таким образом, символ, представляющий предел $3x^2$, то dx должно бы всегда стоять под dy. Но чтобы *облегчить алгебраические операции*, мы рассматриваем $\frac{dy}{dx}$ как обыкновенную дробь, а $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ — как обыкновенное уравнение. Освобождая его от знаменателя dx, мы получаем в результате $dy = 3x^2\,dx$ — это выражение и называется *дифференциалом* y» [43].

Чтобы «облегчить алгебраические операции», мы вводим, таким образом, ложную формулу.

В действительности дело обстоит не так. В $\frac{0}{0}$ $\left(\text{собственно, следует писать } \left(\frac{0}{0}\right)\right)$ отношение минимального выражения для $y_1 - y$, т. е. для $f(x_1) - f(x)$ или для приращения $f(x)$, к минимальному druck von $x_1 - x$ oder zum Inkrement der unabhängigen variablen Grösse x eine Form, worin der Zähler unzertrennbar vom Nenner. Aber warum? Um $\frac{0}{0}$ als *Verhältnis* verschwundner Differenzen zu behalten. Sobald aber $x_1 - x = 0$ in dx eine Form gewinnt, welche es als verschwundne Differenz von x manifestiert, und also auch $y_1 - y = 0$ als dy erscheint, wird die Trennung von Zähler und Nenner eine durchaus zulässige Operation. Wo dx jetzt auch stehe, sein Zusammenhang mit dy bleibt von solchem Ortswechsel unberührt. $dy = df(x)$, also $= f'(x)\,dx$, ist nur ein andrer Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ $[= f'(x)]$, das am Schluss herauskommen muss, damit $f'(x)$ selbständig [vom Faktor dx] erhalten werde. Wie nützlich diese Formel $dy = df(x)$ aber sofort als *Operationsformel* wird, zeigt z.B.:

$$y^2 = ax,$$

$$d(y^2) = d(ax), \qquad 2y\,dy = a\,dx;$$

also

$$dx = \frac{2y\,dy}{a}\ .$$

Dieser Wert von dx gesetzt in die allgemeine Formel der Subtangenten $y\frac{dx}{dy}$, gibt dann

$$\frac{y\,\frac{2y\,dy}{a}}{dy} = \frac{2y^2\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a}\ ,$$

und da

$$y^2 = ax, \ \ [\text{so}] \ = \frac{2ax}{a} = 2x;$$

so dass $2x$ die doppelte Abszisse der gewöhnlichen Parabel Wert ihrer Subtangente.

Gilt aber $dy = df(x)$ als erster Ausgangspunkt, woraus selbst $\frac{dy}{dx}$ erst später entwickelt wird, so, damit dies Differential von y irgendeinen Sinn habe, müssen die Differentiellen dy, dx als Symbole mit bestimmten Sinn *vorausgesetzt* sein. Wären solche Voraussetzungen nicht der mathematischen Metaphysik entstammt, sondern etwa unmittelbar abgeleitet worden aus einer Funktion vom ersten Grad, wie $y = ax$, so, wie früher gesehn, liefert dies $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$, welches sich verwandelt in $\frac{dy}{dx} = a$. Aber auch hieraus a priori nichts Bestimmtes zu holen.

выражению для $x_1 - x$, т. е. для приращения независимой переменной величины x, обладает формой, в которой числитель неотделим от знаменателя. Но почему? Чтобы сохранить $\frac{0}{0}$ как *отношение* исчезнувших разностей. Но как только $x_1 - x = 0$ получает в dx форму, которая выставляет его как исчезнувшую разность [переменной] x, почему и $y_1 - y = 0$ также выступает как dy,— отделение числителя от знаменателя становится вполне допустимой операцией. Где бы теперь ни находилось dx, его связь с dy не затрагивается такой переменой места. $dy = df(x)$, следовательно, $= f'(x)\,dx$, есть лишь другое выражение для $\frac{dy}{dx}$ $[= f'(x)]$, которое должно появиться в конце, чтобы могла быть получена свободная [от множителя dx] $f'(x)$. Насколько, однако, эта формула $dy = df(x)$ тотчас же становится полезной в качестве *оперативной формулы*, показывает, например:

$$y^2 = ax,$$

$$d(y^2) = d(ax), \qquad 2y\,dy = a\,dx,$$

следовательно,

$$dx = \frac{2y\,dy}{a}.$$

Вставив значение для dx в общую формулу подкасательной $y\,\frac{dx}{dy}$, получим

$$\frac{y\,\frac{2y\,dy}{a}}{dy} = \frac{2y^2\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a},$$

и так как

$$y^2 = ax, \quad [\text{то}] \; = \frac{2ax}{a} = 2x;$$

таким образом, $2x$, т. е. удвоенная абсцисса обыкновенной параболы, есть значение ее подкасательной.

Однако если рассматривать $dy = df(x)$ в качестве первого исходного пункта, откуда лишь в дальнейшем выводится сама $\frac{dy}{dx}$, то для того, чтобы этот дифференциал от y имел какой-нибудь смысл, следует *предположить*, что дифференциальные частицы dy, dx являются символами, имеющими определенный смысл. Если бы подобные предположения не были порождены математической метафизикой, но были бы, например, непосредственно выведены из какой-либо функции первой степени вроде $y = ax$, то, как мы видели ранее, это привело бы нас к $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$, что превращается в $\frac{dy}{dx} = a$.

Denn da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ebensogut $= a$, wie $\frac{dy}{dx} = a$, und die Δx, Δy, zwar endliche Differenzen oder Inkremente sind, aber endliche Differenzen oder Inkremente von unlimitierter Kontraktionsfähigkeit, so kann man dx, dy ebensowohl als unendlich kleine, sich 0 beliebig annäherbare Grössen vorstellen, wie entspringend aus wirklicher Gleichsetzung von $x_1 - x = 0$, also auch $y_1 - y = 0$. Das Resultat auf der rechten Seite bleibt beidemal identisch, während in ihr selbst ist durchaus kein $x_1 = x$ zu setzen, also auch kein $x_1 - x = 0$. Dies Setzen $= 0$ auf der andren Seite erschiene daher als ebenso willkürliche Hypothese, wie die Annahme von dx, dy als unendlich kleine Grössen. Ich werde sub IV) an dem Beispiel $d(uz)$ kurz den historischen Gang zeigen, vorher aber noch sub III) [44] ein Beispiel geben, welches das erstemal auf dem Boden des symbolischen Calculs mit einer fertigen Operationsformel behandelt, das zweite Mal algebraisch dargestellt wird. Soviel hat sich sub II) gezeigt, dass die letztre Methode selbst, durch ihre Anwendung auf eine so elementare Funktion wie das Produkt zweier Variablen, vermittelst ihrer eignen Resultate, notwendig zu der vom Gegenpol aus operierenden Methode die Ausgangspunkte liefert.

Ad IV.

Schliesslich (*nach Lagrange* noch zu bemerken, dass die *Grenze* oder der *Grenzwert*, der sich schon gelegentlich für den Differentialkoeffizienten bei Newton findet, den er noch aus rein geometrischen Vorstellungen abgeleitet, noch heutzutage stets eine hervorragende Rolle spielt, sei es nun, dass die symbolischen Ausdrücke als Grenze von $f'(x)$ oder umgekehrt $f'(x)$ als Grenze des Symbols figurieren oder alle zwei als Grenzen figurieren. Diese Kategorie, die namentlich Lacroix analytisch breitgetreten, wird als Ersatz für die Kategorie «Minimalausdruck», sei es der Abgeleiteten im Gegensatz zu der «vorläufig Abgeleiteten», sei es des Verhältnisses $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, nur wichtig, sobald es sich um Anwendung des Calculus auf Kurven handelt. Sie ist geometrisch *vorstellbarer* und findet sich daher auch schon *bei den alten Geometern*. Bei manchen Modernen versteckt sich dieser noch immer dahinter, dass die Differentiellen und Differentialkoeffizienten bloß sehr Annäherungswerte ausdrücken [45].

Но и отсюда a priori нельзя извлечь ничего определенного. Ибо так как $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ точно так же $= a$, как $\frac{dy}{dx} = a$, а Δx, Δy суть, правда, конечные разности или приращения, но конечные разности или приращения с неограниченной способностью к убыванию, то с одинаковым успехом можно представлять себе dx, dy и как бесконечно малые, сколь угодно приближаемые к нулю величины, и как возникшие в результате действительного приравнивания нулю $x_1 - x$ и, следовательно, $y_1 - y$. В обоих случаях результат на правой стороне остается один и тот же, пока на этой стороне не приходится полагать $x_1 = x$, а значит, и $x_1 - x = 0$. Это приравнивание нулю на другой стороне оказалось бы поэтому такой же произвольной гипотезой, как и допущение, что dx, dy суть бесконечно малые величины. Я вкратце покажу sub IV) на примере $d(uz)$ исторический ход развития. Прежде, однако, sub III) [44] дам еще один пример, который сначала будет разобран на почве символического исчисления при помощи некоторой готовой оперативной формулы, а затем будет представлен алгебраически. Пока sub II) мы показали уже, что даже в применении к такой элементарной функции, как произведение двух переменных, последний метод, с помощью его собственных результатов, дает с необходимостью исходные пункты для метода, оперирующего с противоположного полюса.

К IV.

Наконец (*по Лагранжу*), нужно еще заметить, что *предел* или *предельное значение*, которое встречается уже иногда вместо дифференциального коэффициента у Ньютона, выведенное им еще из чисто геометрических представлений, и по сей день неизменно играет выдающуюся роль, фигурируют ли символические выражения как пределы для $f'(x)$ или, наоборот, $f'(x)$ как предел символа или же оба фигурируют как пределы. Эта категория, которую ввел в широкий обиход в [математическом] анализе главным образом Лакруа, приобретает важное значение как замена для категории «минимального выражения»— либо для производной в противоположность «предварительной производной», либо для отношения $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, коль скоро речь идет о применении исчисления к кривым. Ее легче *представить* геометрически, и поэтому она встречается уже и *у древних геометров*. У некоторых современных предел скрыт еще в том, что дифференциальные частицы и дифференциальные коэффициенты выражают лишь приближенные значения [45].

* EINIGE NACHTRÄGE [46]

A) Nachträgliches über Differentiation von *uz* [47].

1) Bei der Entwicklung von $d(uz)$ im letzten Manuskript war für mich mit Bezug auf Gleichung

$$\text{A)}\quad \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

das Wesentliche der Nachweis, dass die hier angewandte algebraische Methode von selbst in die Differentialmethode umschlägt, indem sie innerhalb der Abgeleiteten, also auf der rechten Seite, *symbolische Differentialkoeffizienten* ohne entsprechende Äquivalente reale Koeffizienten entwickelt, womit diese Symbole als solche zu *selbständigen Ausgangspunkten* und fertiggelieferten *Operationsformeln* werden.

Die Form der Gleichung A) bot sich zu diesem Zweck um so passender als sie eine Vergleichung erlaubt zwischen den innerhalb der Abgeleiteten $f'(x)$ produzierten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ mit dem auf der linken Seite gegenüberstehenden $\frac{dy}{dx}$, welches der symbolische Differentialkoeffizient von $f'(x)$ ist, daher sein symbolisches Äquivalent bildet.

Betreffs des Charakters von $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ als Operationsformeln begnügte ich mich mit dem Wink, dass für jene symbolischen Differentialkoeffizienten beliebige «Abgeleitete» als deren Realwerte findbar, wenn man für u irgendein $f(x)$, z.B. $3x^2$, für z irgendein $\varphi(x)$, z.B. $x^3 + ax^2$ setzt.

Ich hätte aber auch die geometrische Anwendbarkeit jener Operationsformeln andeuten können, indem z.B. *die allgemeine Formel der*

* НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ [46]

А) Дополнительно о дифференцировании *uz* [47].

1) При развертывании $d(uz)$ в последней рукописи существенным для меня было в применении к уравнению

$$\text{A)}\ \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

показать, что примененный здесь алгебраический метод сам собой превращается в дифференциальный метод благодаря тому, что он развертывает внутри производной, т. е. на правой стороне, *символические дифференциальные коэффициенты* без соответствующих эквивалентных реальных коэффициентов, вместе с чем эти символы становятся, как таковые, *самостоятельными исходными пунктами* и данными в готовом виде *оперативными формулами*.

Форма уравнения А) оказалась для этой цели тем более подходящей, что она позволяет сравнить полученные внутри производной $f'(x)$ [выражения] $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ с противостоящим [им] на левой стороне $\frac{dy}{dx}$, которое является символическим дифференциальным коэффициентом для $f'(x)$ и образует поэтому ее символический эквивалент.

Что касается характера $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ как оперативных формул, то я ограничился указанием, что для этих символических дифференциальных коэффициентов могут быть найдены любые «производные» в качестве их реальных значений, если вместо u представить какую-нибудь $f(x)$, например $3x^2$, а вместо z — какую-нибудь $\varphi(x)$, например $x^3 + ax^2$.

Я мог бы, однако, указать также на геометрическую применимость этих оперативных формул, поскольку, например, *общей*

Subtangenten der Kurven $= y\,\frac{dx}{dy}$, welches mit $z\frac{du}{dx}$, $u\frac{dz}{dx}$ soweit ganz identischer Form [ist], als sie alle Produkte einer Variablen mit einem symbolischen Differentialkoeffizienten [sind].

Schliesslich hätte noch bemerkt werden können, dass $y = uz$, die *einfachste elementarische Funktion* (y hier $= y^1$ und uz die einfachste Form zweiter Potenz) [ist], an welcher unser Thema entwickelbar.

A) Differentiation von $\frac{u}{z}$[48].

3) Da $d\frac{u}{z}$ der umgekehrte Fall von $d(uz)$, hier Multiplikation, dort Division, so liegt es nahe, die *algebraisch* gefundne Operationsformel

$$d(uz) = z\,du + u\,dz$$

direkt zu benutzen, um $d\frac{u}{z}$ zu finden. Ich werde dies nun tun, damit der Unterschied zwischen Ableitungsmethode und blosser Anwendung eines früher gefundnen Differentiationsresultats, das nun seinerseits als Operationsformel dient, klar hervorsteche.

$$\text{a) } y = \frac{u}{z};$$

$$\text{b) } u = yz.$$

Da $y = \frac{u}{z}$, so

$$yz = \frac{u}{z}\cdot z = u.$$

Wir haben also bloß formell u in ein Produkt von 2 Faktoren maskiert. Und dennoch ist hiermit in der Tat schon die Aufgabe gelöst, denn aus Differentiation eines Bruchs hat sich das Problem verwandelt in die Differentiation eines Produkts, wozu wir die Zauberformel in der Tasche haben. Gemäss dieser Formel:

$$\text{c) } du = z\,dy + y\,dz.$$

Wir sehen sofort dem ersten Glied der zweiten Seite, nämlich $z\,dy$, an, dass es auf seinem Posten bis genau vor Torschluss in *Ruhstand sitzen* bleiben muss, denn die Aufgabe besteht grade darin, das Differential von $y\left(=\frac{u}{z}\right)$ zu finden, also seinen Ausdruck in Differentiellen von *формулой для подкасательных к кривым* служит $y\frac{dx}{dy}$, что по форме вполне идентично с $z\frac{du}{dx}$, $u\frac{dz}{dx}$, поскольку все они являются произведениями переменной на символический дифференциальный коэффициент.

И, наконец, можно было бы еще отметить, что $y = uz$ есть *простейшая элементарная функция* (y здесь есть y^1, а uz — простейшая форма второй степени), на которой может быть развита наша тема.

А) Дифференцирование $\frac{u}{z}$ [48].

3) Так как $d\frac{u}{z}$ — случай, обратный по отношению к $d(uz)$ — здесь умножение, там деление,— то представляется естественным непосредственно воспользоваться найденной *алгебраически* оперативной формулой

$$d(uz) = z\,du + u\,dz,$$

чтобы отыскать $d\frac{u}{z}$. Это я и сделаю для того, чтобы ярко выступило различие между методом непосредственного вывода и простым применением некоторого полученного ранее результата дифференцирования, который в свою очередь является оперативной формулой.

$$\text{a) } y = \frac{u}{z};$$

$$\text{b) } u = yz.$$

Так как $y = \frac{u}{z}$, то

$$yz = \frac{u}{z}\cdot z = u.$$

Таким образом, u лишь формально выступает под маской произведения двух множителей. И однако тем самым задача в действительности уже решена, ибо проблема дифференцирования дроби превратилась в проблему дифференцирования произведения, для чего у нас в кармане есть волшебная формула. Согласно этой формуле:

$$\text{c) } du = z\,dy + y\,dz.$$

Мы обнаруживаем тотчас же по виду первого члена второй стороны, а именно $z\,dy$, что он должен *спокойно оставаться* на своем посту до последней минуты, ибо задача состоит как раз в том, чтобы найти дифференциал от $y\left(=\frac{u}{z}\right)$, т. е. выразить его в дифференциалах

u und z. Aus diesem Grund ist andrerseits $y\,dz$ auf die linke Seite zu *versetzen*. Daher:

$$\text{d)}\quad du - y\,dz = z\,dy.$$

Setzen wir nun in $y\,dz$ den Wert von y, nämlich $\frac{u}{z}$, so

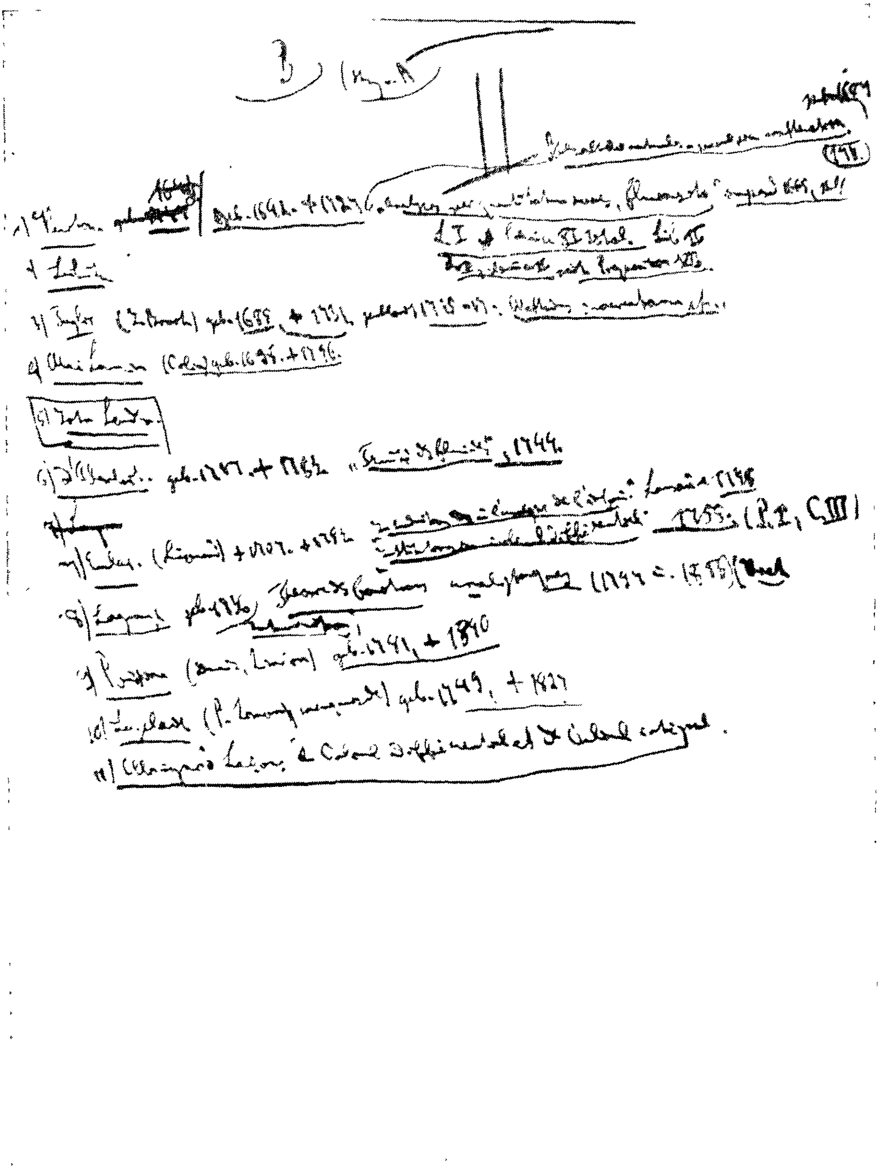
$$du - \frac{u}{z}\,dz = z\,dy;$$

daher

$$\frac{z\,du - u\,dz}{z} = z\,dy.$$

Jetzt der Moment gekommen, dy von seinem sleeping partner z zu befreien, und wir erhalten

$$\frac{z\,du - u\,dz}{z^2} = dy = d\,\frac{u}{z}.$$



Листок, приложенный к тетради «В (продолжение А). II».

от u и z. С другой стороны, по этой же причине нужно *переместить* $y\,dz$ на левую сторону. Поэтому:

$$\text{d)}\ du - y\,dz = z\,dy.$$

Если мы подставим теперь в $y\,dz$ значение y, именно $\frac{u}{z}$, то

$$du - \frac{u}{z}\,dz = z\,dy;$$

поэтому

$$\frac{z\,du - u\,dz}{z} = z\,dy.$$

Теперь наступил момент освободить dy от его спящего партнера z, и мы получим

$$\frac{z\,du - u\,dz}{z^2} = dy = d\,\frac{u}{z}.$$

ОБ ИСТОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ[49]

* EIN IN DAS HEFT «B (FORTSETZUNG VON A) II.» HINEINGELEGTES BLATT [50]

1) *Newton*, geb. 1642, † 1727. «*Philosophiae naturalis principia mathematica*», pub. 1687.

L. I. *Lemma* XI, *Schol.* Lib. II.

L. II. *Lemma* II, *nach Proposition* VII [51].

«*Analysis per quantitatum series, fluxiones etc.*», composed 1665, publ. 1711 [52].

2) *Leibniz.*

3) *Taylor* (J. Brook), geb. 1685, † 1731, publiziert 1715—17: «*Methodus incrementorum etc.*».

4) *Mac Laurin* (*Colin*), geb. 1698, † 1746.

5) *John Landen.*

6) *D'Alembert*, geb. 1717, † 1783. «*Traité des fluides*», 1744 [53].

7) *Euler* (Léonard), [geb.] 1707, † 1783. «*Introduction à l'analyse de l'infini*», Lausanne, 1748. «*Institutions du calcul différentiel*», 1755 (p. I, c. III) [54].

8) *Lagrange*, geb. 1736. «*Théorie des fonctions analytiques*» (1797 und 1813) (*sieh Introduction*).

9) *Poisson* (Denis, Siméon), geb. 1781, † 1840.

10) *Laplace* (P. Simon, marquis de), geb. 1749, † 1827.

11) *Moigno's*, «*Leçons de Calcul Différentiel et de calcul intégral*» [55].

* ЛИСТОК, ПРИЛОЖЕННЫЙ К ТЕТРАДИ «В (ПРОДОЛЖЕНИЕ А) II.»[50]

1) *Ньютон*, род. 1642, † 1727. «*Математические начала натуральной философии*», опубл. в 1687.

Кн. I, *Лемма* XI, *Схолия*. Кн. II.

Кн. II, *Лемма* II, *после Предложения* VII[51].

«*Анализ посредством рядов количеств, флюксий и т. д.*», написано в 1665, опубл. в 1711[52].

2) *Лейбниц*.

3) *Тейлор* (Дж. Брук), род. 1685, † 1731, опубликовал в 1715—17: «*Метод приращений и т. д.*».

4) *Маклорен* (*Колин*), род. 1698, † 1746.

5) *Джон Ланден.*

6) *Даламбер*, род. 1717, † 1783. «*Трактат о жидкостях*», 1744[53].

7) *Эйлер* (Леонард), [род.] 1707, † 1783. «*Введение в анализ бесконечных*», Лозанна, 1748. «*Основы дифференциального исчисления*», 1755 (ч. I, гл. III)[54].

8) *Лагранж*, род. 1736. «*Теория аналитических функций*» (1797 и 1813) (*см. Введение*).

9) *Пуассон* (Дени, Симеон), род. 1781, † 1840.

10) *Лаплас* (П. Симон, маркиз де), род. 1749, † 1827.

11) *Муаньо*, «*Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению*»[55].

* I. ERSTE ENTWÜRFE

Newton: geb. 1642, † 1727 (85 Jahre alt). «*Philosophiae naturalis principia mathematica*» (zuerst published 1687, cf. *Lemma* I und *Lemma* XI, *Schol.*).

Dann namentlich: «*Analysis per quantitatum series, fluxiones etc.*», erst published 1711, aber composed 1665, während Leibniz erst 1676 dieselbe Entdeckung gemacht.

Leibniz: geb. 1646, † 1716 (70 Jahre alt).

Lagrange: geb. 1736, † erst unter Kaisertum (Napoleon I), ist Erfinder der *Méthode des variations*. «*Théorie des fonctions analytiques*» (1797 und 1813).

D'Alembert: geb. 1717, † 1783 (66 Jahre alt). «*Traité des fluides*», 1744.

1) *Newton*. The velocities or fluxions, z. B. der *Variablen* x, y etc. *bezeichnet durch* $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. Z.B. wenn u und x *connected quantities* (*fluents*) *generated by continuous movement*, $\dot{u}$ und $\dot{x}$ bezeichnen die Raten of their increase, und daher $\frac{\dot{u}}{\dot{x}}$ das *Verhältnis* zwischen den rates, worin ihre increments generated.

Da die numerischen Grössen aller möglichen Quantitäten durch grade Linien darstellbar, die *Moments* oder unendlich kleinen portions der quantities generated = den Products ihrer velocities und des unendlich kleinen Zeitteils, worin diese Geschwindigkeiten dauern [56], so dass τ denoting diesen unendlich kleinen Zeitteil, the moments of x und y represented durch $\tau\dot{x}$ und $\tau\dot{y}$ respectively.

Z. B. $y = uz$; $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ denoting the velocities, womit y, z, u respectively increasing, then the *moments* von $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ sind $\tau\dot{y}$, $\tau\dot{z}$, $\tau\dot{u}$, und wir erhalten:

$$y = uz, \quad y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}) = uz + u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z};$$

* I. ПЕРВЫЕ НАБРОСКИ

Ньютон: род. в 1642, † 1727 (85 лет от роду). «*Математические начала натуральной философии*» (впервые опубликовано в 1687, см. *Лемма* I и *Лемма* XI, *Схолия*).

Затем особенно: «*Анализ посредством рядов количеств, флюксий и т. д.*», впервые опубликовано в 1711, но написано в 1665, тогда как Лейбниц впервые сделал подобное открытие в 1676.

Лейбниц: род. в 1646, † 1716 (70 лет от роду).

Лагранж: род. в 1736, умер уже при империи (Наполеон I), изобретатель *метода вариаций*. «*Теория аналитических функций*» (1797 и 1813).

Даламбер: род. в 1717, † 1783 (66 лет от роду). «*Трактат о жидкостях*», 1744.

1) *Ньютон*. Скорости, или флюксии, например, *переменных* x, y и т. д. *обозначаются через* $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д. Если, например, u и x — *взаимно связанные величины* (*флюенты*), *порождаемые непрерывным движением*, то $\dot{u}$ и $\dot{x}$ обозначают скорости их возрастания и, следовательно, $\frac{\dot{u}}{\dot{x}}$ — *отношение* между скоростями, с которыми порождаются их приращения.

Так как числовые величины всех возможных количеств могут быть представлены прямыми линиями, то *моменты*, или бесконечно малые части, порождаемых величин = произведениям их скоростей на бесконечно малые части времени, в течение которых эти скорости длятся [56], так что, если через τ обозначить эту бесконечно малую часть времени, то моменты величин x и y представятся соответственно через $\tau\dot{x}$ и $\tau\dot{y}$.

Например, $y = uz$; если обозначим скорости возрастания величин y, z, u соответственно через $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$, то *моменты* их будут $\tau\dot{y}$, $\tau\dot{z}$, $\tau\dot{u}$, и мы получим:

$$y = uz, \qquad y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}) = uz + u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z};$$

hence

$$\tau \dot{y} = u \tau \dot{z} + z \tau \dot{u} + \tau^2 \dot{u}\dot{z}.$$

Da τ unendlich klein, verschwindet es von selbst, und noch mehr $\tau^2 \dot{u}\dot{z}$ altogether als Produkt, was nicht im unendlich kleinen Zeitraum τ, sondern in dessen 2[ter] Potenz entspringt. $\left(\text{Wäre } \tau = \frac{1}{\text{millionster}},\right.$ so $\left.\tau^2 = \frac{1}{1 \text{ mill.} \times 1 \text{ mill.}}.\right)$

Also erhalten

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u,$$

oder die Fluxion von $y = uz$ ist $\dot{u}z + \dot{z}u$ [57].

2) *Leibniz*. Sei zu finden das Differential von uz.

u wird $u + du$, z wird $z + dz$; also

$$uz + d(uz) = (u + du)(z + dz) = uz + u\,dz + z\,du + du\,dz.$$

Zieht man hiervon die gegebne Quantität uz ab, so bleibt als Zuwachs $u\,dz + z\,du + du\,dz$; $du\,dz$, Produkt d'un infiniment petit du par un autre infiniment petit dz, ist ein unendlich kleines zweiter Ordnung und verschwindet vor den unendlich kleinen $u\,dz$ und $z\,du$ von erster Ordnung, daher

$$d(uz) = u\,dz + z\,du \text{ }^{58}.$$

[3)] *D'Alembert*. Stellt im allgemeinen die Aufgabe so. Wenn

$$y = f(x),$$

$$y_1 = f(x + h);$$

zu bestimmen, was der Wert von $\frac{y_1 - y}{h}$ wird, wenn die Grösse h verschwindet, also was der Wert von $\frac{0}{0}$ wird [59].

Newton und Leibniz, wie die meisten ihrer Nachfolger, bewegen sich von vornherein auf dem Boden des Differentialcalculs, und die Differentialausdrücke gelten daher von vornherein als Operationsformeln, um dann reales Äquivalent zu finden. Der ganze Witz kommt darauf hinaus. Wird die unabhängige Variable x zu x_1, so wird die abhängige Variable zu y_1. $x_1 - x$ aber notwendig gleich irgendeiner Differenz, $=$ z. B. h. Dies liegt im Begriff der Variablen selbst. Aber daraus folgt keineswegs, dass diese Differenz, $= dx$, [eine] verschwindende ist, also in der Tat $= 0$.

следовательно,

$$\tau\dot{y} = u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z}.$$

Так как τ бесконечно мало, то оно само по себе исчезает, и тем более совершенно исчезает $\tau^2\dot{u}\dot{z}$, как произведение, соответствующее не бесконечно малому отрезку времени τ, а его второй степени. $\left(\text{Если, например, } \tau = \frac{1}{\text{миллионной}}, \text{ то } \tau^2 = \frac{1}{1 \text{ миллион} \times 1 \text{ миллион}}.\right)$

Таким образом, получаем

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u,$$

или флюксия от $y = uz$ есть $\dot{u}z + \dot{z}u$ [57].

2) *Лейбниц*. Пусть требуется найти дифференциал от uz.

u превращается в $u + du$, z — в $z + dz$. Таким образом,

$$uz + d(uz) = (u + du)(z + dz) = uz + u\,dz + z\,du + du\,dz.$$

Если отсюда вычесть данную величину uz, то останется как приращение $u\,dz + z\,du + du\,dz$; произведение $du\,dz$ бесконечно малой du на другую бесконечно малую dz есть бесконечно малая второго порядка и исчезает по сравнению с бесконечно малыми первого порядка $u\,dz$ и $z\,du$. Поэтому

$$d(uz) = u\,dz + z\,du\ [58].$$

[3)] *Даламбер*. Ставит в общем виде задачу так. Пусть

$$y = f(x),$$

$$y_1 = f(x + h);$$

определить значение $\frac{y_1 - y}{h}$, когда величина h исчезает, т. е. определить значение $\frac{0}{0}$ [59].

Ньютон и Лейбниц, как и большинство их последователей, действуют с самого начала на почве дифференциального исчисления, а потому и дифференциальные выражения служат им сразу оперативными формулами для отыскания реального эквивалента. Все дело в этом. С превращением независимой переменной x в x_1 зависимая переменная превращается в y_1. Но $x_1 - x$ необходимо равно какой-нибудь разности, например h. Это содержится в самом понятии переменной. Однако из этого отнюдь не следует, что эта разность, равная dx, есть [величина] исчезающая, т. е. в действительности $= 0$.

Sie kann auch endliche Differenz darstellen. Haben wir aber von vornherein gesetzt, dass x, wenn es wächst, wird zu $x+\dot{x}$ (das τ bei Newton tut keinen Dienst in seiner Analysis der Grundfunktionen, kann also unterdrückt werden [60]), oder mit Leibniz dass x zu $x+dx$ wird, so werden Differentialausdrücke sofort Operationssymbole, ohne dass ihr algebraischer Ursprung hervortritt.

Ad 15 * (*Newton*).

Nehmen wir Newtons Ausgangsgleichung für das Produkt uz, das zu differenzieren, so:

$$y = uz,$$

$$y+\tau\dot{y} = (u+\dot{u}\tau)(z+\dot{z}\tau).$$

Schmeissen wir das τ hinaus, wie er das gefälligst selbst tut, nachdem er die erste Differentialgleichung entwickelt, so erhalten wir:

$$y+\dot{y} = (u+\dot{u})(z+\dot{z}),$$

$$y+\dot{y} = uz+\dot{u}z+\dot{z}u+\dot{z}\dot{u},$$

$$y+\dot{y}-uz = \dot{u}z+\dot{z}u+\dot{u}\dot{z}.$$

Also da $uz = y$,

$$\dot{y} = \dot{u}z+\dot{z}u+\dot{u}\dot{z}.$$

Und um das richtige Resultat zu erhalten, muss $\dot{u}\dot{z}$ unterdrückt werden.

Woher entsteht nun das gewaltsam zu unterdrückende Glied $\dot{u}\dot{z}$?

Ganz einfach daher, dass die Differentiale von y als $\dot{y}$, von u als $\dot{u}$ und z als $\dot{z}$ von vornherein durch eine Difinition als von den variablen Grössen, aus denen sie entstehn, getrennte, selbständige Existenzen eingeführt werden, ohne auf irgendeinem mathematischen Weg abgeleitet zu sein.

Man sieht einerseits, welchen Nutzen diese präsumierte Existenz von dy, dx oder $\dot{y}$, $\dot{x}$ hat, indem ich von vornherein, sobald die Variablen wachsen, ich in die algebraische Funktion nur die Binome $y+\dot{y}$, $x+\dot{x}$ etc. zu setzen habe und mit diesen selbst dann als gewöhnliche algebraische Grössen manövrieren kann.

Ich erhalte z. B., wenn ich $y = ax$ habe:

$$y+\dot{y} = ax+a\dot{x};$$

also

$$y-ax+\dot{y} = a\dot{x};$$

---

* Sieh S. 98, 100.

Она может представлять собой и конечную разность. Если же мы заранее предположим, что x, возрастая, превращается в $x+\dot{x}$ (τ у Ньютона в его анализе основных функций никакой роли не играет и поэтому может быть опущено [60]) или, как у Лейбница, в $x+dx$, то дифференциальные выражения тотчас же превратятся в оперативные символы без того, чтобы их алгебраическое происхождение выступило вперед.

К [стр.] 15 * (*Ньютон*).

Возьмем ньютоновское исходное уравнение для произведения uz, которое нужно продифференцировать. Тогда

$$y=uz, \qquad y+\tau\dot{y}=(u+\dot{u}\tau)(z+\dot{z}\tau).$$

Отбросив τ, как это он и сам охотно делает, после того как развертывает первое дифференциальное уравнение, получим:

$$y+\dot{y}=(u+\dot{u})(z+\dot{z}),$$

$$y+\dot{y}=uz+\dot{u}z+\dot{z}u+\dot{z}\dot{u},$$

$$y+\dot{y}-uz=\dot{u}z+\dot{z}u+\dot{u}\dot{z}.$$

Следовательно, так как $uz=y$, то

$$\dot{y}=\dot{u}z+\dot{z}u+\dot{u}\dot{z}.$$

И чтобы получить правильный результат, нужно отбросить $\dot{u}\dot{z}$.

Откуда же взялся подлежащий насильственному отбрасыванию член $\dot{u}\dot{z}$?

Очень просто: суть дела в том, что дифференциалы от y в виде $\dot{y}$, от u в виде $\dot{u}$, от z в виде $\dot{z}$ вводятся с самого начала, по определению, как существующие наряду с переменными величинами, из которых они возникают, независимо от них, а не выводятся как-нибудь математически.

С одной стороны, мы видим, какую пользу приносит это предпосылаемое существование dy, dx или $\dot{y}$, $\dot{x}$; коль скоро переменные возрастают, мне остается лишь подставить в алгебраическую функцию биномы $y+\dot{y}$, $x+\dot{x}$ и т. д., а затем уже маневрировать ими, как обыкновенными алгебраическими величинами.

Так, например, имея $y=ax$, я получаю

$$y+\dot{y}=ax+a\dot{x};$$

стало быть,

$$y-ax+\dot{y}=a\dot{x};$$

---

* См. стр. 99, 101.

hence

$$\dot{y} = a\dot{x}.$$

Ich habe damit sofort das Resultat erhalten: das Differential der abhängigen Variablen ist gleich dem Zuwachs von ax, nämlich $a\dot{x}$, ist gleich dem aus *ax abgeleiteten Realwert a* (dass dies hier konstante Grösse, ist zufällig und ändert an der Allgemeinheit des Resultats nichts, da es nur dem Umstand geschuldet, dass die Variable x sich hier in der ersten Potenz befindet) [mal $\dot{x}$]. Verallgemeinere ich dies Resultat [61], so weiss ich [dass] $y = f(x)$, denn dies heisst, dass y die von x abhängige Variable ist. Nenne ich die von $f(x)$ abgeleitete Grösse, i. e. das reale Element des Zuwachses, $f'(x)$, so das allgemeine Resultat:

$$\dot{y} = f'(x)\,\dot{x}.$$

Ich weiss also von vornherein, dass das Äquivalent des Differentials der abhängigen Variablen y gleich der ersten abgeleiteten Funktion der unabhängigen ist, multipliziert mit ihrem Differential, d. h. dx oder $\dot{x}$.

Also allgemein ausgedrückt, wenn

$$y = f(x),$$

so

$$dy = f'(x)\,dx$$

oder $\dot{y}$ = realem Koeffizient in x (ausser wo Konstante tritt, weil x in erster Potenz) mal $\dot{x}$.

Aber $\dot{y} = a\dot{x}$ gibt mir sofort $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a$ und im allgemeinen:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x).$$

Ich habe so für das Differential und den Differentialkoeffizienten zwei weiterentwickelte Operationsformeln gefunden, welche Basis des ganzen Differentialcalculs bilden.

Und ausserdem allgemein ausgedrückt erhalte ich durch die a priori vorausgesetzten dx, dy etc. oder $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. als selbständige isolierte Inkremente von x und y den enormen Vorteil, der den Differentialcalcul auszeichnet, dass alle Funktionen der Variablen von vornherein in Differentialformen sich darstellen.

следовательно,

$$\dot{y} = a\dot{x}.$$

Таким образом, я сразу получил результат: дифференциал зависимой переменной равен приращению [функции] ax, т. е. $a\dot{x}$, равен выведенному из *ax реальному значению a* (что это здесь постоянная величина, есть случайность и ничего не меняет в общности результата, так как обязано лишь тому обстоятельству, что переменная x находится здесь в первой степени), [умноженному на $\dot{x}$]. Если я обобщу этот результат [61], то я знаю, [что] $y = f(x)$, ибо это означает, что y есть зависимая от x переменная. Если произведенную из $f(x)$ величину, т. е. реальный элемент приращения, я назову $f'(x)$, то общий результат будет

$$\dot{y} = f'(x)\,\dot{x}.$$

Таким образом, мне заранее известно, что эквивалент дифференциала зависимой переменной y равен первой производной функции по независимой переменной, помноженной на ее дифференциал, т. е. на dx или $\dot{x}$.

Таким образом, в общем виде, если

$$y = f(x),$$

то

$$dy = f'(x)\,dx,$$

или $\dot{y} =$ реальному коэффициенту в x (за исключением случая, где появляется постоянная, вследствие того что x входит в первой степени), помноженному на $\dot{x}$.

Но $\dot{y} = a\dot{x}$ сразу дает мне $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a$, и вообще

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x).$$

Таким образом, для дифференциала и дифференциальных коэффициентов я нашел две развитые далее оперативные формулы, образующие основу всего дифференциального исчисления.

И, кроме того, вообще говоря, благодаря a priori предположенным в качестве самостоятельных изолированных приращений от x и y дифференциалам dx, dy и т. д. или $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д. я получаю огромное преимущество, позволяющее дифференциальному исчислению с самого начала выражать все функции переменных в дифференциальных формах.

Habe ich so die wesentlichen Funktionen der Variablen entwickelt auf diesem Weg, wie ax, $ax \pm b$, xy, $\frac{x}{y}$, x^n, a^x, $\log x$, ebenso die elementaren Zirkularfunktionen, so werden sie bei Findung von dy, $\frac{dy}{dx}$ ganz so unterstellt, wie das Einmaleins in der Arithmetik.

Sehn wir uns aber jetzt die Kehrseite an, und wir finden sofort, dass die ganze ursprüngliche Operation mathematisch falsch ist.

Nehmen wir ein ganz einfaches Beispiel: $y = x^2$. Wächst x, so erhält es einen unbestimmten Zuwachs h, daher auch die von ihm abhängige Variable y einen unbestimmten Zuwachs k, und wir erhalten

$$y + k = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2,$$

Formel, die uns durch das Binom[ial Theorem] gegeben ist. Daher

$$y + k - x^2 \text{ oder } y + k - y = 2hx + h^2;$$

hence

$$(y + k) - y \text{ oder } k = 2hx + h^2;$$

dividieren wir beide Seiten durch h, so:

$$\frac{k}{h} = 2x + h.$$

Setzen wir nun $h = 0$, so wird

$$2x + h = 2x + 0 = 2x.$$

Andrerseits aber wird $\frac{k}{h}$ zu $\frac{k}{0}$; da aber y nur zu $y + k$ wurde, weil x zu $x + h$, so wird $y + k$ wieder zu y, wenn h zu 0, daher $x + h$ wieder zu $x + 0$, zu x wird. Also wird k auch zu 0 und $\frac{k}{0} = \frac{0}{0}$, welches ausgedrückt werden kann $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Wir erhalten so:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Wenn wir dagegen in

$$y + k - x^2 = 2hx + h^2 \quad \text{oder} \quad (y + k) - y = 2xh + h^2$$

[$h = 0$ setzen] (h wird nur zum Symbol dx, nachdem es vorher in seiner ursprünglichen Form gleich 0 gesetzt), so erhalten wir $k = 0 + 0 = 0$, und das einzige Resultat, was wir gewonnen, ist

После того, как я на этом пути развил основные функции переменных, таких, как ax, $ax \pm b$, xy, $\frac{x}{y}$, x^n, a^x, $\log x$, равно как и элементарные круговые функции, я могу при отыскании dy, $\frac{dy}{dx}$ пользоваться ими так же, как таблицей умножения в арифметике.

Но если мы теперь посмотрим на оборотную сторону дела, мы тотчас же обнаружим, что вся первоначальная операция математически ложна.

Возьмем совсем простой пример: $y = x^2$. Если x возрастает, то она получает какое-то неопределенное приращение h; вследствие этого и зависимая от нее переменная y тоже получает неопределенное приращение k, и мы будем иметь

$$y + k = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$

— формулу, которая дана нам [теоремой о] биноме. Отсюда

$$y + k - x^2 \text{ или } y + k - y = 2hx + h^2;$$

следовательно,

$$(y + k) - y \text{ или } k = 2hx + h^2.$$

Разделив обе стороны на h, получим

$$\frac{k}{h} = 2x + h.$$

Положив теперь $h = 0$, будем иметь

$$2x + h = 2x + 0 = 2x.$$

С другой же стороны, $\frac{k}{h}$ становится $\frac{k}{0}$; но так как y превратилась в $y + k$ только потому, что x превратилась в $x + h$, то $y + k$ вновь обращается в y, когда h обращается в 0, в силу чего $x + h$ вновь становится $x + 0$, т. е. x. Следовательно, k также становится 0 и $\frac{k}{0} = \frac{0}{0}$, что можно представить еще в виде $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Мы получаем, таким образом,

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Если же в

$$y + k - x^2 = 2hx + h^2 \quad \text{или} \quad (y + k) - y = 2xh + h^2$$

[мы положим $h = 0$] (h обращается в символ dx лишь после того, как оно — в его первоначальной форме — было положено равным 0), то мы получим $k = 0 + 0 = 0$, и единственный результат, die Einsicht in unsre Voraussetzung, dass y bloss zu $y + k$ wird, wenn x zu $x + h, \ldots$ also wenn $x + h = x + 0 = x$, so $y + k = y$, oder $k = 0$.

Wir erhalten aber keineswegs, wie Newton das macht:

$$k = 2x\,dx + dx\,dx$$

oder in Newtonscher Schreibart:

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x};$$

h wird erst zu $\dot{x}$, und daher k zu $\dot{y}$, sobald h die Höllenfahrt durch 0 passiert hat, d. h. nachdem die Differenzen $x_1 - x$ (oder $(x + h) - x$) und daher auch die von $y_1 - y$ $(= (y + k) - y)$ auf ihren absoluten Minimalausdruck $x - x = 0$ und $y - y = 0$ reduziert worden sind.

Indem Newton aber sofort die Zuwächse der Variablen x, y etc. [die Differentialen] nicht durch mathematische Ableitung bestimmt, sondern sofort zu Differentialen $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. stempelt, können sie nicht $= 0$ sein; denn sonst wäre das Resultat 0, da algebraisch ausgedrückt das von vornherein Setzen dieser Zuwächse $= 0$, darauf hinauskommt, wie oben in Gleichung

$$(y + k) - y = 2xh + h^2,$$

h sofort gleich 0 zu setzen, daher $k = 0$, und folglich in letzter Instanz $0 = 0$ zu erhalten. Die Nullifikation von h darf nicht vorgehn, bevor die erste abgeleitete Funktion x, hier $2x$, von dem Faktor h durch Division befreit ist, also

$$\frac{y_1 - y}{h} = 2x + h$$

erhalten ist. Erst dann kann die endliche Differenz aufgehoben werden. Der Differentialkoeffizient

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

muss daher auch ursprünglich vorher entwickelt werden [62], bevor wir das Differential

$$dy = 2x\,dx$$

erhalten können.

Es bleibt also nichts übrig, als sich die Zuwächse der Variablen h als unendlich kleine Zuwächse vorzustellen und ihnen als solche *selbständige Existenz* zu geben, z. B. in den Symbolen $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc. oder dx, dy [etc.]. Aber unendlich kleine Grössen sind Grössen wie unendlich grosse (das Wort unendlich [klein] meint in der Tat nur unbestimmt полученный нами, является подтверждением нашего предположения, что y просто становится $y+k$, когда x становится $x+h$,... следовательно, когда $x+h=x+0=x$, то $y+k=y$, или $k=0$.

Но мы никоим образом не получаем, как это делает Ньютон,

$$k=2x\,dx+dx\,dx$$

или, в ньютоновом написании,

$$\dot{y}=2x\dot{x}+\dot{x}\dot{x};$$

h превращается в $\dot{x}$, а в силу этого и k — в $\dot{y}$, лишь после того, как h прошло нисхождение в ад через 0, т. е. после того, как разности x_1-x (или $(x+h)-x$), а потому и y_1-y $(=(y+k)-y)$, свелись к их абсолютным минимальным выражениям: $x-x=0$ и $y-y=0$.

Поскольку же Ньютон получает [дифференциалы] из приращений переменных x, y и т. д. не с помощью математического вывода, но сразу же ставит над приращениями штамп дифференциалов $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д., эти приращения не могут быть $=0$, ибо иначе результат был бы нулевым, так как, выраженное алгебраически, полагание с самого начала этих приращений равными нулю равносильно тому же, что и, как выше в уравнении

$$(y+k)-y=2xh+h^2,$$

положить тотчас же $h=0$, поэтому и $k=0$, и, следовательно, получить в последней инстанции $0=0$. Полагание $h=0$ недопустимо прежде, чем первая производная функция от x, в данном случае $2x$, не будет путем деления освобождена от множителя h; итак, получено

$$\frac{y_1-y}{h}=2x+h.$$

Лишь после этого может быть снята конечная разность. Дифференциальный коэффициент

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

также должен быть поэтому развернут[62] первоначально, прежде чем мы сумеем получить дифференциал

$$dy=2x\,dx.$$

Таким образом, не остается ничего другого, как представлять себе приращения переменной h бесконечно малыми и приписать им, как таковым, *самостоятельное существование*, например, в символах $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д. или dx, dy [и т. д.]. Но бесконечно малые величины также величины, как и бесконечно большие (слово бесконечно klein), die dy, dx etc. oder $\dot{y}$, $\dot{x}$ [etc.] figurieren in der Rechnung daher auch wie gewöhnliche algebraische Grössen und in der obigen Gleichung

$$(y+k)-y \text{ oder } k = 2x\,dx + dx\,dx$$

das $dx\,dx$ hat dasselbe Existenzrecht wie $2x\,dx$: das sonderbarste aber ist das Raisonnement, wodurch es gewaltsam unterdrückt wird, nämlich grade dadurch, dass die Relativität des Begriffs unendlich klein benutzt wird. $dx\,dx$ wird unterdrückt, weil es unendlich klein verglichen mit dx, also auch mit $2x\,dx$ ist oder mit $2x\dot{x}$...

Oder, wenn in

$$\dot{y} = \dot{u}z + \dot{z}u + \dot{u}\dot{z}$$

das $\dot{u}\dot{z}$ unterdrückt wird wegen seiner unendlichen Kleinheit verglichen mit $\dot{u}z$ oder $\dot{z}u$, so könnte man sich mathematisch nur damit helfen, dass $\dot{u}z + \dot{z}u$ nur ein Annäherungswert, so annähernd gedacht wie man will, ist. Derartiges Manöver kommt auch in der gewöhnlichen Algebra vor. Aber dann tritt das noch grössere Wunder ein, dass man durch diese Methode keineswegs annähernde, sondern exakt genaue Werte (sei es wie oben auch nur symbolisch richtige) für die abgeleitete Funktion [in] x erhält, wie in dem Beispiel

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}.$$

Unterdrückt man hier $\dot{x}\dot{x}$ so erhält man:

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

und

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x,$$

was die richtig abgeleitete erste Funktion von x^2 ist, wie schon das Binom[ial Theorem] beweist.

Aber das Wunder ist kein Wunder. Es wäre nur ein Wunder, wenn *kein exaktes Resultat* durch die gewaltsame Unterdrückung von $\dot{x}\dot{x}$ herauskäme. Man *unterdrückt nämlich nur einen Rechnungsfehler*, der jedoch eine unvermeidliche Konsequenz einer Methode ist, welche den unbestimmten Zuwachs, z. B. h, der Variablen sofort als Differential dx oder $\dot{x}$, als fertiges Operationssymbol, einführt und [sich] damit auch von vornherein im Differentialcalcul eine eigentümliche, von der gewöhnlichen Algebra verschiedne Rechnungsweise erwir[k]t.

[малое] на самом деле означает только неопределенно малое); эти dy, dx и т. д. или $\dot{y}$, $\dot{x}$ [и т. д.] тоже фигурируют поэтому в вычислении как обыкновенные алгебраические величины, и в приведенном выше уравнении

$$(y+k)-y \text{ или } k=2x\,dx+dx\,dx$$

член $dx\,dx$ имеет такое же право на существование, как и $2x\,dx$. Но самым удивительным является рассуждение, посредством которого этот член насильственно отбрасывается именно в силу того, что используется относительность понятия бесконечно малого; $dx\,dx$ отбрасывается потому, что он бесконечно мал по сравнению с dx, а следовательно, и с $2x\,dx$ или $2x\dot{x}$... Или если в

$$\dot{y}=\dot{u}z+\dot{z}u+\dot{u}\dot{z}$$

[слагаемое] $\dot{u}\dot{z}$ отбрасывается ввиду его бесконечной малости по сравнению с $\dot{u}z$ или $\dot{z}u$, то математическим оправданием этому может служить лишь ссылка на то, что $\dot{u}z+\dot{z}u$ имеет в наших глазах приближенное значение, мыслимое сколь угодно близким к точному. Подобного рода маневр встречается и в обыкновенной алгебре. Но тогда мы оказываемся перед лицом еще большего чуда: благодаря этому методу мы получаем для производной функции [в] x отнюдь не приближенные, а совершенно точные значения (хотя бы, как выше, лишь символически правильные), как в примере $\dot{y}=2x\dot{x}+\dot{x}\dot{x}$. Отбрасывая здесь $\dot{x}\dot{x}$, получают

$$\dot{y}=2x\dot{x}$$

и

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=2x,$$

что и есть правильная первая производная функция от x^2, как это доказывает уже [теорема о] бином[е].

Но это чудо вовсе не чудо. Наоборот, было бы чудом, если бы насильственное отбрасывание $\dot{x}\dot{x}$ *не давало бы точного результата. Отбрасывается-то ведь только некоторая ошибка в вычислении*, являющаяся, однако, неизбежным следствием метода, позволяющего вводить неопределенное приращение, например h, переменной сразу же как дифференциал dx или $\dot{x}$, как готовый оперативный символ и таким образом столь же непосредственно получать дифференциальное исчисление как самостоятельный, отличный от обыкновенной алгебры способ вычисления.

Allgemein [lässt sich] der Gang der von uns angewandten algebraischen Methode so ausdrücken.

Wenn gegeben $f(x)$, so zuerst entwickelt die «vorläufig Abgeleitete», die wir $f^1(x)$ nennen wollen:

$$1) \qquad f^1(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}=f^1(x).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\Delta y = f^1(x)\,\Delta x.$$

Also auch

$$\Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x$$

(da $y=f(x)$, [so] $\Delta y=\Delta f(x)$).

Durch das Setzen von $x_1-x=0$, also auch $y_1-y=0$, wird erhalten

$$[2)] \qquad \frac{dy}{dx}=f'(x).$$

Dann

$$dy=f'(x)\,dx;$$

also auch

$$df(x)=f'(x)\,dx$$

(da $y=f(x)$, [so] $dy=df(x)$).

Wenn we have once developed

$$1) \quad \Delta f(x)=f^1(x)\,\Delta x,$$

so

$$2) \quad df(x)=f'(x)\,dx$$

only the differential expression of 1).

[—————]

1) Wenn wir haben, x werdend zu x_1, so

$$A) \quad x_1-x=\Delta x;$$

woraus folgende conclusions zu ziehn:

$$Aa) \quad \Delta x=x_1-x; \qquad a) \quad x_1-\Delta x=x;$$

Δx, die *Differenz* zwischen x_1 und x, ist also positiv ausgedrückt, das *Inkrement* von x; denn wenn es wieder abgezogen wird von x_1, kehrt dies zu seinem ursprünglichen Zustand zurück, zu x.

Ход примененного нами алгебраического метода в общем виде можно изобразить так.

Если дана $f(x)$, то сначала развертывается «предварительная производная», которую мы будем называть $f^1(x)$:

1) $$f^1(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x).$$

Из этого уравнения следует:

$$\Delta y = f^1(x)\,\Delta x.$$

Таким образом, и

$$\Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x$$

(так как $y = f(x)$, [то] $\Delta y = \Delta f(x)$).

Полагая $x_1 - x = 0$, а следовательно, и $y_1 - y = 0$, мы получаем

[2)] $$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Тогда

$$dy = f'(x)\,dx,$$

следовательно, и

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

(так как $y = f(x)$, [то] $dy = df(x)$).

После того, как мы уже развернули

$$1)\ \Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x,$$

мы видим, что

$$2)\ df(x) = f'(x)\,dx$$

есть только дифференциальное выражение для 1).

[——————]

1) Если x обращается в x_1, то

$$\text{A)}\ x_1 - x = \Delta x;$$

отсюда — следующие заключения:

$$\text{Aa)}\ \Delta x = x_1 - x; \quad \text{a)}\ x_1 - \Delta x = x;$$

Δx, *разность* между x_1 и x, выраженная положительно, есть, следовательно, *приращение* переменной x, потому что, если его отнять обратно от x_1, последняя вернется к своему первоначальному состоянию, к x.

Die Differenz kann also doppelt ausgedrückt werden: *unmittelbar als Differenz* zwischen der angewachsenen Variablen und ihrem Zustand vor dem Wachstum, und dies ist ihr *negativer Ausdruck*; positiv als Inkrement *, *als Resultat*: *als Inkrement* des x in dem Zustand, wo es noch nicht gewachsen, und dies ist der positive Ausdruck.

Wir werden sehn, wie in der Geschichte des Differentialcalculus die doppelte Fassung Rolle spielt.

[2)] b) $x_1 = x + \Delta x$.

x_1 ist das angewachsene x selbst, sein Wachstum ist nicht von ihm getrennt; x_1 ist die ganz unbestimmte Form seines Wachstums; diese Form unterscheidet das angewachsene x, nämlich x_1, von seiner Originalform vor dem Wachstum, von x, aber sie unterscheidet nicht x von seinem Inkrement selbst. Das Verhältnis zwischen x_1 und x kann daher nur negativ ausgedrückt werden, als *Differenz*, als $x_1 - x$. Dagegen in

$$x_1 = x + \Delta x$$

ist:

1) Die Differenz *positiv* als Inkrement von x ausgedrückt.

2) Sein Wachstum ist daher nicht ausgedrückt als *Differenz*, sondern als *Summe* seiner selbst in seinem Originalzustand + seines Inkrements.

3) Technisch ausgedrückt wird x aus seinem Monom zu einem Binom, und überall, wo in der Originalfunktion x in irgendeinem Grad vorkommt, tritt für das angewachsne x ein Binom, das aus *ihm selbst und seinem Inkrement* besteht, allgemein für x^m das Binom $(x + h)^m$. Die Entwicklung des Wachstums von x wird so in der Tat einfache Anwendung des *binomischen Theorems*. Da x als erstes und Δx als zweites Glied dieses Binoms auftritt — was gegeben durch deren Verhältnis selbst, weil x [da] sein muss vor Erzeugung seines Inkrements Δx—, werden in der Tat durch das Binom nur die Funktionen von x abgeleitet, während Δx als Faktor in aufsteigenden Potenzen neben ihm figuriert, und zwar muss Δx in der ersten Potenz, also Δx^1 Faktor des zweiten Glieds der Entwicklungsreihe, d.h. der mit den binomischen Lehrsatz abgeleiteten ersten Funktion von x_1 [sein]. Dies zeigt sich gleich, wenn x in der zweiten Potenz gegeben. Aus x^2 wird $(x + \Delta x)^2$, was nichts ist als *Multiplikation* von $x + \Delta x$ durch sich selbst, [und was] liefert $x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$, d.h. das erste Glied muss die Originalfunktion von x sein; und die erste abgeleitete Funktion von x^2, nämlich hier [2]x, bildet das zweite Glied mit dem Faktor Δx^1, der im ersten Glied nur als Faktor $\Delta x^0 = 1$ auftritt. Die Abgeleitete wird also gefunden nicht

* Von Marx mit Bleistift hinzugefügt: «oder Dekrement».— *Red.*

Разность, следовательно, может быть выражена двояко: *непосредственно, как разность* между возросшей переменной и ее состоянием до возрастания — и это есть ее *отрицательное выражение* — и положительно, как приращение *, *как результат*: как *приращение* x к тому ее состоянию, когда она еще не возросла,— и это есть положительное выражение.

Мы увидим далее, какую роль играет это двоякое понимание в истории дифференциального исчисления.

$$[2)]\ \mathfrak{b})\ x = x + \Delta x.$$

x_1 есть сама возросшая x, ее рост от нее не отделен; x_1 есть совершенно неопределенная форма ее возрастания; эта форма отличает возросшую x, т. е. x_1, от ее первоначальной формы до возрастания, от x, но она не отличает x от ее приращения, как такового. В силу этого отношение между x_1 и x может быть выражено лишь отрицательно, как *разность*, как $x_1 - x$. В противоположность этому в $x_1 = x + \Delta x$:

1) Разность выражена *положительно*, как приращение x.

2) Ее возрастание выражено поэтому не как *разность*, а как *сумма* ее самой в первоначальном состоянии + ее приращение.

3) Выражаясь технически, x превращается из одночлена в некоторый двучлен, и всюду, где в первоначальной функции встречается x в какой-нибудь степени, вместо возросшей x выступает двучлен, *состоящий из самой x и ее приращения*; вообще, вместо x^m бином $(x + h)^m$. Развертывание возрастания [переменной] x становится, таким образом, в действительности простым применением *теоремы о биноме*. Так как x выступает как первый, а Δx — как второй член этого бинома,— что дано самим их взаимоотношением, поскольку x должна была существовать до возникновения ее приращения Δx,— то в действительности при помощи бинома выводятся лишь функции от x, между тем как Δx фигурирует наряду с ней в качестве множителя в возрастающих степенях; и при этом Δx в первой степени, т. е. Δx^1, должно выступать во втором члене ряда разложения множителем при первой производной функции x_1, выведенной при помощи теоремы о биноме. Это обнаруживается немедленно, когда x дана во второй степени. x^2 обращается в $(x + \Delta x)^2$, что есть не что иное, как *умножение* $x + \Delta x$ на самое себя, [и что] дает $x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$, т. е. первым членом должна быть первоначальная функция от x, а первая производная функция от x^2, т. е. в данном случае $[2]x$, образует второй член с множителем Δx^1, который [множитель] в первом члене выступает лишь как

---

* Марксом дописано карандашом: «или уменьшение».— *Ред.*

durch Differentiation, sondern durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes, also *Multiplikation*, und zwar, weil das angewachsne x_1 von vornherein selbst als Binom, als $x + \Delta x$ figuriert.

4) Obgleich in $x + \Delta x$ Δx ebenso unbestimmt ist, was ihre Grösse angeht, als die unbestimmte Variable x selbst, ist Δx bestimmt als von x unterschiedne, separate Grösse, als Frucht neben ihrer Mutter, bevor diese geschwangert war.

$x + \Delta x$ drückt nicht nur unbestimmt aus, dass x als Variable gewachsen, sondern sie drückt [auch] aus, *um was* x gewachsen, nämlich um Δx.

5) x erscheint nie als x_1; die ganze Entwicklung dreht sich um das Inkrement Δx, sobald die Abgeleitete durch die Anwendung des binomischen Lehrsatzes, also durch $x + \Delta x$ gesetzt in bestimmtem Grad von x, gefunden ist. Nur auf der linken Seite, wenn in $\frac{y_1 - y}{\Delta x}$, das

$$\Delta x = 0$$

wird, erscheint es schliesslich als $= x_1 - x$ wieder, so dass

$$\frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\text{*}.$$

Die positive Seite, die in $x_1 - x = 0$ liegt, nämlich das Werden von $x_1 = x$, kann also nie in die Entwicklung eintreten, da x_1 als solches nie in der Seite der Entwicklungsreihe auftritt; das eigentliche Geheimnis des Differentialcalculus tritt so nie hervor.

6) Wenn $y = f(x)$ und $y_1 = f(x + \Delta x)$, so können wir sagen, dass in dieser Methode die *Entwicklung von y_1 die Aufgabe löst der Findung der Abgeleiteten.*

c) $x + \Delta x = x_1$ (also auch $y + \Delta y = y_1$). Δx kann hier nur erscheinen in der Form $\Delta x = x_1 - x$, also in der *negativen* Form der *Differenz* zwischen x_1 und x, nicht in der *positiven* als Inkrement von x wie in $x_1 = x + \Delta x$.

1) Hier unterscheidet sich das gewachsne x als x_1 *von sich selbst*, bevor es wuchs, nämlich von x, aber x_1 erscheint nicht als ein um Δx gewachsnes x; x_1 bleibt daher wirklich ganz so unbestimmt wie x es ist.

2) Ferner: wie x eingeht in die eine Originalfunktion, so x_1 als Gewachsnes in die durch das Wachstum veränderte Originalfunktion. Z. B. wenn x auftritt in der Funktion x^3, so x_1 in der Funktion x_1^3.

---

* Von Marx mit Bleistift hinzugefügt: «$\left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$».— *Red.*

$\Delta x^0 = 1$. Производная, таким образом, находится не путем дифференцирования, а путем применения теоремы о биноме, т. е. *умножения*, и притом потому, что наращенная x_1 с самого начала сама фигурирует как бином, как $x + \Delta x$.

4) Хотя в $x + \Delta x$ Δx по величине является столь же неопределенной, как и сама неопределенная переменная x, тем не менее Δx определена как отличная от x особая величина, как плод рядом со своей матерью до того, как та забеременела.

$x + \Delta x$ не просто неопределенно выражает, что x как переменная возросла, но оно выражает *насколько* x возросла, именно на Δx.

5) x никогда не появляется как x_1; все развертывание вращается вокруг приращения Δx, когда производная находится с помощью применения теоремы о биноме, т. е. путем подстановки $x + \Delta x$ вместо x в определенную степень [переменной] x. Только на левой стороне, когда в $\frac{y_1 - y}{\Delta x}$ [приращение] Δx обращается в нуль, Δx появляется наконец снова как равное $x_1 - x$, так что

$$\frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\,{}^{*}.$$

Положительная сторона приравнивания $x_1 - x$ нулю, именно обращение x_1 в x, нигде не может, таким образом, выступить в разложении, поскольку x_1, как таковая, никогда не фигурирует на той стороне, на которой находится ряд разложения; подлинная тайна дифференциального исчисления, таким образом, остается невыявленной.

6) Если $y = f(x)$ и $y_1 = f(x + \Delta x)$, то мы можем сказать, что в этом методе *развертывание y_1 решает задачу отыскания производной*.

c) $x + \Delta x = x_1$ (следовательно, и $y + \Delta y = y_1$). Здесь Δx может появиться только в виде $\Delta x = x_1 - x$, т. е. в *отрицательной* форме *разности* между x_1 и x, а не в *положительной* форме приращения x, как в $x_1 = x + \Delta x$.

1) Здесь возросшая x, т. е. x_1, отличается *от самой себя*, какой она была до возрастания, т. е. от x, но x_1 не выступает как x, возросшая на Δx; поэтому x_1 остается на самом деле столь же неопределенной, как x.

2) Далее, как x входит в одну первоначальную функцию, так x_1, как возросшая,— в первоначальную функцию, измененную нарастанием. Так, например, если x выступает в функции x^3, то

* Марксом дописано карандашом: «$\left(=\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$».— *Ред.*

Während vorher durch Setzen von $(x + \Delta x)$ [dort], wo in der Originalfunktion x stand, die Abgeleitete durchs Binom fix und fertig geliefert wird, wenn auch behaftet mit Faktor Δx und als Vormann von andern Gliedern in x behaftet mit Δx^2 etc., so ist aus der unmittelbaren Form des Monoms x_1^3, des gewachsnen x, ebensowenig unmittelbar abzuleiten, als [es] aus x^3 war. Was aber damit gegeben ist, ist die *Differenz* $x_1^3 - x^3$. Wir wissen aus der Algebra, dass alle Differenzen der Form $x^3 - a^3$ durch $(x - a)$, also im gegebnen Fall durch $x_1 - x$, dividierbar sind. Indem wir also $x_1^3 - x^3$ durch $x_1 - x$ dividieren (statt [wie] vorher in der vom Grad der Funktion angegebnen Anzahl $(x + \Delta x)$ mit sich selbst zu multiplizieren), erhalten wir [vorläufig] einen Ausdruck von der Form $(x_1 - x)\, P$, wobei es nichts ändert, ob die ursprüngliche Funktion von x vielgliedrig (also x in verschiednen Potenzen enthält) oder wie in unsrem Beispiel eingliedrig. Dies $(x_1 - x)$ wird durch Division zum Nenner von $y_1 - y$ auf der linken Seite und so $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ dort hergestellt, das Verhältnis der Differenz der Funktion zur Differenz der unabhängigen Variablen x in seiner abstrakten Differenzform. Die Zerlegung der Differenz zwischen der in x_1 und der in x ausgedrückten Funktion in Glieder, die alle $x_1 - x$ zum Faktor haben, kann je nach der Beschaffenheit der Originalfunktion von x mehr oder weniger algebraische Manöver erfordern, sich also nicht immer so light geben wie in $x_1^3 - x^3$. Dies ändert nichts an der Methode.

Wo die Originalfunktion ihrer Natur nach keine direkte Zerlegung [der Differenz $f(x_1) - f(x)$] in $(x_1 - x)\, P$ zulässt, wie dies bei $f(x) = uz$ (zwei von x abhängigen Variablen) der Fall war, erscheint der [Ausdruck] $(x_1 - x)$ [im] Faktor $\frac{1}{x_1 - x}$. Ferner, wo nach der Entfernung von $x_1 - x$ auf der linken Seite durch Division beider Seiten damit, in P selbst noch $x_1 - x$ fortexistiert (wie z.B. in der Ableitung von $y = a^x$, wo wir finden

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a^x \left\{ (a-1) + \frac{(x_1 - x) - 1}{1 \cdot 2} (a-1)^2 + \text{etc.} \right\},$$

wo das Setzen von $x_1 - x = 0$ liefert

$$= a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2} (a-1)^2 + \frac{1}{3} (a-1)^3 - \text{etc.} \right\} \Big),$$

kann dies immer nur, wie im eben zitierten Beispiel, so vorkommen, dass das Setzen von $x_1 - x = 0$ es verschwinden [liesse] und dann immer an seiner Stelle positive Resultate zurückliesse. In andern Worten, die in P zurückgebliebnen $x_1 - x$ können mit den übrigen

x_1 — в функции x_1^3. В то время как прежде заменою x в первоначальной функции на $(x + \Delta x)$ производная доставлялась биномом в совершенно готовом виде, хотя и наделенная множителем Δx и выступающая предводителем других членов в x с множителями Δx^2 и т. д., теперь из непосредственной формы одночлена x_1^3, наращенной x, столь же мало можно что-нибудь непосредственно вывести, как и из x^3. Этим, однако, дана *разность* $x_1^3 - x^3$. Мы знаем из алгебры, что все разности вида $x^3 - a^3$ делятся на $(x - a)$, т. е. в данном случае на $x_1 - x$. Поэтому, когда мы делим $x_1^3 - x^3$ на $x_1 - x$ (вместо того чтобы, как прежде, множить $(x + \Delta x)$ само на себя столько раз, сколько единиц в показателе степени), мы получаем [предварительно] выражение вида $(x_1 - x)P$ независимо от того, будет ли первоначальная функция от x многочленной (т. е. содержащей x в различных степенях) или, как в нашем примере, одночленной. Это $(x_1 - x)$ становится при делении знаменателем для $y_1 - y$ на левой стороне, и, таким образом, там возникает $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ — отношение разности функции к разности независимой переменной x в его абстрактной разностной форме. Разложение разности между функцией, выраженной в x_1, и функцией, выраженной в x, на члены, каждый из которых имеет множителем $x_1 - x$, может, смотря по свойствам первоначальной функции от x, потребовать больших или меньших алгебраических маневров, стало быть, не всегда выполняется так легко, как в случае $x_1^3 - x^3$. Но это ничего не меняет в методе.

Там, где первоначальная функция в силу своей природы не допускает прямого разложения [разности $f(x_1) - f(x)$] в $(x_1 - x)P$, как это имело место для $f(x) = uz$ (две зависимые от x переменные), там [выражение] $(x_1 - x)$ появляется [в] множителе $\frac{1}{x_1 - x}$. Далее, когда после удаления $x_1 - x$ на левой стороне путем деления на него обеих сторон в самом P еще остается $x_1 - x$ (как, например, при выводе производной от $y = a^x$, где мы находим

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a^x \left\{(a-1) + \frac{(x_1 - x) - 1}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \text{и т. д.}\right\}$$

и где полагание $x_1 - x = 0$ дает

$$= a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{и т. д.}\right\}\Big) .$$

Это, как в только что приведенном примере, всегда может происходить лишь так, чтобы полагание $x_1 - x$ равным нулю, ведущее к его исчезновению, оставляло всегда на его месте положительные результаты. Иными словами, эти $x_1 - x$, остающиеся еще в P, не могут

Elementen von P nicht als Faktoren verbunden sein (als Multiplikatoren). P wäre sonst auflösbar in $P = p\,(x_1 - x)$, also, da bereits $x_1 - x = 0$ gesetzt, in $p \cdot 0$; hence $P = 0$ [63]...

Die erste endliche Differenz $x_1^3 - x^3$, wenn $y = x^3$ und $y_1 = x_1^3$, ist also entwickelt worden zu

$$y_1 - y = (x_1 - x)\,P,$$

hence

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = P.$$

P, ein Ausdruck kombiniert in x_1 und x, ist $= f^1$, die Abgeleitete der ersten endlichen Differenz, woraus $x_1 - x$ ebenso eliminiert ist, wie höhergradiges $(x_1 - x)^2$ etc. Die x_1 und x können daher nur in positiven Ausdrücken kombiniert sein, wie $x_1 + x$, $x_1 x$, $\frac{x_1}{x}$, $\sqrt{x_1 x}$ etc. Wird daher jetzt $x_1 = x$ gesetzt, so werden diese Ausdrücke respektive $2x$, x^2, $\frac{x}{x}$ oder 1, $\sqrt{xx}$ oder x etc., und nur auf der linken Seite, wo $x_1 - x$ den Nenner bildet, entsteht 0, daher der symbolische Differentialkoeffizient etc.

быть связаны с другими элементами выражения P как множители (как мультипликаторы). В противном случае P можно было бы представить в виде $P = p\,(x_1 - x)$ и, значит, поскольку $x_1 - x$ было уже положено равным нулю, в виде $p \cdot 0$; это означало бы, что $P = 0$ [63]...

Первая конечная разность $x_1^3 - x^3$, когда $y = x^3$, а $y_1 = x_1^3$, развертывается, следовательно, снова в

$$y_1 - y = (x_1 - x)\,P,$$

откуда

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = P.$$

P — выражение, представляющее собой комбинацию из x_1 и x,— равно f^1, производной от первой конечной разности, откуда $x_1 - x$ исключено так же, как и более высокие степени $(x_1 - x)^2$ и т. д. В силу этого x_1 и x могут в данном случае сочетаться только в положительных выражениях, каковы $x_1 + x$, $x_1 x$, $\frac{x_1}{x}$, $\sqrt{x_1 x}$ и т. д. Следовательно, если теперь положить $x_1 = x$, то эти выражения превратятся соответственно в $2x$, x^2, $\frac{x}{x}$ или 1, $\sqrt{xx}$ или x и т. д., и только на левой стороне, где $x_1 - x$ образует знаменатель, появляется 0, а следовательно, и символический дифференциальный коэффициент и т. д.

II. DER HISTORISCHE ENTWICKLUNGSGANG

1) Mystischer Differentialcalculus. $x_1 = x + \Delta x$, von vornherein verwandelt in $x_1 = x + dx$ oder $x + \dot{x}$, wo dx supponiert durch metaphysische *Erklärung*. Erst existierts, und dann wirds erklärt.

Dann aber auch $y_1 = y + dy$ oder $y_1 = y + \dot{y}$. Aus der willkürlichen Voraussetzung entspringt die Konsequenz, dass in der Entwicklung des Binoms $x + \Delta x$ oder $x + \dot{x}$ die Glieder in x und Δx, die man z.B. neben der ersten Abgeleiteten erhielt, *wegeskamotiert* werden müssen, um das richtige Resultat zu erhalten etc. etc. Da vom letzten Resultat bei der wirklichen Grundlegung des Differentialcalculus ausgegangen wird, nämlich von den *Differentiellen*, die antizipiert, nicht abgeleitet sind, sondern durch Erklärung *vorausgesetzt*, so ist auch $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, der symbolische Differentialkoeffizient, durch diese Erklärung *antizipiert.*

Wenn der Zuwachs von $x = \Delta x$ und Zuwachs der von ihm abhängigen Variablen $= \Delta y$, so versteht sich von selbst, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ das Verhältnis der Inkremente von x und y darstellt. Dass aber Δx im Nenner figuriert, i.e. der Zuwachs der unabhängigen Variablen im Nenner statt im Zähler, nicht umgekehrt, dies ergibt sich, indem das letzte Resultat der Entwicklung der Differentialformen selbst, nämlich *das Differential*, durch die vorausgesetzten Differentiellen auch von vornherein gegeben ist.

Nehme ich das allereinfachste Verhältnis der abhängigen Variablen y und der unabhängigen Variablen x, so ist $y = x$. So weiss ich, dass $dy = dx$ oder $\dot{y} = \dot{x}$. Da ich aber die Abgeleitete der unabhängigen [Variablen] x suche, die hier $= \dot{x}$, so habe ich beide Seiten durch $\dot{x}$

II. ИСТОРИЧЕСКИЙ ХОД РАЗВИТИЯ

1) Мистическое дифференциальное исчисление. $x_1 = x + \Delta x$ сразу превращается в $x_1 = x + dx$ или $x + \dot{x}$, где dx предпосылается с помощью метафизического *разъяснения.* Сперва существует, а затем разъясняется.

Но тогда и $y_1 = y + dy$ или $y_1 = y + \dot{y}$. Из этой произвольной предпосылки вытекает следствие, что в разложении бинома $x + \Delta x$ или $x + \dot{x}$ члены в x и Δx, которые, например, были получены рядом с первой производной, должны быть *фокуснически удалены*, чтобы получить правильный результат, и т. д. и т. д. Так как из этого последнего результата исходят при действительном обосновании дифференциального исчисления, именно [исходят] из *дифференциальных частиц*, которые предвосхищаются, не выводятся, а *предпосылаются* с помощью разъяснения, то и $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, символический дифференциальный коэффициент, также *предвосхищается* этим разъяснением.

Если приращение x равно Δx, а приращение зависимой от него переменной равно Δy, то само собой разумеется, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает отношение приращений x и y. Но то, что Δx фигурирует в знаменателе, т. е. приращение независимой переменной стоит в знаменателе, а не в числителе и не наоборот, это получается вследствие того, что сам конечный результат развития дифференциальных форм, именно *дифференциал*, также дан уже заранее посредством предпосланных дифференциальных частиц.

Рассмотрим самое простое отношение зависимой переменной y и независимой переменной x, каковым является $y = x$. В этом случае я знаю, что $dy = dx$ или что $\dot{y} = \dot{x}$. Но так как я ищу производную независимой [переменной] x, которая здесь $= \dot{x}$, то мне oder dx zu dividieren [64], also:

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1.$$

Ich weiss also ein für allemal, dass im symbolischen Differentialkoeffizient das Inkrement [der unabhängigen Variablen] im Nenner und nicht im Zähler stehn muss.

Beginnend aber mit Funktionen von x im zweiten Grad wird die *Abgeleitete* sofort gefunden durch den binomischen Lehrsatz, [welcher eine Entwicklung gibt], wo sie vom zweiten Glied fix und fertig erscheint behaftet mit dx oder $\dot{x}$, d.h. den Inkrementen ersten Grades + den wegzueskamotierenden Gliedern. Die *Eskamotage* ist aber unbewussterweise mathematisch richtig, weil sie nur wegeskamotiert Rechnungsfehler, entsprungen aus den ursprünglichen Eskamotagen von vornherein.

$x_1 = x + \Delta x$ zu verwandeln in

$$x_1 = x + dx \text{ oder } x + \dot{x},$$

wobei sich dann mit diesem Differentialbinom wie mit gewöhnlichen Binomen wirtschaften lässt, was vom technischen Standpunkt sehr probat wird.

Die einzige Frage, die noch aufgeworfen werden könnte: warum die gewaltsame Unterdrückung der im Weg stehenden Glieder [stattfindet]? Das setzt nämlich voraus, dass man weiss, dass sie im Weg stehn und nicht wirklich zur Abgeleiteten gehören.

Antwort sehr einfach: dies fand man rein experimentell. Nicht nur von vielen höher entwickelten Funktionen von x, auch in ihrer analytischen Form als Gleichungen von Kurven etc. waren die wirklichen Abgeleiteten längst bekannt, sondern man entdeckte das gleich beim allererst möglichen entscheidenden Experiment, nämlich bei Behandlung der einfachsten algebraischen Funktionen zweiten Grades, z. B.:

$$y = x^2,$$

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2,$$

$$y + \dot{y} = (x + \dot{x})^2 = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

Zieht man auf beiden Seiten die ursprüngliche Funktion x^2 ($y = x^2$) ab, so:

$$dy = 2x\,dx + dx^2,$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x};$$

unterdrücke ich die letzten Glieder auf beiden [rechten] Seiten, so:

$$dy = 2x\,dx, \quad \dot{y} = 2x\dot{x},$$

надлежит разделить обе стороны на $\dot{x}$ или dx [64], и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1.$$

Стало быть, я раз навсегда знаю, что в символическом дифференциальном коэффициенте приращение [независимой переменной] должно стоять в знаменателе, а не в числителе.

Но уже для функций от x во второй степени *производную* тотчас находят с помощью теоремы о биноме, [дающей разложение, в котором] производная появляется в готовом виде уже во втором члене с множителем dx или $\dot{x}$, т. е. с приращениями в первой степени $+$ члены, которые нужно отбросить. Однако это *трюкачество*, хотя и неосознанным образом, математически правильно, так как оно только устраняет ошибку вычисления, возникшую с самого начала из первоначальных трюков.

$x_1 = x + \Delta x$ нужно лишь превратить в

$$x_1 = x + dx \text{ или в } x + \dot{x},$$

чтобы затем с этим дифференциальным биномом можно было хозяйничать, как с обыкновенными биномами, что с технической точки зрения было бы очень удобно.

Единственный вопрос, который еще мог быть поставлен, таков: почему насильственно уничтожаются стоящие на пути члены? Ведь это уже предполагает известным, что они стоят нам поперек дороги и в действительности не принадлежат производной.

Ответ очень прост: это нашли чисто экспериментально. Не только для многих более сложных функций от x, в том числе и в их аналитической форме как уравнений кривых и т. д., были давно известны действительные производные, но и открывалось это непосредственно при первом возможном решающем эксперименте, именно при рассмотрении простейших алгебраических функций второй степени, например:

$$y = x^2,$$
$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2,$$
$$y + \dot{y} = (x + \dot{x})^2 = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

Если из обеих сторон вычесть первоначальную функцию x^2 ($y = x^2$), то:

$$dy = 2x\,dx + dx^2,$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x};$$

отбросив последние члены на обеих [правых] сторонах, получим:

$$dy = 2x\,dx, \qquad \dot{y} = 2x\dot{x},$$

und weiter

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

oder

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Aber aus $(x + a)^2$ weiss man, dass x^2 das erste Glied; das zweite $2xa$; dividiere ich diesen Ausdruck durch a, wie oben $2x\,dx$ durch dx, oder $2x\dot{x}$ durch $\dot{x}$, so erhalten $2x$ als erste Abgeleitete von x^2, als Zuwachs in x [65], den das Binom zu x^2 zugefügt hat; also mussten die dx^2 oder $\dot{x}\dot{x}$ unterdrückt werden, um die Abgeleitete zu finden; ganz abgesehn davon, dass mit dx^2 oder $x\dot{x}$ an sich nichts anzufangen war.

Man kam also auf experimentellem Weg — gleich beim zweiten Schritt — notwendig zur Einsicht, dass dx^2 oder $\dot{x}\dot{x}$ wegzueskamotieren, um nicht nur das wahre, sondern überhaupt irgendein Resultat zu erhalten.

Zweitens aber hatte man in

$$2x\,dx + dx^2 \quad \text{oder} \quad 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$$

den wahren mathematischen Ausdruck (zweite und dritte Glieder) des Binoms $(x + dx)^2$ oder $(x + \dot{x})^2$ vor sich. Dass *dies mathematisch wahre Resultat auf der ebenso mathematisch grundfalschen Voraussetzung* beruhe, $x_1 - x = \Delta x$, sei von vornherein $x_1 - x = dx$ oder $\dot{x}$, wusste man nicht [66]. Man hätte sonst dasselbe Resultat statt durch Eskamotage durch eine algebraische Operation einfachsten Stils erhalten und der mathematischen Welt präsentiert.

Also: man glaubte selbst an den mysteriösen Charakter der neu entdeckten Rechnungsart, die wahre (und dabei namentlich auch in der geometrischen Anwendung überraschende) Resultate lieferte bei positiv falschem mathematischen Verfahren. Man war so selbst mystifiziert, schätzte den neuen Fund um so höher, machte die Schar der alten orthodoxen Mathematiker um so hirntoller und rief so das gegnerische Geschrei hervor, das selbst in der Laienwelt widerhallt und nötig ist, um den Neuen den Weg zu bahnen.

2) **Der rationelle Differentialcalculus.** D'Alembert starts directly from the *poïnt de départ Newtons and Leibniz*: $x_1 = x + dx$. Aber er macht sofort die fundamentale Berichtigung: $x_1 = x + \Delta x$, d. h. x und ein *unbestimmtes*, aber prima facie *endliches Inkrement*, welches er h nennt. Die Verwandlung dieses h oder Δx in dx (bei ihm Leibnizsche Schreibart, wie bei allen Franzosen) findet sich erst als letztes Resultat

и, далее,

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

или

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=2x.$$

Но из $(x+a)^2$ известно, что x^2 есть первый член, а $2xa$ — второй; если бы я разделил это выражение на a, как мы делили выше $2x\,dx$ на dx или $2x\dot{x}$ на $\dot{x}$, то получилось бы $2x$, как первая производная от x^2, как прирост в x[65], который бином добавил к x^2. Таким образом, для отыскания производной надо было отбросить dx^2 или $\dot{x}\dot{x}$, не говоря уже о том, что с dx^2 или с $\dot{x}\dot{x}$ самим по себе ничего нельзя было предпринять.

Итак, экспериментальным путем — уже на втором шагу — неизбежно пришли к выводу о необходимости отбросить dx^2 или $\dot{x}\dot{x}$, чтобы получить не только правильный, но вообще какой-нибудь результат.

Но, с другой стороны, имели перед собой в $2x\,dx+dx^2$ или $2x\dot{x}+\dot{x}\dot{x}$ правильное математическое выражение (вторые и третьи члены) бинома $(x+dx)^2$ или $(x+\dot{x})^2$. Что этот *математически правильный результат основывается на столь же математически ложном в самом основании предположении*, будто бы $x_1-x=\Delta x$ с самого начала есть не что иное, как $x_1-x=dx$ или $\dot{x}$, — этого не знали[66]. Иначе тот же результат был бы получен и предложен математическому миру не с помощью фокуса, а посредством алгебраической операции простейшего типа.

Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому.

2) Рациональное дифференциальное исчисление. Даламбер начинает прямо с *отправного пункта Ньютона и Лейбница*: $x_1=x+dx$. Но он вносит сразу фундаментальную поправку: $x_1=x+\Delta x$, т. е. $x+$ *неопределенное*, но прежде всего *конечное приращение*, которое он называет h. Превращение этого h или Δx в dx (он, как и все французы, придерживается лейбницевых обозначений) у него лишь конечный результат развития или по крайней мере der Entwicklung oder wenigstens knapp vor Toresschluss, während es bei den Mystikern und Initiatoren des calculus als Ausgangspunkt erscheint (D'Alembert selbst geht von der symbolischen Seite aus, aber bevor sie in Symbol verwandelt). Dadurch wird sofort zweierlei erreicht [67].

a) Das Differenzen Verhältnis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$$

hat zum Ausgangspunkt seiner Bildung

1) [die Differenz] $f(x+h)-f(x)$, welche der in x gegebnen algebraischen Funktion entspricht, die entsteht, sobald man in die Originalfunktion in x, z.B. in x^3 statt x selbiges mit seinem Inkrement, $x+h$, setzt. Diese Form ($=y_1-y$, wenn $y=f(x)$) ist die der *Differenz der Funktionen*, welche zur Verwandlung ins Verhältnis des Inkrements der Funktion zum Inkrement der unabhängigen Variablen der Entwicklung bedarf, also eine reelle, nicht bloss nominelle Rolle spielt, wie bei den Mystikern; denn, wenn ich bei diesen habe

$$f(x)=x^3,$$
$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3,$$

so weiss ich von vornherein, dass in

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3,$$

[das], was sich gegenübertritt, auf die Inkremente reduziert ist. Dies braucht nicht einmal geschrieben werden, da ich auf der zweiten Seite sehe, dass das Inkrement von x^3 = den drei folgenden Gliedern, sowie in $f(x+h)-f(x)$ das Inkrement von $f(x)$ oder dy allein bleibt. Die erste Differenzgleichung spielt also nur eine von vornherein wieder verschwindende Rolle. Die Inkremente stehn sich von vornherein auf beiden Seiten gegenüber, und habe ich sie, so habe ich aus der Definition von dx, dy, dass $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ das Verhältnis etc. ist; ich brauche also die erste Differenz, gebildet durch die Subtraktion der Originalfunktion in x von der (vermittelst des Ersetzens von x durch $x+h$) veränderten Funktion (angewachsnen Funktion) nicht, um $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ zu bilden.

Bei D'Alembert ist es nötig, diese Differenz festzuhalten, weil Entwicklungsbewegungen an ihr zu vollziehn sind. Statt des positiven Ausdrucks der Differenz, nämlich des Inkrements, tritt daher der negative Ausdruck des Inkrements, nämlich die Differenz, also его заключительная стадия, тогда как у мистиков и инициаторов исчисления оно является исходным пунктом (Даламбер сам исходит из символической стороны, но до того, как она превращается в символ.) Этим достигается тотчас же двоякий результат [67].

а) Отношение разностей

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$$

имеет исходным пунктом своего образования

1) [разность] $f(x+h)-f(x)$, которая соответствует заданной в x алгебраической функции, получающейся, когда в первоначальную функцию [переменной] x, например в x^3, подставляют вместо x то же x с его приращением, т. е. $x+h$. Эта форма ($=y_1-y$, если $y=f(x)$) есть форма *разности функций*, которая нуждается в развитии, чтобы превратиться в отношение приращения функции к приращению независимой переменной; следовательно, она играет реальную роль, а не чисто номинальную, как у мистиков. Ибо, если я имею у последних

$$f(x)=x^3,$$

$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3,$$

то я заранее знаю, что противостоящие стороны равенства

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$$

сводятся к приращениям. Этого можно было и не писать, так как я на второй стороне вижу, что приращение [функции] x^3 = трем следующим членам, в точности так же, как в $f(x+h)-f(x)$, остается только приращение [функции] $f(x)$, т. е. dy. Первое разностное уравнение играет, таким образом, лишь заранее снова исчезающую роль. Приращения заранее противостоят друг другу на обеих сторонах, и если я их имею, то из определения dx, dy я могу заключить, что $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ есть отношение и т. д. Чтобы образовать $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, я не нуждаюсь, следовательно, в первой разности, получаемой вычитанием первоначальной функции в x из измененной (посредством замены x на $x+h$) функции (из возросшей функции).

У Даламбера же эту разность необходимо удерживать, потому что процесс развития должен происходить с нею. Вместо положительного выражения разности, т. е. вместо приращения, выступает поэтому на первый план на левой стороне отрицательное выражение приращения, т. е. разность, именно $f(x+h)-f(x)$. И это

$f(x+h) - f(x)$, auf der linken Seite in den Vordergrund. Und dies Betonen der Differenz statt des Inkrements (fluxion bei Newton) wenigstens vorgefühlt in der Leibnizschen Bezeichnung dy im Gegensatz zum Newtonschen $\dot{y}$.

2) $f(x+h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

Indem beide Seiten durch h dividiert werden, erhalten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Hierdurch gebildet auf der linken Seite

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1 - x}$$

die (sich) so als ein *abgeleitetes Verhältnis endlicher Differenzen erscheint*, während sie bei den Mystikern ein fertiges Verhältnis der durch die Definitionen von dx oder $\dot{x}$ und dy oder $\dot{y}$ gegebnen Inkremente war.

3) Indem jetzt in

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1 - x}$$

$h = 0$, oder $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$ gesetzt wird, verwandelt sich dieser Ausdruck in $\frac{dy}{dx}$, während durch dies Setzen von $h = 0$ die Glieder $3xh + h^2$ gleichzeitig alle geworden, und zwar durch eine richtige mathematische Operation. Sie sind also jetzt ohne Eskamotage entfernt. Man erhält:

4) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x)$.

Diese existierte wie bei den Mystikern schon als gegeben, sobald x zu $x + h$ ward denn $(x+h)^3$ statt x^3 liefert $x^3 + 3x^2h +$ etc., wo $3x^2$ bereits im zweiten Glied der Reihe als *Koeffizient* von h in der ersten Potenz erscheint. Die Ableitung ist daher wesentlich [die]selbe, wie bei Leibniz und Newton, aber die fix und fertige Abgeleitete $3x^2$ wird auf strikt algebraische Weise von ihrem sonstigen Zusammenhang *losgewickelt*. Es ist keine *Entwicklung*, sondern eine *Loswicklung* des $f'(x)$, hier $3x^2$, von seinem Faktor h und den neben ihm in Reih und Glied aufmarschierten andern Gliedern. Was aber wirklich entwickelt worden, ist die linke, symbolische Seite, nämlich dx, dy und ihr Verhältnis, der symbolische Differentialkoeffizient $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ $\left(\text{rather umgekehrt } \frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}\right)$, der seinerseits wieder einige metaphysische Schauder erregte, obgleich das Symbol mathematisch abgeleitet.

подчеркивание разности вместо приращения (флюксии у Ньютона) по крайней мере предчувствуется в лейбницевом обозначении dy в противоположность ньютонову $\dot{y}$.

2) $f(x+h)-f(x)=3x^2h+3xh^2+h^3$.

Разделив обе стороны на h, получим

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+3xh+h^2.$$

При этом на левой стороне образуется

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x},$$

появляющееся, таким образом, как *произведенное отношение конечных разностей*, тогда как у мистиков оно было готовым отношением приращений, данных посредством определений dx или $\dot{x}$ и dy или $\dot{y}$.

3) Положив теперь в

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$$

$h=0$ или $x_1=x$, т. е. $x_1-x=0$, мы тем самым превращаем это выражение в $\frac{dy}{dx}$; одновременно с этим, вследствие обращения h в 0, члены $3xh+h^2$ также обращаются в нуль, притом посредством правильной математической операции. Они, следовательно, удалены теперь без трюка. Мы получаем:

4) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}=3x^2=f'(x)$.

Последнее существовало, как и у мистиков, уже как данное, когда x превратилась в $x+h$, ибо $(x+h)^3$ вместо x^3 дает x^3+3x^2h+ + и т. д., где $3x^2$ появляется уже во втором члене ряда в качестве *коэффициента* при h в первой степени. Таким образом, вывод, по существу, тот же, что у Лейбница и Ньютона, однако совсем готовая производная $3x^2$ *высвобождается* из ее прочего окружения строго алгебраическим путем. Это не *развитие*, а *высвобождение* $f'(x)$, здесь $3x^2$, освобождение ее от множителя h и от выстроившихся рядом с ней в шеренгу остальных членов. Но что действительно было развито, так это левая символическая сторона, именно dx, dy и их отношение, символический дифференциальный коэффициент $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ $\left(\text{вернее, наоборот, } \frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}\right)$, который в свою очередь снова вызвал кое-какие метафизические ужасы, хотя символ и выведен на этот раз математическим путем.

D'Alembert hatte dem Differentialcalculus das mystische Gewand abgestreift, einen enormen Fortschritt gemacht. Obgleich sein «*Traité des fluides*» 1744 erschien (sieh p. 15 *), herrschte die Leibnizsche Methode noch jahrelang vor in Frankreich. Dass Newton in England herrschte bis in die ersten Dezennien des 19. Jahrhunderts, kaum nötig zu bemerken. Aber hier, wie in Frankreich früher, [ist] D'Alembert's Grundlegung die herrschende geworden bis jetzt, mit einigen Modifikationen.

3) **Der rein algebraische Differentialcalculus.** Lagrange, «*Théorie des fonctions analytiques*» (1797 und 1813). Der erste Ausgangspunkt sonach sub 1) als 2) war das gewachsne x; wenn

$$y \text{ oder } f(x) = \text{etc.},$$

so y_1 oder $f(x + dx)$ in der mystischen Methode, y_1 oder $f(x + h)$ ($= f(x + \Delta x)$) in der rationellen. Dieser binomische Ausgangspunkt liefert sofort auf der andern Seite die binomische Entwicklung, z.B.:

$$x^m + mx^{m-1}h + \text{etc.},$$

wo schon das zweite Glied $mx^{m-1}h$ den gesuchten realen Differentialkoeffizienten mx^{m-1} fix und fertig liefert.

a) $f(x + h)$ auf der linken Seite verhält sich zu der ihr gegenübertretenden Entwicklungsreihe, sobald $x + h$ statt x in eine gegebne Originalfunktion von x gesetzt wird, genau so wie [sich] der *unentwickelte, allgemeine Ausdruck* in der Algebra und namentlich wieder das Binom zu der ihm entsprechenden *Entwicklungsreihe* verhält, z. B. wie in

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + \text{etc.}$$

$(x + h)^3$ [sich] zu der ihm äquivalenten Entwicklungsreihe $x^3 + 3x^2h + \text{etc.}$ verhält. Damit tritt $f(x + h)$ in dasselbe algebraische Verhältnis (nur auf variable Grössen angewandt), worin sich in der ganzen Algebra der allgemeine Ausdruck zu seiner Entwicklung verhält, z. B. in

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.},$$

$\frac{a}{a-x}$ zu der Entwicklungsreihe $1 + \text{etc.}$ oder in

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$\sin(x + h)$ zu der ihr gegenüberstehenden Entwicklung.

---

* Sieh S. 140.— *Red.*

Даламбер сорвал с дифференциального исчисления покров тайны и тем самым сделал огромный шаг вперед. Однако, несмотря на появление уже в 1744 г. его «*Трактата о жидкостях*» (см. стр. 15 *), метод Лейбница господствовал во Франции еще многие годы. Вряд ли есть необходимость заметить, что Ньютон господствовал в Англии вплоть до первых десятилетий XIX века. Но и здесь, как ранее во Франции, даламберово обоснование, с некоторыми видоизменениями, стало господствующим вплоть до настоящего момента.

3) Чисто алгебраическое дифференциальное исчисление. Лагранж, «*Теория аналитических функций*» (1797 и 1813). Первым исходным пунктом, как и в 1) и 2), было возросшее x; если y или $f(x) =$ и т. д., то y_1 или $f(x + dx)$ — в мистическом методе, а y_1 или $f(x + h)$ $(= f(x + \Delta x))$ — в рациональном. Этот биномиальный исходный пункт дает нам сразу на другой стороне биномиальное разложение, например:

$$x^m + mx^{m-1}h + \text{ и т. д.},$$

где уже второй член, $mx^{m-1}h$, дает искомый реальный дифференциальный коэффициент mx^{m-1} в совершенно готовом виде.

a) Стоящее на левой стороне $f(x + h)$ относится к противостоящему ему развернутому ряду, коль скоро в заданную первоначальную функцию от x вместо x подставлено $x + h$, точно так же как в алгебре *неразвернутое общее выражение*, и прежде всего все тот же бином, относится к соответствующему ему *развернутому ряду*, например, как в

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + \text{ и т. д.}$$

$(x + h)^3$ относится к эквивалентному ему развернутому ряду $x^3+3x^2h +$ и т. д. Тем самым $f(x + h)$ вступает в то же алгебраическое соотношение (только в применении к переменным величинам), в каком во всей алгебре общее выражение находится к его разложению, как, например, в

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{ и т. д.}$$

$\frac{a}{a-x}$ относится к развернутому ряду $1 +$ и т. д. или в

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$\sin(x + h)$ относится к противостоящему ему разложению.

---

* См. стр. 141.— *Ред.*

D'Alembert hatte bloss $(x + dx)$ oder $(x + \dot{x})$ algebraisiert in $(x + h)$, also auch $f(x + h)$ aus $y + dy$, $y + \dot{y}$ in $f(x + h)$. Aber Lagrange reduziert den Gesamtausdruck auf einen rein algebraischen Charakter, indem er ihn als *allgemeinen unentwickelten Ausdruck*, der aus ihm abzuleitenden Entwicklungsreihe gegenüberstellt.

b) In der ersten Methode 1) wie in der rationellen 2) wird der gesuchte reale Koeffizient fix und fertig fabriziert durch das binomische Theorem und findet sich schon als zweites Glied der Entwicklungsreihe, daher in dem Glied [vor], das notwendig mit h^1 behaftet. Das ganze weitere Differentialverfahren, sei es wie in 1), sei es wie in 2), ist also Luxus. Werfen wir also den nutzlosen Ballast beiseit. Wir wissen ein für allemal aus der binomischen Entwicklung, dass der erste Realkoeffizient der Faktor von h ist, der zweite der von h^2 usw. Diese reellen Differentialkoeffizienten sind nichts als die der Reihe nach binomisch entwickelten *abgeleiteten Funktionen der Originalfunktion* in x (und die Einführung dieser Kategorie der *abgeleiteten Funktionen* eine der wichtigsten). Was die aparten differentiellen Formen betrifft, so wissen wir, dass Δx in dx sich umwandelt, Δy in dy, dass die erste Abgeleitete die symbolische Figur von $\frac{dy}{dx}$, die zweite Abgeleitete, der Koeffizient von $\frac{1}{2}h^2$, die symbolische Figur $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. erhält. Wir können also der Symmetrie halber unsere rein algebraisch erhaltnen Resultate gleichzeitig auch in diesen ihren symbolischen Differentialäquivalenten erscheinen lassen — Sache der Nomenklatur, die allein vom eigentlichen Differentialcalculus übrig bleibt. Die ganze wirkliche Aufgabe löst sich dann auf, Methoden zu finden (algebraische) «of developing all kinds of functions of $x + h$ in integral ascending powers of h, which in many cases cannot be effected without great prolixity of operation» [68].

Bis hierher erscheint nichts bei Lagrange, als was durch direkten Ausgang von D'Alemberts Methode findbar (da dieser auch die ganze Entwicklung der Mystiker, nur berechtigt, einschliesst).

c) Indem also das development von y_1 oder $f(x + h) =$ etc. an die Stelle des bisherigen Differentialcalculus tritt ⟦und damit in der Tat das Geheimnis der von

$$y + dy \text{ oder } y + \dot{y},\ x + dx \text{ oder } x + \dot{x}$$

ausgehenden Methoden klar hervortritt, nämlich, dass ihre wirkliche Entwicklung auf Anwendung des binomischen Lehrsatzes beruht, indem sie von vornherein das angewachsne x_1 als $x + dx$, das angewachsne y_1 als $y + dy$ darstellen und so ein Monom in ein Binom verwandeln⟧, wird aber nun die Aufgabe [gestellt], da in $f(x + h)$ eine

Даламбер просто алгебраизировал $(x + dx)$ или $(x + \dot{x})$ в $(x + h)$, следовательно, и $f(x + h)$ из $y + dy$, $y + \dot{y}$ в $f(x + h)$. Лагранж же придал всему выражению чисто алгебраический характер, противопоставив ему, как *общему неразвернутому выражению*, развернутый ряд, который должен быть из него выведен.

b) В первом методе 1), как и в рациональном 2), искомый реальный коэффициент фабрикуется в готовом виде теоремой о биноме и встречается уже как второй член развернутого ряда, стало быть, в члене, необходимо содержащем h^1. Весь дальнейший ход дифференцирования как в 1), так и в 2) есть, следовательно, роскошь. Отбросим поэтому в сторону этот бесполезный балласт. Из биномиального разложения мы раз навсегда знаем, что первый реальный коэффициент есть множитель при h, второй — при h^2 и т. д. Эти реальные дифференциальные коэффициенты представляют собою не что иное, как последовательно развитые биномиально *производные функции от первоначальной функции* в x (и введение этой категории *производных функций* — одно из важнейших). Что касается отдельных дифференциальных форм, то мы знаем, что Δx превращается в dx, Δy — в dy, что первая производная получает символическое изображение в виде $\frac{dy}{dx}$, вторая производная, коэффициент при $\frac{1}{2}h^2$,— символическое изображение $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. Мы можем, следовательно, ради симметрии полученные нами чисто алгебраическим путем результаты представить одновременно и в этих их символических дифференциальных эквивалентах — дело номенклатуры, которая одна только и остается от собственно дифференциального исчисления. В сущности, вся задача сводится в таком случае к тому, чтобы найти методы (алгебраические) «разложения всех видов функций от $x + h$ по целым возрастающим степеням h, что во многих случаях не может быть выполнено без очень громоздких операций» [68].

До сих пор у Лагранжа нет ничего, что не могло бы быть получено непосредственно исходя из метода Даламбера (ибо последний метод также содержит лишь в исправленном виде весь ход вывода у мистиков).

c) Но поскольку, следовательно, разложение y_1 или $f(x + h) =$ и т. д. выступает на место прежнего дифференциального исчисления ⟦и тем самым в действительности ясно выступает тайна методов, исходящих из $y + dy$ или $y + \dot{y}$, $x + dx$ или $x + \dot{x}$, именно что их действительное развертывание основывается на применении теоремы о биноме, поскольку они с самого начала представляют возросшее x_1 как $x + dx$, возросшее y_1 как $y + dy$, превращая тем самым моном в бином⟧, возникает задача: так как в $f(x + h)$ мы имеем функцию

Funktion von x ohne Grad vor uns, nur der *allgemeine unentwickelte Ausdruck* derselben, aus diesem unentwickelten Ausdruck selbst die allgemeine, also auch für was immer gradige Funktionen von x gültige, *Entwicklungsreihe* algebraisch abzuleiten.

Hier zur Algebraisierung des Differentialcalculus nimmt Lagrange als seinen unmittelbaren Ausgangspunkt das Theorem *des von den Newtonianern und von Newton überlebten Taylor* [69], welches in der Tat das allgemeinste, zusammenfassendste Theorem und zugleich Operationsformel des Differentialcalculus ist, nämlich die in symbolischen Differentialkoeffizienten ausgedrückte Entwicklungsreihe von y_1 oder $f\,(x+h)$, viz.:

$$y_1 \text{ oder } f\,(x+h) =$$

$$= y\,(\text{oder } f\,(x)) + \frac{dy}{dx}\,h + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{[2]} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{h^3}{[2\cdot 3]} + \frac{d^4y}{dx^4}\,\frac{h^4}{[2\cdot 3\cdot 4]} + \text{etc.}$$

d) Hier hereinzusetzen Untersuchung über Mac Laurin's und Taylor's Theoreme [70].

e) Lagrange's algebraische Entwicklung von $f\,(x+h)$ in äquivalenter Reihe, welche Taylor's $\frac{dy}{dx}$ etc. ersetzt und sie nur noch als symbolische Differentialausdrücke für die algebraisch abgeleiteten Funktionen von x bestehn lässt. (Dies nachher weiter auszuführen [71].)

от x без степени, только *общее неразвернутое ее выражение*, — алгебраически вывести из самого этого неразвернутого выражения общий, т. е. пригодный и для функции от x любой степени, *ряд разложения*.

Здесь в целях алгебраизации дифференциального исчисления Лагранж берет в качестве своего непосредственного исходного пункта теорему *Тейлора*, который *был пережит ньютонианцами и Ньютоном* [69]. В действительности это — наиболее общая, всеобъемлющая теорема и одновременно оперативная формула дифференциального исчисления, именно выраженный в символических дифференциальных коэффициентах развернутый ряд для y_1 или $f(x+h)$, т. е.

$$y_1 \text{ или } f(x+h) =$$
$$= y \,(\text{или } f(x)) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{[2]} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{[2\cdot 3]} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{[2\cdot 3\cdot 4]} + \ldots$$

d) Сюда вставить исследование о теоремах Маклорена и Тейлора [70].

e) Лагранжево алгебраическое разложение $f(x+h)$ в эквивалентный ряд, заменяющее тейлоровы $\frac{dy}{dx}$ и т. д. и сохраняюшее их лишь как символические дифференциальные выражения для алгебраически произведенных функций от x. (Развить это затем дальше [71].)

* III. FORTSETZUNG VON ENTWÜRFEN

c) Fortsetzung von [p.] 25 *.

Wir haben $x_1 - x = \Delta x$ ursprünglich für den Ausdruck der *Differenz* $x_1 - x$; die *Differenz existiert hier nur in ihrer Form als Differenz* (wie $y_1 - y$, wenn y Abhängige von x, meist geschrieben wird). Indem wir setzen $x_1 - x = \Delta x$, geben wir der Differenz bereits einen von ihr selbst verschiednen Ausdruck. Wir drücken, wenn auch in unbestimmter Form, den *Wert dieser Differenz* aus als eine von der Differenz selbst verschiedne Grösse. Z. B. $4 - 2$ ist reiner Ausdruck von Differenz zwischen 4 und 2; aber $4 - 2 = 2$ ist die Differenz ausgedrückt in 2 (auf der rechten Seite): a) in positiver Form, also nicht mehr als Differenz; b) die Subtraktion ist vollbracht, die Differenz berechnet und $4 - 2 = 2$ liefert mir $4 = 2 + 2$. Die zweite 2 erscheint hier in der positiven *Form des Inkrements* von der *ursprünglichen* 2, also direkt in *einer der Differenzform entgegengesetzten Form*. (Ebenso $a - b = c$, $a = b + c$, wo c als Inkrement von b erscheint, ebenso in $x_1 - x = \Delta x$, $x_1 = x + \Delta x$, wo Δx unmittelbar als Inkrement von x auftritt.)

Das blosse ursprüngliche Setzen von $x_1 - x = \Delta x$ = anything setzt also an die Stelle der *Differenzform* eine andre, und zwar die Form einer Summe $x_1 = x + \Delta x$, und das nur Differenz ausdrückende $x_1 - x$ zugleich als Äquivalent des Werts dieser Differenz, der Grösse Δx.

Ebenso ergibt sich aus $x_1 - x = \Delta x$, $x_1 - \Delta x = x$. Wir haben hier wieder auf der linken Seite die Differenzform, aber als Differenz zwischen dem angewachsnen x_1 und seinem eignen, selbständig neben es getretnen Inkrement. Die Differenz zwischen ihm und dem Inkrement von $x = \Delta x$ ist eine Differenz, die jetzt schon, wenn auch unbestimmt, einen bestimmten Wert von x ausdrückt.

Geht man aber aus von dem mystischen Differentialcalculus, wo $x_1 - x$ sofort auftritt als $x_1 - x = dx$, und korrigiert man

---

* Sieh S. 152.— *Red.*

* III. ПРОДОЛЖЕНИЕ НАБРОСКОВ

c) Продолжение стр. 25 *.

Мы имеем $x_1 - x = \Delta x$ первоначально для выражения *разности* $x_1 - x$; *разность существует здесь только в своей форме разности* (аналогично чаще всего пишут $y_1 - y$, когда y — зависимая от x). Полагая $x_1 - x = \Delta x$, мы тем самым придаем разности выражение, уже отличное от нее самой. Мы выражаем, хотя и в неопределенной форме, *значение этой разности* как отличной от самой разности величины. Так, например, $4 - 2$ есть чистое выражение разности между 4 и 2; но $4 - 2 = 2$ есть разность, выраженная через 2 (на правой стороне): a) в положительной форме, следовательно, уже не как разность; b) вычитание произведено, разность вычислена, и $4 - 2 = 2$ дает мне $4 = 2 + 2$. Второе 2 выступает здесь в положительной *форме приращения первоначального* 2, стало быть, в форме, *прямо противоположной форме разности*. (Точно так же $a - b = c$, $a = b + c$, где c выступает как приращение b, и так же в $x_1 - x = \Delta x$, $x_1 = x + \Delta x$, где Δx фигурирует непосредственно как приращение x.)

Простое первоначальное полагание $x_1 - x = \Delta x =$ чему-то ставит, таким образом, на место *формы разности* некоторую другую, а именно форму суммы $x_1 = x + \Delta x$; вместе с тем $x_1 - x$, выражающее только разность, [становится] эквивалентом значения этой разности, величины Δx.

Так же из $x_1 - x = \Delta x$ получается $x_1 - \Delta x = x$. Мы имеем здесь снова на левой стороне форму разности, но как разности между возросшей x_1 и ее собственным самостоятельно выступающим рядом с ней приращением. Разность между ней и приращением x, равным Δx, есть разность, выражающая теперь уже, хотя и в неопределенной форме, некоторое определенное значение x.

Но если исходят из мистического дифференциального исчисления, где $x_1 - x$ тотчас выступает как $x_1 - x = dx$, и если сначала

* См. стр. 153.— *Ред.*

d'abord dx zu Δx, so geht man aus von $x_1 - x = \Delta x$; also von $x_1 = x + \Delta x$; dies kann aber dann seinerseits wieder umgedreht werden in $x + \Delta x = x_1$, so dass der Anwachs von x wieder die unbestimmte Form x_1 erhält und als solcher direkt in den calculus eintritt. Dies der Ausgangspunkt der von uns angewandten algebraischen Methode.

d) Aus diesen einfachen Formunterschieden ergibt sich sofort eine Grundverschiedenheit in der Behandlung des calculus, die wir im einzelnen nachgewiesen (sieh beiliegende lose Blätter) [72] bei Analyse der D'Alembertschen Methode. Hier nur im allgemeinen zu bemerken.

1) Tritt die *Differenz* $x_1 - x$ (also auch $y_1 - y$) sofort als ihr Gegenteil, *als Summe* $x_1 = x + \Delta x$ auf, ihre Wertgrösse daher sofort in *der positiven Form des Inkrements* Δx, so, wenn in der *Originalfunktion* in x überall statt x gesetzt wird $x + \Delta x$, werden zu entwickeln [sein] Binome von bestimmtem Grad, und die Entwicklung von x_1 löst sich auf in *Anwendung des binomischen Lehrsatzes*. Der binomische Lehrsatz ist nichts als der allgemeine Ausdruck davon, welchen Ausdruck ein Binom ersten Grads m mal mit sich selbst *multipliziert* liefert. Die *Multiplikation* wird daher zur Entwicklungsmethode von x_1 [oder] $(x + \Delta x)$, wenn wir die *Differenz* von vornherein als *ihr Gegenteil*, als *Summe* darstellen.

2) Da in dem allgemeinen Ausdruck $x_1 = x + \Delta x$ die Differenz $x_1 - x$ unter der positiven Form Δx, i. e. unter der Form des *Inkrements*, *letztes oder zweites* Glied des Ausdrucks ist, so wird x erstes und Δx zweites Glied der Originalfunktion in x, sobald diese als Funktion in $x + \Delta x$ sich darstellt. Wir wissen aber aus dem binomischen Lehrsatz, dass das zweite Glied nur als Faktor in aufsteigenden Potenzen neben dem ersten Glied figuriert, als Multiplikator, so dass der Faktor des ersten Ausdrucks in x (der durch den Grad des Binoms bestimmt ist) $(\Delta x)^0 = 1$, der Multiplikator des zweiten Glieds $(\Delta x)^1$, der des dritten $(\Delta x)^2$ etc., ist. Die Differenz, unter der positiven Form des Inkrements, tritt also nur als Multiplikator auf, und zwar zuerst wirklich als Multiplikator (da $(\Delta x)^0 = 1$) im zweiten Glied des entwickelten Binoms $(x + \Delta x)^m$.

3) Andrerseits betrachten wir die Entwicklung der Funktionen in x selbst, so gibt uns das binomische Theorem für dies erste Glied, hier x, der Reihe nach seine abgeleiteten Funktionen. Z. B. wenn wir haben $(x + h)^4$, wo h im algebraischen Binom die bekannte, x die unbekannte Grösse sei, so erhalten wir

$$x^4 + 4x^3h + \text{etc.}$$

$4x^3$, das im zweiten Glied steht und h in der ersten Potenz zum Faktor исправляют dx в Δx, то исходят из $x_1 - x = \Delta x$; следовательно, из $x_1 = x + \Delta x$; но это в свою очередь может быть затем снова перевернуто в $x + \Delta x = x_1$, так что возрастание x вновь приобретает неопределенную форму x_1 и, как таковое, непосредственно вступает в исчисление. Это исходный пункт примененного нами алгебраического метода.

d) Из этих простых различий в форме непосредственно получается тотчас же коренное различие в трактовке исчисления, которое мы в частностях охарактеризовали (см. прилагаемые отдельные листки) [72] при анализе метода Даламбера. Здесь ограничусь замечаниями лишь общего характера.

1) Если *разность* $x_1 - x$ (а следовательно, и $y_1 - y$) выступает сразу же как ее противоположность, *как сумма* $x_1 = x + \Delta x$, и поэтому величина ее значения тотчас же принимает *положительную форму приращения* Δx, тогда если в *первоначальную функцию* в x вместо x всюду подставить $x + \Delta x$, то нужно будет разложить в ряд биномы определенной степени и разложение x_1 сведется к *применению теоремы о биноме*. Теорема о биноме есть не что иное, как общее выражение того, какое выражение дает бином первой степени, m раз *помноженный* на самого себя. Поэтому *умножение* становится методом разложения x_1 [или] $(x + \Delta x)$, если мы сразу же представим *разность* как *ее противоположность*, как *сумму*.

2) Так как в общем выражении $x_1 = x + \Delta x$ разность $x_1 - x$, данная в положительной форме Δx, т. е. в форме *приращения*, есть *последний или второй* член выражения, то x становится первым, а Δx — вторым членом первоначальной функции в x, когда последняя представляется как функция в $x + \Delta x$. Но из теоремы о биноме нам известно, что второй член фигурирует лишь как множитель в возрастающих степенях рядом с первым членом, и притом так, что множителем первого выражения, содержащего x (определенного степенью бинома), является $(\Delta x)^0 = 1$, множителем второго члена $(\Delta x)^1$, множителем третьего члена $(\Delta x)^2$ и т. д. Разность в положительной форме приращения выступает, таким образом, лишь как множитель, и притом впервые действительно как множитель (так как $(\Delta x)^0 = 1$) во втором члене развернутого бинома $(x + \Delta x)^m$.

3) С другой стороны, если мы рассмотрим разложение функций по самому x, то теорема о биноме дает нам для этого первого члена, здесь для x, одну за другой производные функции по этому x. Например, если мы имеем $(x + h)^4$, где h в алгебраическом биноме считаем известной, а x — неизвестной величиной, то мы получаем

$$x^4 + 4x^3h + \text{ и т. д.}$$

$4x^3$, которое стоит во втором члене и имеет множителем h в первой hat, ist also die erste abgeleitete Funktion von x, oder algebraisch ausgedrückt: wenn wir den *unentwickelten Ausdruck des Binoms* $(x + h)^4$ haben, so gibt uns die Entwicklungsreihe als erster Zuwachs zu x^4 (als Inkrement davon) $4x^3$, welches als Koeffizient von h auftritt. Ist aber x eine variable Grösse und haben wir $f(x) = x^4$, so wird dies durch sein Anwachsen selbst zu $f(x + h)$ oder in der ersten Form

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4 = x^4 + 4x^3 \Delta x + \text{etc.}$$

x^4, das uns im gewöhnlichen algebraischen Binom $(x + h)^4$ als erstes Glied dieses Binom[ialenentwicklungs] geliefert wird, erscheint jetzt im binomischen Ausdruck der Variablen x, in $(x + \Delta x)^4$ als Reproduktion der Originalfunktion in x, bevor sie wuchs und zu $(x + \Delta x)$ wurde. Es ist von vornherein aus der Natur des binomischen Lehrsatzes klar, dass wenn $f(x) = x^4$ zu $f(x + h) = (x + h)^4$ wird, das erste Glied von [der Entwicklung des] $(x + h)^4$ ist gleich x^4, d. h. = der Originalfunktion in x sein muss; $(x + h)^4$ muss beides enthalten, die Originalfunktion in x (hier x^4) + dem Zusatz aller Glieder, die x^4 dadurch erwirbt, dass es zu $(x + h)^4$ geworden, also das erste Glied [der Entwicklung] des Binoms $(x + h)^4$ [die Originalfunktion ist].

4) Ferner: das zweite Glied der binomischen Entwicklung $4x^3h$ liefert uns sofort *fix und fertig* die erste aus x^4 abgeleitete Funktion, nämlich $4x^3$. Diese Ableitung also gewonnen durch die Entwicklung von

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4;$$

gewonnen dadurch, dass die Differenz $x_1 - x$ von Anfang an als ihr *Gegenteil*, als *Summe* $x + \Delta x$, dargestellt wurde.

Es ist also die binomische Entwicklung von $f(x + \Delta x)$ oder y_1, wozu $f(x)$ durch das Wachsen von x geworden, die uns die erste Abgeleitete, den Koeffizient von h (in der binomischen Reihe) liefert, und zwar gleich beim Beginn der binomischen Entwicklung, in ihrem zweiten Glied. Die Ableitung ist also in keiner Weise durch Differentiation gewonnen, sondern einfach durch Entwicklung von $f(x + h)$ oder y_1 in einem bestimmten, durch einfache Multiplikation hervorgebrachten Ausdruck.

Der Angelpunkt dieser Methode ist also die Entwicklung des unbestimmten Ausdrucks y_1 oder $f(x + h)$ in bestimmter binomischer Form, keineswegs aber die Entwicklung von $x_1 - x$ und daher auch von $y_1 - y$ oder $f(x + h) - f(x)$ als Differenzen.

5) Die einzige Differenzgleichung, die in dieser Methode vorkommt, ist die, dass, da wir sofort erhalten:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4 = x^4 + 4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4,$$

степени, есть, следовательно, первая производная функция от x, или, говоря алгебраически: если мы имеем *неразвернутое выражение бинома* $(x+h)^4$, то развернутый ряд дает нам в качестве первого добавления к x^4 (в качестве его прироста) $4x^3$, которое выступает как коэффициент при h. Если же x — величина переменная и мы имеем $f(x)=x^4$, то самое возрастание последнего обращает это [выражение] в $f(x+h)$ или, в первой форме, в

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4=x^4+4x^3\Delta x+ \text{ и т. д.}$$

x^4, которое в обыкновенном алгебраическом биноме $(x+h)^4$ было получено нами в качестве первого члена [разложения] бинома, теперь выступает в биномиальном выражении переменной x, в $(x+\Delta x)^4$, как воспроизведение первоначальной функции в x до того, как последняя возросла и стала $(x+\Delta x)$. Заранее из самой природы биномиальной теоремы ясно, что если $f(x)=x^4$ превращается в $f(x+h)=(x+h)^4$, то первый член в [разложении] $(x+h)^4$ равен x^4, т. е. должен быть равен первоначальной функции в x; $(x+h)^4$ должно содержать и то и другое: первоначальную функцию в x (здесь x^4) + все члены, приобретаемые x^4 при превращении его в $(x+h)^4$, следовательно, первый член [в разложении] бинома $(x+h)^4$ [есть первоначальная функция].

4) Далее, второй член биномиального разложения $4x^3h$ дает нам тотчас же *в совершенно готовом виде* первую производную функцию от x^4, а именно $4x^3$. Эта производная получена, таким образом, посредством развертывания

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4,$$

получена благодаря тому, что разность x_1-x с самого начала была представлена как ее *противоположность*, как *сумма* $x+\Delta x$.

Итак, именно биномиальное разложение $f(x+\Delta x)$ или y_1, получаемого из $f(x)$ при возрастании x, доставляет нам первую производную, коэффициент при h (в биномиальном ряду), и притом уже в начале биномиального разложения, в его втором члене. Производная, следовательно, получена отнюдь не путем дифференцирования, а просто с помощью разложения $f(x+h)$ или y_1 в некоторое определенное выражение, полученное простым умножением.

Итак, краеугольным камнем этого метода является разложение неопределенного выражения y_1 или $f(x+h)$ в определенную биномиальную форму, а отнюдь не разложение x_1-x, а следовательно, и y_1-y или $f(x+h)-f(x)$ как разностей.

5) Единственное разностное уравнение, встречающееся в этом методе, состоит в том, что так как мы тотчас получаем:

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4=x^4+4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+4x\Delta x^3+\Delta x^4,$$

wenn wir schreiben:

$$x^4 + 4x^3\,\Delta x + 6x^2\,\Delta x^2 + 4x\,\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4,$$

also die Originalfunktion x^4, die den Anfang der Reihe bildet, hinten wieder abziehn, wir das *Inkrement* vor uns haben, das die Originalfunktion in x durch die binomische Entwicklung erhalten hat. Newton schreibt deshalb auch so. Wir haben also das Inkrement

$$4x^3\,\Delta x + 6x^2\,\Delta x^2 + 4x\,\Delta x^3 + \Delta x^4,$$

das Inkrement der Originalfunktion x^4. Wir brauchen deshalb auf der umgekehrten Seite *keinen Differenz*[*ausdruck*] *irgendeiner Art.* Dem Inkrement von x entspricht das Inkrement von y, wenn

$$y \text{ oder } f\,(x) = x^4.$$

Also schreibt Newton auch sofort:

$$dy, \quad \textit{bei ihm} \quad \dot{y} = 4x^3\dot{x} + \text{etc.}$$

6) Die ganze Weiterentwicklung besteht nun darin, dass wir die fix und fertig Abgeleitete $4x^3$ zu befreien haben von ihrem Faktor Δx und von ihren Nebengliedern, loszuschälen haben von ihrer Umgebung. Dies also keine Entwicklungs-, sondern *Loswicklungsmethode.*

e) Die Differentiation der $f\,(x)$ (als [eines] allgemeinen Ausdrucks).

Bemerken wir d'abord, dass der Begriff der «abgeleiteten Funktion» für die sukzessiven Realäquivalente der symbolischen Differentialkoeffizienten, den ursprünglichen Entdeckern des Differentialcalculus und ihren ersten Nachfolgern ganz unbekannt, in der Tat erst durch Lagrange eingeführt ward. Bei den erstern figuriert nur die abhängige Variable, z. B. y als *Funktion von* x, ganz entsprechend dem ursprünglichen algebraischen Sinn von *Funktion*, zuerst angewandt für sogenannte undeterminierte Gleichungen, wo mehr Unbekannte als Gleichungen gegeben, wo also z.B. y verschiedne Werte annimmt, je nachdem für x verschiedne Werte unterstellt werden. Bei Lagrange aber ist die Originalfunktion der bestimmte algebraische Ausdruck von x, der differenziert werden soll; also wenn y oder $f\,(x) = x^4$, so ist x^4 die Originalfunktion, $4x^3$ die erste Abgeleitete usw. Um also die Konfusion zu vermeiden, ist y die Abhängige oder $f\,(x)$, *Funktion von x* zu nennen, dagegen die Originalfunktion im Lagrangeschen Sinn *Originalfunktion in x* und entsprechend die «Abgeleiteten» Funktionen *in x.*

In der algebraischen Methode, wo wir erst f^1, die vorläufig Abgeleitete oder [das Verhältnis der] endlichen Differenzen entwickeln, und erst aus ihr die definitive Abgeleitete f', wissen wir von vornherein: $f\,(x) = y$, also a) $\Delta f(x) = \Delta y$, und daher umgedreht $\Delta y = \Delta\,f\,(x)$.

то, когда мы пишем:

$$x^4+4x^3\,\Delta x+6x^2\,\Delta x^2+4x\,\Delta x^3+\Delta x^4-x^4,$$

т. е. в конце снова вычитаем первоначальную функцию x^4, являющуюся началом ряда, мы имеем перед собой *приращение*, которое получила первоначальная функция в x посредством биномиального разложения. Ньютон поэтому так и пишет. Мы имеем, следовательно, приращение

$$4x^3\,\Delta x+6x^2\,\Delta x^2+4x\,\Delta x^3+\Delta x^4,$$

т. е. приращение первоначальной функции x^4. Мы не нуждаемся поэтому на противоположной стороне *ни в каком разностном выражении какого бы то ни было рода*. Приращению x соответствует приращение y, причем y или $f(x)=x^4$. Недаром и Ньютон пишет сразу:

$$dy,\ \textit{у него}\ \dot{y}=4x^3\dot{x}\ \text{и т. д.}$$

6) Все дальнейшее развитие состоит теперь в том, чтобы освободить совершенно готовую производную $4x^3$ от ее множителя Δx и от ее соседних членов, высвободить ее из ее окружения. Таким образом, это *метод* не развития, а *высвобождения*.

е) Дифференцирование $f(x)$ (как общего выражения).

Заметим сначала, что понятие «производной функции» для последовательных реальных эквивалентов символических дифференциальных коэффициентов, совершенно неизвестное тем, кто первый открыл дифференциальное исчисление, и их первым последователям, на самом деле было впервые введено Лагранжем. У первых фигурирует лишь зависимая переменная, например y, как *функция от* x, в полном соответствии с первоначальным алгебраическим смыслом [слова] *функция*, применявшегося сперва к так называемым неопределенным уравнениям, где дано больше неизвестных, чем уравнений, и где, стало быть, y, например, принимает различные значения в зависимости от различных значений, подставляемых вместо x. Между тем у Лагранжа первоначальная функция есть определенное алгебраическое выражение от x, подлежащее дифференцированию; следовательно, если y или $f(x)=x^4$, то x^4 есть первоначальная функция, $4x^3$ — первая производная и т. д. Поэтому, во избежание путаницы, будем называть y, зависимую [переменную], или $f(x)$, *функцией от* x, первоначальную же функцию в лагранжевом смысле — *первоначальной функцией в* x, соответственно «производные» — функциями *в* x.

В алгебраическом методе, где мы сперва развертываем f^1 — предварительную производную или [отношение] конечных разностей и лишь из нее окончательную производную f', мы заранее знаем, что $f(x)=y$, следовательно: а) $\Delta f(x)=\Delta y$, а поэтому

Was zunächst zu entwickeln ist, ist grade $\Delta f(x)$, der Wert der endlichen Differenz von $f(x)$.

Wir finden:

$$f^1(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x).$$

Also auch:

$$\Delta y = f^1(x)\,\Delta x,$$

und da $\Delta y = \Delta f(x)$, so

$$\Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x.$$

Die weitere Entwicklung des Differentialausdrucks, die uns schliesslich liefert

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

ist bloss Differentialausdruck der vorher entwickelten endlichen Differenz.

In der gewöhnlichen Methode wird

$$dy \text{ oder } df(x) = f'(x)\,dx$$

überhaupt nicht entwickelt, sondern, sieh oben, das fix und fertig durch das Binom $(x + \Delta x)$ oder $(x + dx)$ gelieferte $f'(x)$ nur *losgewickelt* von seinem Faktor und seinen Nebengliedern.

и, наоборот, $\Delta y = \Delta f(x)$. Что прежде всего следует теперь развить, есть как раз $\Delta f(x)$ — значение конечной разности от $f(x)$.

Мы находим:

$$f^1(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x).$$

Значит, и

$$\Delta y = f^1(x)\,\Delta x,$$

а так как $\Delta y = \Delta f(x)$, то

$$\Delta f(x) = f^1(x)\,\Delta x.$$

Дальнейшее развертывание дифференциального выражения, дающее нам в конечном счете

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

есть просто дифференциальное выражение развернутой ранее конечной разности.

В обычном методе

$$dy \text{ или } df(x) = f'(x)\,dx$$

вообще не развертывается, но, см. выше, доставляемая биномом $(x + \Delta x)$ или $(x + dx)$ вполне готовая $f'(x)$ только *высвобождается* от своего множителя и сопутствующих членов.

* ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА. ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА

1. AUS DEM MANUSKRIPT «TAYLOR'S THEOREM, MAC LAURIN'S THEOREM UND LAGRANGE'S THEORIE DER ABGELEITETEN FUNKTIONEN» [73]

I

Newton's Entdeckung des binomischen (in seiner Anwendung auch polynomischen) Theorems revolutionierte die ganze Algebra, indem sie zuerst eine *allgemeine Theorie der Gleichungen* ermöglichte.

Das binomische Theorem — und dies haben die Mathematiker entschieden anerkannt, namentlich seit Lagrange,— ist aber auch die Hauptbasis des Differentialcalculs. Schon der Augenschein zeigt, dass ausser den Kreisfunktionen, deren Ausgänge die Trigonometrie liefert, alle monomischen Differentials wie x^m, a^x, $\log x$ etc. allein aus dem binomischen Theorem entwickelt werden [74].

Es ist jetzt sogar Lehrbuchsmode, nachzuweisen, dass wie aus Taylor's und Mac Laurin's Theoremen das binomische Theorem entwickelbar, so umgekehrt [75]. Dennoch ist nirgendwo, selbst nicht bei Lagrange, dessen Theorie der abgeleiteten Funktionen dem Differentialcalculus eine neue Basis gab, der Zusammenhang zwischen dem binomischen Lehrsatz und jenen Theoremen in seiner ganzen waldursprünglichen Einfachheit klargelegt worden, und es ist hier wie überall wichtig, der Wissenschaft den Schleier des Geheimnisvollen abzureissen.

Taylor's Theorem, historisch vorangehend dem des Mac Laurin', gibt — unter bestimmten Voraussetzungen — für jede Funktion x, die um ein positives oder negatives Inkrement h wächst [76], also im allgemeinen für $f(x \pm h)$, eine Serie symbolischer Ausdrücke anzeigend, durch welche Reihe von Differentialoperationen $f(x \pm h)$ entwickelbar. Es handelt sich hier also um Entwicklung einer beliebigen *Funktion* x, *sobald sie variiert*.

Mac Laurin dagegen — auch unter bestimmten Voraussetzungen — gibt die allgemeine Entwicklung *jeder Funktion* x *selbst*, ebenfalls

1. ИЗ РУКОПИСИ «ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА, ТЕОРЕМА МАКЛОРЕНА И ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ» [73]

I

Открытие Ньютоном биномиальной теоремы (в ее применении к полиномиальной) также произвело революционный переворот во всей алгебре — прежде всего потому, что сделало возможной *общую теорию уравнений*.

Но теорема о биноме — и это определенно признано математиками, в особенности со времен Лагранжа,— является также главной основой дифференциального исчисления. Уже беглый взгляд показывает, что, за исключением круговых функций, источником которых является тригонометрия, все дифференциалы одночленов, таких, как x^m, a^x, $\log x$ и т. д., выводятся только с помощью теоремы о биноме [74].

В учебниках теперь даже вошло в моду показывать, что как из теорем Тейлора и Маклорена можно вывести теорему о биноме, так и обратно [75]. Однако нигде, даже у Лагранжа, чья теория производных функций подвела новую базу под дифференциальное исчисление, эта связь между теоремой о биноме и двумя другими не раскрыта во всей ее девственной простоте, и здесь, как и всюду, важно сорвать с науки покров тайны.

Теорема Тейлора, исторически предшествующая теореме Маклорена, дает — при определенных предположениях — для всякой функции x, когда x возрастает на положительное или отрицательное приращение h [76], т. е. вообще для $f(x \pm h)$, последовательность символических выражений, указывающую, посредством какого ряда дифференциальных операций можно разложить $f(x \pm h)$. Таким образом, здесь речь идет о разложении произвольной *функции x, коль скоро x изменяется.*

В противоположность этому Маклорен — тоже в определенных предположениях — *для каждой функции x* дает общее разложение in einer Serie symbolischer Ausdrücke, die zeigt, wie solche Funktion, deren Lösung algebraisch oft sehr weitläufig und kompliziert, durch den Differentialcalcul, leicht zu finden. Die Entwicklung beliebiger Funktion x meint aber nichts als die *Entwicklung der mit* [Potenzen] *der unabhängigen Variablen x kombinierten konstanten Funktionen* [77], denn die Entwicklung der Variablen selbst wäre identisch mit ihrer Variation, also mit dem Objekt des Taylorschen Theorems.

Beide Theoreme sind grossartige Verallgemeinerungen, worin die Differentialsymbole selbst zum Inhalt der Gleichung werden. Statt der wirklich sukzessiv abgeleiteten Funktionen von x werden nur dargestellt die Abgeleiteten unter der Form ihrer symbolischen Äquivalente, welche ebenso viele zu verrichtenden Operationsstrategeme anzeigen, unabhängig von der Gestalt der Funktion $f(x)$ oder der Funktion $f(x+h)$. So werden zwei Formeln erhalten, die auf alle besondern Funktionen x oder $x+h$ anwendbar mit gewissen Einschränkungen.

Formel Taylor's:

$f(x+h)$ oder $y_1 =$

$$= y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

Formel Mac Laurin's:

$f(x)$ oder $y =$

$$= (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

Der blosse Augenschein zeigt, dass hier historisch, wie theoretisch, das was man die *Arithmetik des Differentialcalculus* nennen kann, d.h. die Entwicklung seiner Grundoperationen, bereits als vorhanden und bekannt vorausgesetzt wird. Dies im folgenden nicht zu vergessen, wo ich diese Bekanntschaft unterstelle.

II

. . . .

Mac Laurin's Theorem kann als *besondrer Kasus* von Taylor's Theorem betrachtet werden.

Bei Taylor haben wir:

$$y = f(x),$$

$$y_1 = f(x+h) = f(x) \text{ oder } y + \frac{dy}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.} +$$

$$+ \left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \,\ldots\, n}\right] \frac{d^ny}{dx^n} h^n + \text{etc.}$$

самой этой функции x также в ряд символических выражений, указывающий, как с помощью дифференциального исчисления легко разложить такую функцию, разложение которой алгебраическим путем часто очень громоздко и сложно. Но разложение произвольной функции x не означает ничего другого, кроме *получения комбинируемых со* [степенями] *независимой переменной x постоянных функций* [77], так как развертывание самой переменной было бы тождественно с ее варьированием, т. е. с объектом теоремы Тейлора.

Обе теоремы представляют собой колоссальные обобщения, в которых сами дифференциальные символы становятся содержанием уравнения. Вместо действительно последовательно выведенных функций от x, производные представляются лишь в форме их символических эквивалентов, каждый из которых, независимо от вида функции $f(x)$ или функции $f(x+h)$, предписывает некоторую подлежащую выполнению оперативную стратагему. Таким образом, получаются две формулы, применимые, с некоторыми ограничениями, ко всем частным функциям x или $x+h$.

Формула Тейлора:

$$f(x+h) \text{ или } y_1 = \\ = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Формула Маклорена:

$$f(x) \text{ или } y = \\ = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Уже на первый взгляд видно, что как исторически, так и теоретически здесь предполагается имеющейся уже и известной *арифметика* (как ее можно назвать) *дифференциального исчисления*, т. е. развитие его основных операций. Этого не следует забывать в дальнейшем, где я уже это знакомство предполагаю.

II

. . . .

Теорему Маклорена можно рассматривать как *частный случай* теоремы Тейлора. У Тейлора мы имеем:

$$y = f(x),$$

$$y_1 = f(x+h) = f(x) \text{ или } y + \frac{dy}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{ и т. д. } + \\ + \left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}\right] \frac{d^ny}{dx^n} h^n + \text{ и т. д.}$$

Setzen wir in $f(x+h)$ und ebenso auf der rechten Seite in y oder $f(x)$ und seinen unter der Form $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. symbolisch abgeleiteten Funktionen $x=0$, so dass die nichts mehr erhalten als die Entwicklung des konstanten Elements von x [78], so:

$$f(h)=(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1\cdot 2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

$y_1=f(x+h)=f(0+h)$ wird dann dieselbe Funktion von h, welche $y=f(x)$ von x ist, da h in $f(h)$ eingeht, wie x in $f(x)$, und (y) in $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ etc. jede Spur von x ausgelöscht ist.

Wir können daher auf beiden Seiten x statt h setzen und erhalten dann:

$$f(x)=(y) \text{ oder } f(0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1\cdot 2}+\text{etc.}+ \\ +\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\text{etc.}$$

Oder wie andere das geschrieben haben:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2}+f'''(0)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

wie z.B. in der Entwicklung $f(x)$ oder $(c+x)^m$:

$$(c+0)^m=f(0)=c^m,$$

$$m(c+0)^{m-1}x=mc^{m-1}x=f'(0)\,x \text{ etc.}$$

Ich werde im folgenden, wo wir zu Lagrange kommen, Mac Laurin's Theorem als bloss besonderen Kasus von dem Taylor's nicht weiter berücksichtigen. Hier sei nur noch bemerkt, dass es ebenso seine so g. «failures» hat wie Taylor's Theorem. Bei ersterem entspringen die failures alle aus der irrationellen Natur der konstanten Funktion, bei letzterem aus der der variablen [79].

Man kann sich nun fragen:

Hatte Newton bloss die Resultate der Welt gebend, wie er das z.B. in der «*Arithmetica Universalis*» bei den schwierigsten Fällen tut, nicht ganz im stillen für eigenen Privatgebrauch aus dem binomischen Lehrsatz, den er entdeckt, sich Taylor's und Mac Laurin's Theoreme bereits entwickelt? Dies ist mit absoluter Sicherheit zu verneinen: er war nicht, der seinen Schülern die Aneignung solcher

Если в $f(x+h)$ и также на правой стороне в y или $f(x)$ и в ее символически выведенных под видом $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. производных функциях мы положим $x=0$, так что все эти функции не будут содержать уже ничего другого, кроме разворачивания постоянного элемента от x[78], то

$$f(h)=(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1\cdot 2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ и т. д.}$$

$y_1=f(x+h)=f(0+h)$ будет тогда той же функцией от h, какой является $y=f(x)$ относительно x, ибо h входит в $f(h)$ так же, как x в $f(x)$, и (y) в $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, и т. д., — исчез всякий след переменной x.

Поэтому на обеих сторонах мы можем вместо h поставить x, и тогда мы получим:

$$f(x)=(y)\text{ или }f(0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1\cdot 2}+\text{ и т. д. }+$$
$$+\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\text{ и т. д.}$$

Или, как это пишут обычно:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2}+f'''(0)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{и т. д.},$$

как, например, в разложении $f(x)$ или $(c+x)^m$:

$$(c+0)^m=f(0)=c^m,$$

$$m(c+0)^{m-1}x=mc^{m-1}x=f'(0)\,x\text{ и т. д.}$$

В дальнейшем, при переходе к Лагранжу, я не буду уже специально останавливаться на теореме Маклорена, являющейся лишь частным случаем теоремы Тейлора. Здесь отметим еще только, что и у нее есть свои так называемые «исключения», как и у теоремы Тейлора. В первой исключения возникают всегда из иррациональной природы постоянной функции, в последней — из такой же природы переменной функции [79].

Теперь можно спросить себя:

Не обстояло ли дело так, что Ньютон, поведав миру только свои результаты, как это он делает, например, в самых трудных случаях в «*Arithmetica Universalis*», втихомолку вывел для своего личного потребления из открытой им биномиальной теоремы и Тейлорову, и Маклоренову теорему? На это можно с полной уверенностью сказать: нет. Он не был из тех, которые предоставляют своим ученикам

Entdeckung zu überlassen. Er war in der Tat noch zu sehr absorbiert durch die Ausarbeitung der Differentialoperationen selbst, die schon als gegeben und bekannt bei Taylor und Mac Laurin vorausgesetzt sind. Zudem gelangte Newton, wie seine ersten elementaren Formeln des calculus zeigen, offenbar zunächst zu denselben von mechanischen nicht der reinen Analysis angehörigen Ausgangspunkten.

Was andererseits Taylor und Mac Laurin betrifft, so arbeiten und bewegen sie sich von vornherein auf dem Boden des Differentialcalculus selbst und hatten darnach keinen Anlass, die möglichst einfachen algebraischen Ausgangspunkte desselben zu suchen, um so weniger als der Streit zwischen den Newtonianern und Leibnizianern sich um bestimmte, bereits fertige Formen des calculs als einer neu entdeckten, ganz aparten, von der gewöhnlichen Algebra himmelweit verschiednen Disziplin der Mathematik drehte.

Der Zusammenhang ihrer respektiven *Ausgangsgleichungen* mit dem binomischen Lehrsatze verstand sich für sie von selbst, aber nicht mehr so, als z.B. bei der Differenzierung von xy oder $\frac{x}{y}$ es sich von selbst versteht, dass dies durch die gewöhnliche Algebra gelieferte Ausdrücke sind.

Die wirklichen und daher einfachsten Zusammenhänge des Neuen mit dem Alten werden immer erst entdeckt, sobald dies Neue selbst schon eine in sich abgerundete Form gewonnen, und man kann sagen, dass der Differentialcalcul diese relation erhielt durch die Taylorschen und Mac Laurinschen Theoreme. Es fiel daher erst Lagrange zu, den Differentialcalculus auf strikt algebraische Basis zurückzuführen. Vielleicht ging ihm darin voran *John Landen*, englischer Mathematiker um Mitte des 18. Jh., in seiner «*Residual Analysis*». Doch muss ich dies Buch erst im Museum sehn, bevor ich darüber urteilen kann.

III. Lagranges Funktionstheorie

Lagrange geht aus von der algebraischen Begründung des Taylorschen Theorems, also der allgemeinsten Formel des Differentialcalculus.

Es ist nur zu bemerken mit Bezug auf Taylor's Ausgangsgleichung:

$$y_1 \text{ oder } f(x+h)=y \text{ oder } f(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{etc.}$$

1) Diese Reihe ist in keiner Weise bewiesen; $f(x+h)$ ist kein Binom von einem *bestimmten* Grad; $f(x+h)$ ist vielmehr der

возможность присвоить себе такое открытие. В действительности он был еще слишком поглощен разработкой самих дифференциальных операций, которые у Тейлора и Маклорена предполагаются уже имеющимися и известными. К тому же, как свидетельствуют его первые элементарные формулы исчисления, Ньютон явно пришел к ним первоначально, отправляясь от механических, а не принадлежащих чистому анализу исходных пунктов.

С другой стороны, что касается Тейлора и Маклорена, то они с самого начала в своей работе оперируют на почве самого дифференциального исчисления, и ничто их не побуждало поэтому доискиваться наивозможно более простых алгебраических исходных пунктов этого исчисления, тем более что спор между последователями Ньютона и Лейбница вращался вокруг определенных, уже готовых форм исчисления, как только что открытой, совершенно особой математической дисциплины, до которой обычной алгебре, как до звезды небесной, далеко.

Связь их соответствующих *исходных уравнений* с биномиальной теоремой была для них чем-то само собой разумеющимся. Но связь эта понималась ими далеко не так, как, например, при дифференцировании xy или x/y, само собой разумеется, что эти выражения даны обыкновенной алгеброй.

Подлинные и в силу этого простейшие взаимосвязи нового со старым открываются всегда лишь после того, как это новое само приобретет уже завершенную форму, и можно сказать, что в дифференциальном исчислении это возвращение (отнесение) назад было осуществлено теоремами Тейлора и Маклорена. Поэтому только Лагранжу пришла в голову мысль свести дифференциальное исчисление к строго алгебраической основе. Быть может, ему предшествовал в этом отношении *Джон Ланден*, английский математик середины 18 века, в его «*Residual Analysis*». Но чтобы составить себе окончательное суждение об этом, я должен предварительно посмотреть эту книгу в Музее.

III. Лагранжева теория функций

Лагранж исходит из алгебраического обоснования Тейлоровой теоремы, т. е. самой общей формулы дифференциального исчисления.

По поводу Тейлорова исходного уравнения

$$y_1 \text{ или } f(x+h)=y \text{ или } f(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+ \text{ и т. д.}$$

надлежит лишь заметить следующее.

1) Этот ряд отнюдь не доказан; $f(x+h)$ не является биномом в какой-нибудь *определенной* степени; $f(x+h)$ есть скорее

unbestimmte allgemeine Ausdruck jeder Funktion [der Variablen] x, welche [x] um ein positives oder negatives Inkrement h wächst; $f(x+h)$ schliesst also Funktionen x von jedem Grad ein, schliesst aber zugleich jeden bestimmten Grad der Entwicklungsreihe selbst aus. Taylor selbst setzt daher «+ etc.» ans Ende der Reihe. Dass aber das Gesetz der Entwicklungsreihe, welches gültig für bestimmte Funktionen x, die ein Inkrement erhalten — ob sie nun darstellbar in endlicher Gleichung [80] oder endloser Reihe —, ohne weiteres anwendbar auf die unbestimmte allgemeine $f(x)$ und daher ebenso unbestimmte allgemeine $f(x_1)$ oder $f(x+h)$, ist erst zu *beweisen.*

2) Die Gleichung wird dadurch in die Differentialsprache übersetzt, dass sie doppelt differenziert wird, d.h. y_1 einmal mit Bezug auf h als variabel und x als konstant, dann aber mit Bezug auf x als variable und h als konstant. So werden zwei Gleichungen hergestellt, deren erste Seiten identisch, während ihre zweite Seiten formverschieden sind. Um aber die unbestimmten Koeffizienten dieser zweiten Seiten, welche alle Funktionen von x sind, gleichsetzen zu können, wird, was dazu erheischt, auch vorausgesetzt, dass die einzelnen Koeffizienten A, B, etc. *zwar unbestimmte*, *aber endliche Grössen* sind, und ebenso, dass die sie begleitenden Faktoren h in *ganzen und positiven Potenzen* aufsteigen [81]. Gesetzt, was nicht der Fall, Taylor hätte das alles bewiesen für die $f(x+h)$, solange x in $f(x)$ *allgemein* bleibt, so gälte das deswegen noch keineswegs, sobald Funktionen x bestimmte partikuläre Werte annehmen. Diese könnten umgekehrt unverträglich sein mit der Behandlung durch seine Reihe

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.}$$

Mit einem Wort: die Bedingungen oder Voraussetzungen, die in Taylor's unbewiesener Ausgangsgleichung involviert sind, finden sich natürlich auch in dem daraus abgeleiteten Theorem:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc.}$$

Es ist daher unanwendbar auf gewisse Funktionen von x, die jenen Voraussetzungen widersprechen. Daher die so g. *failures* des Theorems.

Lagrange begründet die Ausgangsgleichung algebraisch und zeigt zugleich durch deren Entwicklung selbst, welche partikulären Fälle, als ihrem *allgemeinen* Charakter, d.h. dem allgemeinen, unbestimmten Charakter der Funktion von x widersprechend, von selbst ausgeschlossen sind.

неопределенное общее выражение каждой функции [переменной] x, которая [x] возрастает на положительное или отрицательное приращение h; таким образом, $f(x+h)$ включает в себя функции x каждой степени, но в то же время исключает всякую определенную степень самого ряда разложения. Сам Тейлор ставит поэтому в конце ряда «+ и т. д.». Но надо еще *доказать*, что закон разложения в ряд, верный для определенных функций x, получающих приращение,— независимо от того, представимы ли они теперь конечным уравнением [80] или бесконечным рядом,— может быть распространен безоговорочно на неопределенную общую $f(x)$ и поэтому столь же неопределенную общую $f(x_1)$ или $f(x+h)$.

2) Это уравнение переводится на дифференциальный язык при помощи двойного дифференцирования y_1 — сначала по отношению к h как переменной и x как постоянной, а затем по отношению к x как переменной и h как постоянной. Так получаются два уравнения, у которых первые стороны тождественны, тогда как вторые различны по форме. Но, чтобы можно было приравнять неопределенные коэффициенты этих вторых сторон, которые все суть функции от x, предполагается еще — без этого нельзя обойтись,— что отдельные коэффициенты A, B и т. д. представляют собой *хоть и неопределенные, но конечные величины*, а также что сопутствующие им множители h возрастают *в целых и положительных степенях* [81]. Если даже предположить — чего на самом деле не было,— что Тейлор доказал все это для $f(x+h)$, поскольку x в $f(x)$ остается *общим*, то из этого еще отнюдь не следует, что то же остается верным, когда функции x принимают определенные частные значения. Последние, наоборот, могут быть несовместимы с преобразованиями при помощи его ряда

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{ и т. д.}$$

Одним словом: условия или предположения, заключающиеся в недоказанном Тейлоровом исходном уравнении, содержатся, разумеется, и в выведенной из него теореме:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{ и т. д.}$$

Она поэтому неприменима к некоторым функциям от x, которые этим предположениям противоречат. Отсюда так называемые *исключения* из теоремы.

Лагранж обосновывает исходное уравнение алгебраически и показывает в то же время самим его развитием, к каким частным случаям, противоречащим его *общему* характеру, т. е. общему, неопределенному характеру функции от x, оно, в силу этого их характера, неприменимо.

H) 1) Das grosse Verdienst Lagrange's ist, nicht nur das Taylorsche Theorem und überhaupt den Differentialcalculus durch die rein algebraische Analyse begründet, sondern namentlich auch den Begriff der abgeleiteten Funktionen eingeführt zu haben, den in der Tat alle seine Nachfolger mehr oder minder benutzen, auch ohne davon zu sprechen. Aber er hat sich damit nicht begnügt. Er gibt die rein algebraische Entwicklung aller möglichen Funktionen $x+h$, mit aufsteigenden, ganzen, positiven Potenzen von h und erteilt ihnen dann die Taufnamen des Differentialcalculus. Alle Leichtigkeiten und Abkürzungen, die der Differentialcalcul (Taylor's Theorem etc.) selbst gewahrt, werden damit eingebüsst und sehr oft durch algebraische Operationen von viel mehr weitläufiger und komplizierter Natur ersetzt.

2) Soweit es sich um reine Analysis handelt, wird Lagrange in der Tat alles los, was ihm als metaphysische Transzendenz erscheint in Newton's Fluxionen, Leibniz' Infinitesimals verschiedener Ordnung, der Grenzwerttheorie der verschwindenden Grössen, der Einsetzung von $\frac{0}{0}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ als Symbol für die Differentialkoeffizienten etc. Dies verhindert jedoch nicht, dass er in der Anwendung seiner Theorie und Kurven etc. selbst beständig einer oder der anderen dieser «metaphysischen» Vorstellungen bedarf.

Н) 1) Большая заслуга Лагранжа состоит не только в том, что он обосновал с помощью чисто алгебраического анализа теорему Тейлора и вообще дифференциальное исчисление, но и в том, что он ввел самое понятие производных функций, которым на самом деле все его последователи в той или иной мере пользуются, хотя бы и втихомолку. Но этим он не ограничился. Он дает чисто алгебраическое разложение всех возможных функций от $x + h$ по возрастающим целым положительным степеням h, а затем окрещивает все полученные коэффициенты именами из дифференциального исчисления. Все упрощения и сокращения, доставляемые самим дифференциальным исчислением (теорема Тейлора и др.), тем самым терпят ущерб и очень часто заменяются алгебраическими операциями гораздо более громоздкого и сложного характера.

2) Что касается чистого анализа, то Лагранж действительно освобождается от всѐго, что представляется ему метафизической трансцендентностью во флюксиях Ньютона, в бесконечно малых разного порядка Лейбница, в теории пределов исчезающих величин, в подстановке символа $\frac{0}{0}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ вместо дифференциальных коэффициентов и др. Это, однако, не мешает ему самому, в применении его теории к кривым и т. д., постоянно пользоваться тем или иным из этих «метафизических» представлений.

* 2. AUS DEM UNBEENDETEN MANUSKRIPT «TAYLOR'S THEOREM»

Wenn also in dem Theorem von Taylor [82] 1) übernommen aus einer *spezifischen Form* des binomischen Theorems, wo $(x+h)^m$ vorausgesetzt, dass *m ganze und positive Potenz* ist, also auch die Faktoren in $h = h^0$, h^1, h^2, h^3 etc. sind, d.h. h in ganzer, aufsteigender, positiver Potenz [ist], so [auch] 2) dass wie in dem algebraischen binomischen Theorem *allgemeiner* Form, die *abgeleiteten Funktionen von x* bestimmte und soweit *endliche Funktionen in x* sind. Es kommt aber noch eine dritte Bedingung hinzu. Die abgeleiteten Funktionen von x können nur $=0$, $=+\infty$, $=-\infty$ werden und ebenso $h^{[k]}$ nur $= h^{-1}$ oder $h^{m/n}$ (z.B. $h^{1/2}$), wenn die Variable x *partikuläre Werte* annimmt, z.B. $x = a$ [83].

Allgemein zusammengefasst: das *Taylorsche Theorem* ist allgemein nur anwendbar zur Entwicklung von Funktionen in x, in welcher $x = x + h$ wird oder wächst, aus x zu x_1 wird, wenn 1) die unabhängige Variable x die allgemeine, *unbestimmte Form x* beibehält, 2) die Originalfunktion in x selbst durch Differentiation entwickelbar in einer Reihe *bestimmter* und soweit *endlicher*, *abgeleiteter Funktionen in x*, mit entsprechenden Faktoren von h mit aufsteigenden, positiven und ganzen Exponenten, also mit h^1, h^2, h^3 etc.

Alle diese Bedingungen aber sind ein andrer Ausdruck dafür, dass dies Theorem nur das in Differentialsprache übersetzte binomische Theorem mit *ganzen und positiven Exponenten ist*.

Wo diese Bedingungen nicht erfüllt sind, d.h., wo das *Taylorsche Theorem nicht anwendbar*, tritt das ein, was im Differentialcalcul figuriert als die «*failures*» dieses Theorems.

Die grösste *failure* des Taylorschen Theorems sind aber nicht diese besonderen failures der Anwendung, sondern *die allgemeine failure*, dass

$$y = f(x) \quad [\text{und}] \quad y_1 = f(x+h),$$

* 2. ИЗ НЕОКОНЧЕННОЙ РУКОПИСИ «ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА»

Если, таким образом, в теореме Тейлора [82] 1) из некоторой *специфической формы* биномиальной теоремы, где $(x+h)^m$ в предположении, что m есть *целая и положительная степень*, почему и множители в h равны h^0, h^1, h^2, h^3 и т. д., принимается, что h [входит] в целой, возрастающей, положительной степени, то принимается [и] 2) что, как в алгебраической биномиальной теореме *общей* формы, *производные функции от* x суть определенные и постольку *конечные функции в* x. Но к этому присоединяется еще и третье условие. Производные функции от x могут обращаться в 0, $+\infty$, $-\infty$, а также $h^{[k]}$ может становиться $=h^{-1}$ или $h^{m/n}$ (например, $h^{1/2}$), лишь когда переменная x принимает *частные значения*, например $x=a$ [83].

Суммируем сказанное: *теорема Тейлора* вообще применима для разложения в ряд функций в x, в которых x становится равным $x+h$ или возрастает, превращаясь из x в x_1, только если: 1) независимая переменная x сохраняет общую *неопределенную форму* x, 2) сама первоначальная функция в x разложима путем дифференцирования в ряд *определенных* и, поскольку это так, *конечных производных функций в* x с соответствующими множителями h в возрастающих, положительных и целых степенях, т. е. h^1, h^2, h^3 и т. д.

Но все эти условия представляют собою другое выражение того, что эта теорема есть лишь переведенная на язык дифференциального исчисления биномиальная теорема с *целыми и положительными показателями степени*.

Там, где эти условия не выполнены и, следовательно, *теорема Тейлора неприменима*, появляется то, что в дифференциальном исчислении выступает как «*исключения*» из этой теоремы.

Но самой крупной *погрешностью* теоремы Тейлора являются не эти частные исключения из ее применимости, а та *общая погрешность*, которая состоит в том, что

$$y=f(x) \quad [\text{и}] \quad y_1=f(x+h),$$

welche nur symbolische Ausdrücke eines Binoms von irgendwelchem Grad [84], verwandelt werden in Ausdrücke, wo $f(x)$ eine Funktion von x, die alle Grade einschliesst und deshalb selbst *keinen Grad* hat, so dass $y_1 = f(x+h)$ ebenfalls alle Grade einschliesst und selbst von keinem Grad ist, vielmehr der *unentwickelte allgemeine Ausdruck* jeder Funktion der Variablen x wird, sobald sie wächst. Die Entwicklungsreihe, worin sich dies ungradige $f(x+h)$ expandiert, nämlich $y + Ah + Bh^2 + Ch^3 +$ etc., schliesst daher auch alle Grade ein, ohne selbst irgendeines Grades zu sein.

Dieser Sprung aus der *gewöhnlichen Algebra*, und zwar *vermittelst der gewöhnlichen Algebra*, in die *Algebra der Variablen* ist vorausgesetzt als *un fait accompli*, er ist nicht bewiesen und ist prima facie im *Widerspruch zu allen Gesetzen* der gewöhnlichen Algebra, wo $y = f(x)$, $y_1 = f(x+h)$ niemals diesen Sinn haben können.

In andern Worten: die Ausgangsgleichung

$$y_1 \text{ oder } f(x+h) = y \text{ oder } f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \text{etc.}$$

ist nicht nur *nicht bewiesen*, sondern setzt bewusst oder unbewusst eine Substitution von *Variablen* für *Konstante* voraus — denn die Algebra, also auch das algebraische Binom, lässt nur Konstante zu und zwar nur Konstante von zweierlei Sorte, *bekannte* und *unbekannte* —, die allen Gesetzen der Algebra ins Gesicht schlägt. Die Ableitung dieser Gleichung aus der Algebra scheint daher auf einem Betrug zu beruhn.

Wenn nun dennoch tatsächlich das *Taylorsche Theorem* — dessen failures in der Anwendung kaum ins Gewicht fallen, da sie faktisch beschränkt sind auf Funktionen in x, die auf dem Weg der Differentiation kein Resultat liefern können [85], also überhaupt der Behandlung durch den Differentialcalcul unzugänglich sind — sich in der Praxis als die zusammenfassendste, allgemeinste und erfolgreichste *Operationsformel* des ganzen Calculus ausgewiesen hat, so ist dies nur das crowning of the edifice der Newtonschen Schule, der er angehörte, und der Newton-Leibnizschen Entwicklungsperiode des Differentialcalculus überhaupt, welcher gleich in seinen ersten Ansätzen wahre Resultate aus falschen Prämissen zieht.

Der algebraische Beweis von Taylors Theorem ist nun geliefert worden von *Lagrange* und bildet überhaupt die Basis *seiner* algebraischen Methode des Differentialcalculs. Auf die Sache selbst werde ich näher eingehn beim etwaigen historischen Teil dieses Manuskripts [86].

Hier als *lusus historiae* sei nur dies bemerkt, dass Lagrange keineswegs auf die unbewusste Grundlage Taylors zurückgeht — auf das binomische Theorem, und zwar das binomische Theorem in elementarster которые суть лишь символические выражения бинома какой-либо степени [84], превращаются в выражения, где $f(x)$ есть функция от x, включающая в себя все степени и поэтому сама *степени не имеющая*, так что $y_1 = f(x+h)$ тоже включает в себя все степени и сама никакой степени не имеет, являясь как бы *неразложенным общим выражением* любой функции переменной x, когда последняя возрастает. Поэтому тот ряд разложения, который служит развертыванием этой бесстепенной $f(x+h)$, а именно $y + Ah + Bh^2 + Ch^3 +$ и т. д., заключает в себе все степени, причем сам никакой степени не имеет.

Этот скачок из *обыкновенной алгебры*, и притом *с помощью обыкновенной алгебры*, в *алгебру переменных* принимается за *совершившийся факт*, он не доказывается и, первым делом, *противоречит всем законам* обыкновенной алгебры, где $y = f(x)$ и $y_1 = f(x+h)$ никогда не могут иметь этого смысла.

Другими словами: исходное уравнение

$$y_1 \text{ или } f(x+h) = y \text{ или } f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \text{ и т. д.}$$

не только *не доказано*, но и — сознательно или бессознательно — предполагает подстановку *переменных* на место *постоянных*, что противоречит всем законам алгебры, так как алгебра, а следовательно и алгебраический бином, допускает только постоянные, и притом лишь постоянные двоякого рода — *известные* и *неизвестные*. Выведение этого уравнения из алгебры представляется поэтому покоящимся на обмане.

Если тем не менее на самом деле *теорема Тейлора* — исключения из которой вряд ли имеют значение для приложений, так как они фактически ограничиваются такими функциями в x, которые недифференцируемы [85], т. е. вообще не поддаются обработке средствами дифференциального исчисления,— показала себя на практике как самая всеобъемлющая, самая общая и плодотворная *оперативная формула* всего исчисления, то это есть лишь завершение всего здания, воздвигнутого школой Ньютона, к которой он [Тейлор] принадлежал, и вообще всего ньютоно-лейбницевского периода развития дифференциального исчисления, которое уже с первых своих шагов извлекает правильные результаты из ошибочных предпосылок.

Алгебраическое доказательство теоремы Тейлора дано *Лагранжем* и положено им вообще в основу *его* алгебраического метода дифференциального исчисления. Я остановлюсь на этом подробнее, если напишу историческую часть этой рукописи [86].

Здесь — как *игру истории* — отмечу лишь, что Лагранж отнюдь не возвращается к тому, что неосознанно служило основой Тейлору,— к теореме о биноме, и притом в ее простейшей форме, где

Form, wo es nur aus zwei Grössen $(x + a)$ oder hier $(x + h)$ besteht und einen positiven, [ganzen] Exponenten hat.

Noch viel weniger geht er weiter zurück und fragt sich, warum erscheint das in Differentialform übersetzte und zugleich von seinen algebraischen Bedingungen durch einen Gewaltstreich befreite binomische Theorem Newtons als zusammenfassende allgemeine Operationsformel des von ihm gegründeten Calculus? Die Antwort war einfach; weil Newton von vornherein $x_1 - x = dx$ setzt, also $x_1 = x + dx$. Die Entwicklung der *Differenz* verwandelt sich also sofort in Entwicklung einer *Summe*, in Entwicklung des Binoms $(x + dx)$ (wobei wir ganz davon absehn, dass er hätte setzen müssen $x_1 - x = \Delta x$ oder h) (also $x_1 = x + \Delta x$ oder $= x + h$). Taylor entwickelt diese Grundlage des Systems nur zur dessen allgemeinsten und zusammenfassendsten Form, was überhaupt erst möglich war, sobald alle Grundoperationen des Differentialcalculus entdeckt waren, denn welchen Sinn hatten seine $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc., wenn man nicht für alle wesentlichen Funktionen in x bereits ihr entsprechendes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. zu entwickeln fähig?

Lagrange umgekehrt schliesst sich direkt an Taylor's Theorem an, natürlich von einem Standpunkt, wo einerseits die Nachfolger der Newton-Leibnizschen Epoche ihm bereits die korrigierte Ausgabe des $x_1 - x = dx$ geliefert, also auch $y_1 - y = f(x + h) - f(x)$, er andrerseits grade in der Algebraisierung der Taylorschen Formel seine eigne Theorie der *«abgeleiteten» Funktionen* produzierte. ⟦So schloss sich Fichte an Kant, Schelling an Fichte, Hegel an Schelling an, ohne dass weder Fichte, Schelling, Hegel die allgemeine Grundlage Kants, i.e. den Idealismus überhaupt untersucht hätten; die hätten ihn sonst nicht fortentwickeln können⟧.

он [т. е. бином] состоит только из двух величин $(x + a)$ или здесь $(x + h)$ и имеет положительный целый показатель степени.

Еще в гораздо меньшей мере возвращается он дальше назад и спрашивает себя, почему переведенная в дифференциальную форму и одновременно насильственно освобожденная от ее алгебраических условий Ньютонова теорема о биноме выступает как всеобъемлющая общая оперативная формула основанного им дифференциального исчисления. Ответ был прост: потому что Ньютон с самого начала полагает $x_1 - x = dx$ и, следовательно, $x_1 = x + dx$. Таким образом, разложение *разности* тотчас же превращается в разложение некоторой *суммы*, в разложение бинома $(x + dx)$ (причем мы совершенно отвлекаемся от того, что он должен был бы писать $x_1 - x = \Delta x$ или h) (следовательно, $x_1 = x + \Delta x$ или $= x + h$). Тейлор развивает лишь эту основу системы в ее самую общую всеобъемлющую форму, что вообще впервые стало возможно, когда уже все основные операции дифференциального исчисления были открыты, потому что какой смысл имели бы его $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д., если бы для всех существенных функций в x не умели уже получать их соответствующие $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д.?

Лагранж, наоборот, примыкает непосредственно к теореме Тейлора — естественно в таком положении, где, с одной стороны, преемники эпохи Ньютона — Лейбница доставили уже ему исправленное издание [формулы] $x_1 - x = dx$, а значит, и $y_1 - y = f(x + h) - f(x)$ и, с другой стороны, как раз алгебраизировав Тейлорову формулу, он создал свою собственную теорию *«производных» функций*. [[Таким же образом Фихте примыкал к Канту, Шеллинг — к Фихте, Гегель — к Шеллингу, причем ни Фихте, ни Шеллинг, ни Гегель не исследовали общей основы Канта, идеализма вообще; иначе они не смогли бы развивать ее дальше.]]

*ПРИЛОЖЕНИЕ К РУКОПИСИ «ОБ ИСТОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ».

АНАЛИЗ МЕТОДА ДАЛАМБЕРА

* ÜBER DIE MEHRDEUTIGKEIT DER TERMEN «GRENZE» UND «GRENZWERT» [87]

I) x^3;

a) $(x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$;

b) $(x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

c) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.

Wird $h=0$, so

$\frac{(x+0)^3 - x^3}{0}$ oder $\frac{x^3 - x^3}{0} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$ und die rechte Seite $= 3x^2$,

also:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

$$y = x^3; \qquad y_1 = x_1^3;$$

$$y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2);$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2;$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

II) Setzen wir $x_1 - x = h$, so:

1) $(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) = h(x_1^2 + x_1x + x^2)$;

2) also:

$$\frac{y_1 - y}{h} = x_1^2 + x_1x + x^2.$$

* О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ТЕРМИНОВ «ПРЕДЕЛ» И «ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ» [87]

I) x^3;

a) $(x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$;

b) $(x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

c) $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.

Когда становится $h = 0$, то

$\dfrac{(x+0)^3 - x^3}{0}$ или $\dfrac{x^3 - x^3}{0} = \dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{dy}{dx}$ и правая сторона $= 3x^2$,

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

$$y = x^3; \quad y_1 = x_1^3;$$

$$y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2);$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2;$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

II) Если мы положим $x_1 - x = h$, то:

1) $(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) = h(x_1^2 + x_1x + x^2)$;

2) следовательно,

$$\frac{y_1 - y}{h} = x_1^2 + x_1x + x^2.$$

In 1) ist der Koeffizient von h *nicht die fertig Abgeleitete*, wie oben f', sondern f^1; die Division beider Seiten durch h liefert daher auch nicht $\frac{dy}{dx}$, sondern

$$\frac{\Delta y}{h} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1 x + x^2$$

etc. etc.

Wenn wir auf der andern Seite in I c), nämlich in

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ oder } \frac{y_1-y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2,$$

von der Vorstellung ausgehn, dass auf der rechten Seite, je mehr der Wert von h abnimmt, desto mehr der Wert der Glieder $3xh + h^2$ abnimmt [88], also auch der Wert der ganzen rechten Seite $3x^2 + 3xh + h^2$ sich immer mehr dem Wert $3x^2$ nähert, so müssen wir aber hinzusetzen: ohne je mit ihm zusammenfallen zu können.

$3x^2$ wird so ein Wert, dem sich die Reihe $3x^2 + 3xh + h^2$ beständig nähert, ohne ihn je zu erreichen, also noch mehr, ohne ihn je überschreiten zu können. In diesem Sinn wird $3x^2$ *der Grenzwert* [89] der Reihe $3x^2 + 3xh + h^2$.

Andrerseits nimmt die Grösse $\frac{y_1-y}{h}$ $\left(\text{oder } \frac{y_1-y}{x_1-x}\right)$ auch immer mehr ab, je mehr ihr Nenner h abnimmt [90]. Da aber $\frac{y_1-y}{h}$ das Äquivalent von $3x^2+3xh+h^2$, so ist der Grenzwert dieser Reihe sein eigner *Grenzwert* in demselben Sinn, worin er der der ihm äquivalenten Reihe ist.

Sobald wir aber $h = 0$ setzen, verschwinden die Glieder auf der rechten Seite, die $3x^2$ zur Grenze ihres Werts machten; $3x^2$ ist jetzt die erste Abgeleitete von x^3, also $= f'(x)$. Als $f'(x)$ zeigt es an, dass wieder aus ihm $f''(x)$ (im gegebnen Fall $= 6x$) ableitbar etc., dass also das Inkrement $f'(x)$ oder $3x^2$ nicht $=$ der Summe der aus $f(x) = x^3$ entwickelbaren Inkremente. Wäre die $f(x)$ selbst eine endlose Reihe, so natürlich auch die Reihe der aus selber entwickelbaren Inkremente. In diesem Sinne würde aber die entwickelte Reihe der Inkremente, sobald ich sie abbreche, der *Grenzwert* ihrer Entwicklung, *Grenzwert* also hier in dem gewöhnlichen algebraischen oder arithmetischen Sinn, wie der entwickelte Teil eines endlosen Dezimalbruchs *Grenze* seiner möglichen Entwicklung wird, eine Grenze, die aus praktischen oder theoretischen Gründen genügt. Dies hat absolut nichts gemein mit dem Grenzwert im ersten Sinn.

В 1) коэффициент при h *не готовая производная*, как выше f', а f^1; деление обеих сторон на h также поэтому дает не $\frac{dy}{dx}$, а

$$\frac{\Delta y}{h} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1 x + x^2$$

и т. д. и т. д.

Если на другой стороне в I с), т. е. в

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ или } \frac{y_1-y}{h} = 3x^2+3xh+h^2,$$

мы исходим из представления, что на правой стороне по мере убывания значения h все больше и больше убывает значение членов $3xh + h^2$ [88], а следовательно, и значение всей правой стороны $3x^2 + 3xh + h^2$ все больше и больше приближается к значению $3x^2$, то к этому следует, однако, добавить: без того, чтобы когда-нибудь совпасть с ним.

Таким образом, $3x^2$ становится значением, к которому ряд $3x^2 + 3xh + h^2$ постоянно приближается, никогда его не достигая и тем более, следовательно, никогда за него не переходя. В этом смысле $3x^2$ становится *предельным значением* [89] ряда $3x^2 + 3xh + h^2$.

С другой стороны, величина $\frac{y_1-y}{h}$ $\left(\text{или } \frac{y_1-y}{x_1-x}\right)$ также все более убывает по мере того, как убывает знаменатель h [90]. Но так как $\frac{y_1-y}{h}$ есть эквивалент для $3x^2+3xh+h^2$, то предельное значение этого ряда есть и его собственное *предельное значение* — в том самом смысле, в каком оно служит предельным значением эквивалентного ему ряда.

Однако, как только мы полагаем $h = 0$, на правой стороне исчезают члены, которые делали $3x^2$ пределом ее значения; теперь $3x^2$ есть первая производная от x^3 и, следовательно, $= f'(x)$. В качестве $f'(x)$ она показывает, что из нее в свою очередь можно произвести $f''(x)$ (в данном случае $=6x$) и т. д., что, следовательно, приращение $f'(x)$ или $3x^2$ не равно сумме могущих быть развернутыми из $f(x) = x^3$ приращений. Если бы сама $f(x)$ была бесконечным рядом, то, конечно, был бы таковым и ряд могущих быть полученными из нее приращений. Но в этом смысле развернутый ряд приращений, как только я его обрываю, был бы *предельным значением* его развертывания, *предельным значением* здесь, следовательно, в том обычном алгебраическом или арифметическом смысле, в каком развернутая часть бесконечной десятичной дроби есть *предел* ее возможного развертывания, предел, достаточный из практических или теоретических соображений. Это не имеет абсолютно ничего общего с предельным значением в первом смысле.

Der Grenzwert im zweiten Sinn ist hier je nach Belieben *vergrösserbar*, während dort [der Wert des Ausdrucks] nur *verkleinerbar*. Ferner:

$$\frac{y_1-y}{h}=\frac{y_1-y}{x_1-x},$$

solange h sich nur verkleinert nähert sich nur dem Ausdruck $\frac{0}{0}$; er ist eine Grenze, die es nie erreichen und noch weniger überschreiten kann, und sofern kann $\frac{0}{0}$ als sein *Grenzwert* betrachtet werden [91].

Aber sobald $\frac{y_1-y}{h}$ verwandelt in $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$, hat letzteres aufgehört der Grenzwert von $\frac{y_1-y}{h}$ zu sein, indem letzteres selbst in seiner Grenze verschwunden ist [92]. Mit Bezug auf seine frühere Form $\frac{y_1-y}{h}$ oder $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ können wir nur sagen, dass $\frac{0}{0}$ dessen absoluter Minimalausdruck ist, der isoliert betrachtet kein Wertausdruck ist; aber $\frac{0}{0}$ $\left(\text{oder } \frac{dy}{dx}\right)$ hat jetzt als reales Äquivalent $3x^2$ gegenüber, d.h. $f'(x)$.

Und so in der Gleichung

$$\frac{0}{0}\ \left(\text{oder } \frac{dy}{dx}\right)=f'(x)$$

ist keine der beiden Seiten Grenzwert der andern. Sie haben kein *Grenzverhältnis* zueinander, sondern ein *Äquivalentverhältnis*.

Wenn ich habe: $\frac{6}{3}=2$, so ist weder 2 Grenze von $\frac{6}{3}$ noch $\frac{6}{3}$ Grenze von 2. Dies käme nur auf die abgeschmackte Tautologie hinaus, dass der Wert einer Grösse = der Grenze ihres Werts.

Der Begriff des Grenzwerts ist also missdeutbar und wird beständig missdeutet. Auf Differentialgleichungen [93] angewandt ist er als Mittel, das Setzen von $x_1 - x$ oder $h = 0$ vorzubereiten und letztres der Vorstellung näher zu bringen, eine Kinderei, die ihren Ursprung in der ersten mystischen und mystifizierenden Methode des Calculus hat.

In der Anwendung der Differentialgleichungen auf Kurven etc. dient er wirklich zu geometrischer Veranschaulichung.

Предельное значение во втором смысле здесь *может быть* по произволу *увеличено*, между тем как там [значение выражения] может лишь *уменьшаться*. Далее,

$$\frac{y_1-y}{h}=\frac{y_1-y}{x_1-x},$$

пока h только уменьшается, лишь приближается к выражению $\frac{0}{0}$; последнее есть предел, которого это отношение никогда не может достичь и тем более перейти, поскольку $\frac{0}{0}$ может рассматриваться как его *предельное значение* [91].

Но как только $\frac{y_1-y}{h}$ превращается в $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$, последнее перестает быть предельным значением для $\frac{y_1-y}{h}$, поскольку это последнее само исчезло в своем пределе [92]. Относительно его прежней формы $\frac{y_1-y}{h}$ или $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ можно лишь сказать, что $\frac{0}{0}$ есть его абсолютное минимальное выражение, которое, будучи рассматриваемо изолированно, не есть вообще выражение, имеющее какое-нибудь значение; но теперь выражению $\frac{0}{0}$ $\left(\text{или } \frac{dy}{dx}\right)$ противостоит в качестве его реального эквивалента $3x^2$, т. е. $f'(x)$. Итак, в уравнении

$$\frac{0}{0}\left(\text{или } \frac{dy}{dx}\right)=f'(x)$$

ни одна из обеих сторон не является предельным значением другой. Они находятся друг к другу не в *предельном отношении*, а в *отношении эквивалентности*.

Если у меня имеется $\frac{6}{3}=2$, то ни 2 не есть предел $\frac{6}{3}$, ни $\frac{6}{3}$ не есть предел 2. Было бы пошлой тавтологией утверждать, что значение какой-нибудь величины равно пределу ее значения.

Итак, понятие предельного значения может быть неправильно истолковано и постоянно толкуется неправильно. В применении к дифференциальным уравнениям [93] оно, в качестве средства подготовить полагание $x_1 - x$ или h равным нулю и сделать последнее более наглядным, представляет собой ребячество, происхождение которого следует искать в первом мистическом и мистифицирующем методе исчисления. При применении же дифференциальных уравнений к кривым и т. д. оно действительно служит целям геометрического наглядного представления.

* VERGLEICHUNG VON D'ALEMBERT'S METHODE MIT DER ALGEBRAISCHEN

Vergleichen wir D'Alembert's Methode mit der algebraischen [94].

I) $f(x)$ oder $y = x^3$;

a) $f(x+h)$ oder $y_1 = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

b) $f(x+h) - f(x)$ oder $y_1 - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$;

c) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oder $\frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$;

wenn $h = 0$:

d) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x)$.

II) $f(x)$ oder $y = x^3$;

a) $f(x_1)$ oder $y_1 = x_1^3$;

b) $f(x_1) - f(x)$ oder $y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2)$;

c) $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1 - x}$ oder $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1x + x^2$.

Wird $x_1 = x$, so $x_1 - x = 0$, hence:

d) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = (x^2 + xx + x^2) = 3x^2$.

In beiden dasselbe sofern: wächst die unabhängige Variable x, so die abhängige y. Das Ganze kommt darauf an, wie das Wachstum von x ausgedrückt wird. Wird x zu x_1, so $x_1 - x = \Delta x = h$ (unbestimmte, endlos kontrahierbare, aber immer endlich bleibende Differenz) [95].

Δx oder h ist das Inkrement, um welches x gewachsen ist, denn: a) $x_1 = x + \Delta x$, aber auch umgekehrt b) $x + \Delta x$ oder $x + h = x_1$.

Der Differentialcalcul geht historisch von a) aus, d.h. davon, dass die Differenz Δx oder das Inkrement h (das eine drückt dasselbe aus wie das andre, das eine negativ als Differenz Δx, das andre positiv als Inkrement h) *selbständig existiert* neben der *Grösse* x, deren Inkrement es ist, die es also als *gewachsen* ausdrückt, aber um h gewachsen. Es wird

* СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ДАЛАМБЕРА С АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

Сравним метод Даламбера с алгебраическим [94].

I) $f(x)$ или $y=x^3$;

a) $f(x+h)$ или $y_1=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$;

b) $f(x+h)-f(x)$ или $y_1-y=3x^2h+3xh^2+h^3$;

c) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ или $\frac{y_1-y}{h}=3x^2+3xh+h^2$;

если $h=0$, то:

d) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}=3x^2=f'(x)$.

II) $f(x)$ или $y=x^3$;

a) $f(x_1)$ или $y_1=x_1^3$;

b) $f(x_1)-f(x)$ или $y_1-y=x_1^3-x^3=(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)$;

c) $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ или $\frac{y_1-y}{x_1-x}=x_1^2+x_1x+x^2$.

Когда становится $x_1=x$, то $x_1-x=0$, следовательно:

d) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}=(x^2+xx+x^2)=3x^2$.

В обоих [методах] одно и то же: если возрастает независимая переменная x, то возрастает и зависимая переменная y. Все сводится к тому, как выражено возрастание x. Когда x становится x_1, то $x_1-x=\Delta x=h$ (неопределенная, бесконечно уменьшаемая, однако всегда остающаяся конечной разность) [95].

Δx или h есть приращение, на которое возросло x, ибо:

a) $x_1=x+\Delta x$, но и, обратно, b) $x+\Delta x$ или $x+h=x_1$.

Дифференциальное исчисление исторически исходит из а), т. е. из того, что разность Δx или приращение h (оба выражают одно и то же, первое — отрицательно, как разность Δx, второе — положительно, как приращение h) *существуют самостоятельно* рядом с *величиной* x, чьим приращением оно является, которую оно, следовательно, выражает как *возросшую*, но возросшую на h. Этим с dadurch von vornherein der Vorteil erreicht, dass die diesem allgemeinen Ausdruck entsprechende Originalfunktion der Variablen, sobald sie wächst, in Binomen von bestimmtem Grad ausgedrückt und daher das binomische Theorem von vornherein auf sie anwendbar wird. In der Tat schon auf der allgemeinen, der linken Seite, haben wir ein Binom, nämlich $x + \Delta x$ [solches dass $f(x + \Delta x)$] oder $y_1 =$ etc.

Der mystische Differentialcalculus verwandelt sofort:

$(x + \Delta x)$ in

$(x + dx)$ oder bei Newton in $x + \dot{x}$ [96]. Dadurch erhalten wir auch auf der rechten, der algebraischen Seite sofort Binome in $x + dx$ oder $x + \dot{x}$, die dann als gewöhnliche Binome behandelt werden. Die Verwandlung von Δx in dx oder $\dot{x}$ ist unterstellt a priori, statt mathematisch abgewiesen zu sein, daher später die mystischen Unterdrückungen von Gliedern der entwickelten Binome möglich wird.

D'Alembert geht aus von $(x + dx)$, korrigiert aber die Ausdrücke in $(x + \Delta x)$ alias in $(x + h)$; es wird jetzt eine Entwicklung nötig, wodurch Δx oder h in dx verwandelt wird, aber das ist auch alle Entwicklung, die wirklich vorgeht.

Ob falsch von $(x + dx)$ oder richtig von $(x + h)$ ausgegangen wird, dies unbestimmte Binom in die gegebne algebraische [Potenz]funktion von x gesetzt, verwandelt in ein Binom von einem bestimmten Grad, wie in Ia) statt x^3 nun erscheint $(x + h)^3$, und zwar in ein Binom, wo in dem einen Fall dx, im andern h als dessen letztes Glied figuriert, daher auch in der Entwicklung nur als Faktor, womit die durch das Binom abgeleiteten Funktionen äusserlich behaftet sind.

Daher finden wir *gleich in* Ia) die *erste Abgeleitete* von x^3 fertig vor, nämlich als $3x^2$, als Koeffizient im zweiten Glied der Reihe, behaftet mit h. $3x^2 = f'(x)$ bleibt von nun an unverändert. Es selbst ist durch keinen Differentiationsprozess irgendeiner Art abgeleitet, sondern von vornherein durch den binomischen Lehrsatz geliefert, und zwar, weil wir von vornherein das gewachsne x als Binom

$$x + \Delta x = x + h,$$

als um h angewachsnes x dargestellt haben. Die ganze Aufgabe besteht nun darin, die nicht etwa embryonisch existierende, sondern fix und fertige $f'(x)$ von ihrem Faktor h und seinen andern Nebengliedern loszuschälen.

Dagegen in IIa) geht das gewachsne x_1 ganz in derselben Form in die algebraische Funktion ein wie x ursprünglich in sie einging; x^3 wird zu x_1^3. Die Abgeleitete $f'(x)$ kann erst durch 2 sukzessive Differentiationen, und zwar beide von genau unterschiednem Charakter, am Schluss erhalten werden.

самого начала достигается то преимущество, что соответствующая общему выражению первоначальная функция переменной — коль скоро эта последняя возрастает — выражается в биномах определенной степени, и поэтому уже с самого начала к ней становится применимой теорема о биноме. Действительно, уже на общей, левой стороне мы имеем бином, именно $x+\Delta x$, [такой, что $f(x+\Delta x)$] или $y_1 =$ и т. д.

Мистическое дифференциальное исчисление сразу превращает:

$(x+\Delta x)$ в

$(x+dx)$ или, по Ньютону, в $x+\dot{x}$ [96]. Благодаря этому мы и на правой, алгебраической стороне получаем сразу биномы в $x+dx$ или $x+\dot{x}$, с которыми затем поступают, как с обыкновенными биномами. Превращение Δx в dx или $\dot{x}$ допускается a priori, вместо того чтобы быть математически выведенным, почему впоследствии становится возможным мистическое отбрасывание членов развернутых биномов.

Даламбер исходит из $(x+dx)$, но исправляет эти выражения, заменяя их на $(x+\Delta x)$, соответственно на $(x+h)$; теперь становится необходимым некоторое развитие, с помощью которого Δx или h превращается в dx, но к этому и сводится все развитие, которое действительно происходит.

Исходить ли ошибочно из $(x+dx)$ или правильно из $(x+h)$, подстановка этого неопределенного бинома в заданную алгебраическую [степенную] функцию от x превращает ее в бином некоторой определенной степени, подобно тому как в Ia) вместо x^3 появляется теперь $(x+h)^3$, притом в бином, где в одном случае dx, в другом h фигурирует в качестве его последнего члена, а следовательно, и при разложении этого бинома — лишь в виде множителя, внешне присоединяемого к производимым с помощью бинома функциям.

Поэтому *уже в* Ia) мы находим в готовом виде *первую производную* от x^3, а именно $3x^2$, как коэффициент во втором члене ряда, наделенный множителем h. С этого момента $3x^2 = f'(x)$ остается неизменной. Эта производная получена отнюдь не в результате какого-либо процесса дифференцирования, но дана с самого начала теоремой о биноме, и притом потому, что мы с самого начала представили возросшее x в виде бинома $x+\Delta x = x+h$, т. е. как x, возросшее на h. Вся задача состоит теперь в том, чтобы высвободить не какую-то существующую лишь в зародыше, а совершенно готовую $f'(x)$ от ее множителя h и других ее соседних членов.

Напротив, в IIa) возросшее x_1 входит в алгебраическую функцию совершенно в том же виде, в каком первоначально входила в нее x; x^3 обращается в x_1^3. Производная $f'(x)$ может быть получена лишь в результате двух последовательных дифференциальных операций, и притом совершенно различного характера.

In der Gleichung Ib) bereitet zwar die Differenz $f(x+h)-f(x)$ oder $y_1 - y$ das Zustandekommen des symbolischen Differentialkoeffizienten vor; mit Bezug auf den realen ändert sie nichts als dass er aus dem zweiten Rang in den ersten der Reihe rückt, und daher seine Befreiung von h möglich wird.

In IIb) erhalten wir auf beiden Seiten den Ausdruck von Differenzen; sie wird auf der algebraischen Seite so entwickelt, dass $(x_1 - x)$ als Faktor neben einer abgeleiteten Funktion in x und x_1 erscheint, die erhalten durch Division von $x_1^3 - x^3$ durch $x_1 - x$. Erst die Existenz der Differenz $x_1^3 - x^3$ machte ihre Zerlegung in zwei Faktoren möglich. Da

$$x_1 - x = h,$$

könnten die beiden Faktoren, worin $x_1^3 - x^3$ zerlegt, auch geschrieben werden $h\,(x_1^2 + x_1 x + x^2)$. Dies zeigt neuen Unterschied von Ib). h selbst als *Faktor der vorläufig Abgeleiteten* ist erst abgeleitet durch die Entwicklung der Differenz $x_1^3 - x^3$ als Produkt zweier Faktoren, während h als Faktor der «Abgeleiteten», wie diese selbst in Ia), schon fertig existiert, bevor irgendeine Differenz entwickelt worden ist. Dass das unbestimmte Wachstum von x zu x_1 neben x die getrennte Form des Faktors h annimmt, ist in I) von vornherein unterstellt, in II) (da $x_1 - x = h$) bewiesen durch die Ableitung. h ist zwar in I) einerseits unbestimmt, andrerseits aber doch schon soweit bestimmt, als das unbestimmte Wachstum von x bereits als eine *eigne* Grösse erscheint, *um* die x gewachsen ist, daher als solche neben ihm auftritt.

In Ic) wird nun $f'(x)$ von seinem Faktor h befreit; wir erhalten so auf der linken Seite $\frac{y_1 - y}{h}$ oder $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, also einen noch endlichen Ausdruck des Differentialkoeffizienten. Auf der andern Seite aber haben wir erreicht, dass indem wir $h=0$ setzen in $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, dies also in $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$ verwandeln, wir in Id) einerseits die symbolischen Differentialkoeffizienten erhalten, andrerseits $f'(x)$, die schon in Ia) fertig bestand, nun seine Nebenglieder los wird und allein auf der rechten Seite figuriert.

Positive Entwicklung geht nur auf der linken Seite vor, indem hier der symbolische Differentialkoeffizient hergestellt ist. Auf der rechten Seite besteht die Entwicklung nur darin $f'(x) = 3x^2$, das schon in Ia) durch das Binom gefunden, von seinem ursprünglichen Zubehör zu befreien. Die Verwandlung von h in 0 oder $x_1 - x = 0$ hat auf der rechten Seite nur diesen negativen Sinn.

В уравнении Ib) разность $f(x+h)-f(x)$ или y_1-y хотя и подготовляет появление символического дифференциального коэффициента, но в реальный коэффициент эта разность не вносит никаких изменений, разве только он передвигается со второго места в ряду на первое, почему и становится возможным освобождение его от h.

В IIb) мы получаем на обеих сторонах выражение разностей; на алгебраической стороне разность развертывается так, что (x_1-x) появляется в виде множителя при некоторой производной функции в x и x_1, получаемой посредством деления $x_1^3-x^3$ на x_1-x. Только наличие разности $x_1^3-x^3$ сделало возможным разложение ее на два множителя. Так как $x_1-x=h$, то оба множителя, на которые $x_1^3-x^3$ разложена, можно было записать также в виде $h(x_1^2+x_1x+x^2)$. В этом проявляется новое отличие от Ib). Само h как *множитель при предварительной производной* выведено лишь с помощью разложения разности $x_1^3-x^3$ в произведение двух множителей, тогда как h в качестве множителя при «производной», как и сама она в Ia), существует уже в готовом виде еще до того, как была образована какая бы то ни было разность. То, что неопределенное возрастание x до x_1 принимает рядом с x обособленную форму множителя h, в I) подразумевается с самого начала, в II) же (так как $x_1-x=h$) доказывается выводом. Хотя h в I), с одной стороны, неопределенно, однако, с другой стороны, оно все же настолько уже определено, что неопределенное возрастание x появляется уже как некоторая *самостоятельная* величина, *на которую* x возросло и которая поэтому выступает как таковая рядом с ним.

Далее, в Ic) $f'(x)$ освобождается от своего множителя h; мы получаем на левой стороне $\frac{y_1-y}{h}$ или $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, т. е. некоторое еще конечное выражение дифференциального коэффициента. Но на другой стороне мы достигли того, что, когда мы полагаем $h=0$ в $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, обращаем, следовательно, последнее в $\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}$, мы в Id), с одной стороны, получаем символические дифференциальные коэффициенты, с другой стороны, $f'(x)$, существовавшая уже в Ia) в готовом виде, освобождается теперь от своих побочных членов и фигурирует одна на правой стороне.

Положительное развитие происходит лишь на левой стороне, поскольку здесь получается символический дифференциальный коэффициент. На правой стороне развитие заключается лишь в том, чтобы освободить $f'(x)=3x^2$, которое уже в Ia) было найдено с помощью бинома, от его первоначального сопровождения. Превращение h в 0 или $x_1-x=0$ имеет на правой стороне лишь этот отрицательный смысл.

Dagegen in IIc) ist erst eine *vorläufige Abgeleitete* erhalten, durch Division beider Seiten durch $x_1 - x$ $(= h)$.

Endlich in IId) wird von dem positiven $x_1 = x$ setzen die *definitive Abgeleitete* erhalten. Dies $x_1 = x$ bedeutet aber zugleich $x_1 - x = 0$ setzen und verwandelt daher auf der linken Seite das endliche Verhältnis $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$.

In I) wird ebensowenig die «Abgeleitete» gefunden durch das Setzen von $x_1 - x = 0$ oder $h = 0$, wie in der mystischen Differentialmethode. In beiden Fällen werden die Nebenglieder der von vornherein fertig erscheinenden $f'(x)$ aus dem Weg geräumt, jetzt mathematisch richtig, dort durch einen coup d'état.

Напротив, в IIc) сначала получается некоторая *предварительная производная* делением обеих сторон на $x_1 - x$ $(= h)$.

Наконец, в IId) положительное полагание $x_1 = x$ дает нам *окончательную производную*. Но это полагание $x_1 = x$ означает одновременно полагание $x_1 - x = 0$ и превращает вследствие этого на левой стороне конечное отношение $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ в $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$.

В I) «производная» столь же мало находится полаганием $x_1 - x = 0$ или $h = 0$, как и в мистическом дифференциальном методе. В обоих случаях устраняются с пути побочные члены появляющейся сразу в готовом виде $f'(x)$, теперь математически правильно, там — посредством coup d'état.

* ANALYSE VON D'ALEMBERT'S METHODE MITTELS NOCH EINES BEISPIELS [97]

Entwickeln wir nun nach D'Alemberts Methode:

a) $f(u)$ [98] oder $y = 3u^2$;

b) $f(x)$ oder $u = x^3 + ax^2$.

$$y = 3u^2, \tag{1}$$

$$f(u) = 3u^2. \tag{1a}$$

$$f(u+h) = 3(u+h)^2,$$

$$f(u+h) - f(u) = 3(u+h)^2 - 3u^2 = 3u^2 + 6uh + 3h^2 - 3u^2 = 6uh + 3h^2 \tag{2}$$

(*hier schon die abgeleitete Funktion fertig als Koeffizient von h durch binomischen Lehrsatz*),

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} = 6u + 3h.$$

Durch die Division wird die schon in (2) fertig gegebne $f'(u) = 6u$ von ihrem Faktor h befreit.

$$\frac{f(u+0) - f(u)}{0} = 6u,$$

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} \quad \text{alias} \quad \frac{0}{0} = \frac{dy}{du} = 6u.$$

Hierin den Wert von u aus Gleichung b) gesetzt, gibt

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2).$$

Da y in a) differenziert mit Bezug auf u, so

$$(u_1 - u) = h, \quad \text{oder} \quad h = (u_1 - u),$$

da u die unabhängige Variable.

* АНАЛИЗ МЕТОДА ДАЛАМБЕРА ЕЩЕ НА ОДНОМ ПРИМЕРЕ [97]

Будем оперировать по методу Даламбера:

a) $f(u)$ [98] или $y = 3u^2$;

b) $f(x)$ или $u = x^3 + ax^2$.

$$y = 3u^2, \tag{1}$$

$$f(u) = 3u^2. \tag{1a}$$

$$f(u+h) = 3(u+h)^2,$$

$$f(u+h) - f(u) = 3(u+h)^2 - 3u^2 = 3u^2 + 6uh + 3h^2 - 3u^2 = 6uh + 3h^2 \tag{2}$$

(*здесь производная функция дана теоремой о биноме уже в готовом виде — в виде коэффициента при* h),

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} = 6u + 3h.$$

С помощью этого деления данная уже в готовом виде в (2) $f'(u) = 6u$ освобождается от своего множителя h:

$$\frac{f(u+0) - f(u)}{0} = 6u,$$

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u}, \quad \text{затем} \quad \frac{0}{0} = \frac{dy}{du} = 6u.$$

Подставив сюда значение u из уравнения b), будем иметь

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2).$$

Так как y в a) дифференцируется относительно u, то

$$(u_1 - u) = h, \quad \text{или} \quad h = (u_1 - u),$$

потому что u — независимая переменная.

Also:

$$\frac{dy}{du} = 6\,(x^3 + ax^2).$$

(Dies erhalten aus $f(u)$ oder $y = 3u^2$.)

[Entwickeln wir nun ebenso b), nämlich:]

b) $f(x)$ oder $u = x^3 + ax^2$,

$$f(x+h) = (x+h)^3 + a\,(x+h)^2,$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 + a\,(x+h)^2 - x^3 - ax^2 =$$

$$\left.\begin{aligned} &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ &+ ax^2 + 2axh + ah^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &-x^3 + \\ &-ax^2 = \end{aligned}$$

$$= (3x^2 + 2ax)\,h + (3x + a)\,h^2 + h^3,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 2ax + (3x + a)\,h + h^2.$$

Setzen wir nun h vorn $= 0$, so auf zweiter Seite:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Die abgeleitete Funktion $3x^2 + 2ax$ aber schon fertig enthalten in

$$f(x+h) = (x+h)^3 + a\,(x+h)^2,$$

denn diese liefert

$$x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + ax^2 + 2axh + ah^2.$$

Also

$$x^3 + ax^2 + (3x^2 + 2ax)\,h + (3x + a)\,h^2 + h^3.$$

Sie erscheint bereits als fertiger Koeffizient von h. Diese Abgeleitete ist also nicht erhalten durch Differentiation, sondern durch Wachstum von $f(x)$ zu $f(x + h)$ und daher von $x^3 + ax^2$ zu $(x + h)^3 + a\,(x + h)^2$.

Sie ist einfach erhalten dadurch, dass wenn x zu $x + h$ wird, wir auf der andern Seite Binome in $x + h$ von bestimmten Grad erhalten, deren zweites, mit h behaftetes Glied die abgeleitete Funktion von u oder $f'(u)$ fix und fertig enthält.

Alle weiteren Prozeduren dienen nur dazu, die so von vornherein gegebne $f'(x)$ zu befreien von ihrem eignen Koeffizienten h und von allen andern Gliedern.

Die Gleichung:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{etc.}$$

liefert Doppeltes: erstens den Zähler der ersten Seite als Differenz der

Итак,

$$\frac{dy}{du} = 6\,(x^3 + ax^2).$$

(Это получено из $f(u)$ или $y = 3u^2$.)

[Теперь тем же методом будем оперировать с b), именно:]

b) $f(x)$ или $u = x^3 + ax^2$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^3 + a\,(x+h)^2, \\ f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 + a\,(x+h)^2 - x^3 - ax^2 = \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} -x^3 + \\ -ax^2 = \end{array} \right. \\ &\quad + ax^2 + 2axh + ah^2 \\ &= (3x^2 + 2ax)\,h + (3x + a)\,h^2 + h^3, \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 2ax + (3x + a)\,h + h^2.$$

Если мы теперь положим $h = 0$, то на второй стороне

$$\frac{0}{0} \text{ и и } \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Но производная функция $3x^2 + 2ax$ содержится уже в готовом виде в

$$f(x+h) = (x+h)^3 + a\,(x+h)^2,$$

так как последнее дает

$$x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + ax^2 + 2axh + ah^2,$$

следовательно,

$$x^3 + ax^2 + (3x^2 + 2ax)\,h + (3x + a)\,h^2 + h^3.$$

Она появляется уже как готовый коэффициент при h. Следовательно, эта производная получена не путем дифференцирования, а благодаря возрастанию $f(x)$ до $f(x + h)$, т. е. $x^3 + ax^2$ до $(x+h)^3 + a\,(x+h)^2$.

Она получена просто благодаря тому, что с превращением x в $x + h$ на другой стороне получаются биномы $x + h$ в определенных степенях, причем второй член, с множителем h, содержит в готовом виде производную функцию от u, или $f'(u)$.

Все дальнейшие процедуры приводят лишь к высвобождению заданной с самого начала $f'(x)$ от ее собственного коэффициента h и от всех остальных членов.

Уравнение

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{и т. д.}$$

имеет двоякое значение: во-первых, оно позволяет получить

$f(x)$ zunächst als $= \Delta f(x)$ zu erhalten; aber auf der zweiten Seite gibt sie nur den algebraischen Vorteil, die in x gegebne Originalfunktion $x^3 + ax^2$ zu entfernen aus dem Produkt von $(x+h)^3 + a(x+h)^2$, etc.

Doch fahren wir weiter: Wir haben erhalten für a):

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2),$$

und für b):

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Multiplizieren wir $\frac{dy}{du}$ mit $\frac{du}{dx}$, so

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

was gesucht war. Setzen wir hierin die für $\frac{dy}{du}$ und $\frac{du}{dx}$ gefundenen Werte, so: also

$$\frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax)$$

und daher, allgemein ausgedrückt, wenn wir haben:

$$y = f(u); \quad \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du}, \qquad u = f(x); \quad \frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

hence:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Setzen wir nun in der Gleichung a) $h = u_1 - u$, in der Gleichung b) $h = x_1 - x$, so stellt sich die Sache so dar:

$$y \text{ oder } f(u) = 3u^2,$$

$$f(u + (u_1 - u)) = 3(u + (u_1 - u))^2 = 3u^2 + 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2,$$

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 3u^2 + 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)(u_1 - u) - 3u^2,$$

hence:

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2,$$

$$\frac{f(u + (u_1 - u)) - f(u)}{u_1 - u} = 6u + 3(u_1 - u).$$

числитель первой стороны в виде разности [значений] $f(x)$, [т. е.] сначала как равный $\Delta f(x)$; на второй же стороне оно дает только алгебраическое преимущество, позволяющее удалить из результата выполнения операции в $(x+h)^3 + a(x+h)^2$ заданную в x первоначальную функцию $x^3 + ax^2$, и т. д.

Но пойдем дальше. Мы получили для a)

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2),$$

и для b)

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Помножив $\frac{dy}{du}$ на $\frac{du}{dx}$, мы получили

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

т. е. искомое. Подставим сюда вместо $\frac{dy}{du}$ и $\frac{du}{dx}$ найденные для них значения, мы получим

$$\frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax),$$

и, вообще говоря, если мы имеем:

$$y = f(u), \qquad \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du}, \qquad u = f(x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

то

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Если в уравнении a) положить $h = u_1 - u$, а в уравнении b) $h = x_1 - x$, то дело представится в таком виде:

$$y \text{ или } f(u) = 3u^2,$$

$$f(u + (u_1 - u)) = 3(u + (u_1 - u))^2 = 3u^2 + 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2,$$

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 3u^2 + 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)(u_1 - u) - 3u^2,$$

следовательно,

$$f(u + (u_1 - u)) - f(u) = 6u(u_1 - u) + 3(u_1 - u)^2,$$

$$\frac{f(u + (u_1 - u)) - f(u)}{u_1 - u} = 6u + 3(u_1 - u).$$

Hence [wenn] $u_1 - u$ im ersten Glied $= 0$, so

$$\frac{dy}{du} = 6u + 0 = 6u.$$

Dies zeigt, dass wenn von vornherein $f(u)$ zu $f(u + (u_1 - u))$ [wird], so dass sein Inkrement als positives zweites Glied eines bestimmten Binoms auf der zweiten Seite erscheint, das zweite Glied, das durch den binomischen Lehrsatz mit $(u_1 - u)$ oder h behaftet, sofort der gesuchte Koeffizient ist. Ist das zweite Glied polynomisch, wie es wird

in $x^3 + ax^2$, welches wird $(x + h)^3 + a\,(x + h)^2$,

oder

$$(x + (x_1 - x))^3 + a\,(x + (x_1 - x))^2,$$

so sind nur die mit $x_1 - x$ in der ersten Potenz, alias h in der ersten Potenz behafteten Glieder zu summieren als Koeffizient von h oder $x_1 - x$; und wir haben wieder den Koeffizienten fertig.

Dies Resultat zeigt:

1) dass, wenn in der D'Alembertschen Entwicklung für $x_1 - x = h$ umgekehrt gesetzt wird $h = x_1 - x$, damit absolut nichts an der Methode selbst geändert wird, sondern nur klarer die Methode hervortritt, durch $f(x + h)$ oder $f(x + (x_1 - x))$ sofort für den algebraischen Ausdruck auf der andern Seite Binome zu erhalten statt der Originalfunktion, wie z. B. statt im gegebnen Fall $3u^2$.

Das zweite Glied, das man so findet, behaftet mit h oder $x_1 - x$, ist die fertige erste abgeleitete Funktion. Die Aufgabe besteht nun, sie von h oder $x_1 - x$ zu befreien, was sich leicht macht. Die abgeleitete Funktion ist fertig da; sie wird also nicht durch $x_1 - x = 0$ gefunden, sondern befreit von ihrem Faktor $(x_1 - x)$ und Zubehör. Wie sie durch einfache Multiplikation (binomische Entwicklung) gefunden als zweites Glied [behaftet mit dem Faktor] $x_1 - x$, [so] wird sie schliesslich durch Division auf beiden Seiten mit $x_1 - x$ von letztrem befreit.

Die Mittelprozedur besteht aber in der Entwicklung der Gleichung

$$f(x + h) - f(x) \text{ oder } f(x + (x_1 - x)) - f(x) = [\ldots].$$

Diese Gleichung hat hier keinen [andern] Zweck, als die Ausgangsfunktion verschwinden zu machen auf der zweiten Seite, da die Entwicklung [von] $f\,(x + h)$ notwendig $f\,(x)$ enthält mit ihrem durch das Binom entwickeltem Inkrement. Diese [Glieder, die die Originalfunktion ausmachen,] werden also aus der zweiten Seite entfernt.

Следовательно, [если] $u_1 - u$ в первом члене $= 0$, то

$$\frac{dy}{du} = 6u + 0 = 6u.$$

Это показывает, что если с самого начала $f(u)$ превращается в $f(u + (u_1 - u))$, так что ее приращение появляется на второй стороне в виде положительного второго члена определенного бинома, то второй член, который по теореме о биноме имеет множителем $(u_1 - u)$ или h, тотчас же оказывается искомым коэффициентом. Если второй член — полином, как это мы видим в $x^3 + ax^2$, превращаемом в $(x + h)^3 + a(x + h)^2$ или в

$$(x + (x_1 - x))^3 + a(x + (x_1 - x))^2,$$

то для получения коэффициента при h, или $x_1 - x$, требуется лишь сложить члены с $x_1 - x$ (или h) в первой степени — и коэффициент готов. Этот результат показывает:

1) что если в Даламберовом развертывании вместо $x_1 - x = h$ положить, наоборот, $h = x_1 - x$, то этим абсолютно ничего не меняется в самом методе, только ярче выявляется особенность этого метода, заключающаяся в том, что с помощью $f(x + h)$ или $f(x + (x_1 - x))$ в алгебраическом выражении на второй стороне вместо первоначальной функции, в данном случае вместо $3u^2$, тотчас же получаются биномы.

Находимый таким образом второй член с множителем h, или $x_1 - x$, есть готовая первая производная функция. Теперь задача состоит в том, чтобы освободить ее от h или $x_1 - x$, что делается уже легко. Производная функция в готовом виде уже налицо; она, следовательно, не отыскивается посредством полагания $x_1 - x = 0$, но освобождается от своего множителя $(x_1 - x)$ и всего прочего. Подобно тому как посредством простого умножения (биномиального развертывания) она находится как второй член [с множителем] $x_1 - x$, [так] она освобождается в конечном счете от этого последнего делением обеих сторон на $x_1 - x$. Промежуточные же операции заключаются в развертывании уравнения

$$f(x+h) - f(x) \quad \text{или} \quad f(x + (x_1 - x)) - f(x) = [\ldots].$$

Это уравнение нужно только для того, чтобы заставить исчезнуть исходную функцию на второй стороне, так как разложение $f(x + h)$ необходимо содержит $f(x)$ вместе с ее развернутым по биному приращением. Таким образом, эти [члены, соответствующие исходной функции], удаляются со второй стороны.

Was also geschieht z. B. in

$$(x+h)^3+a(x+h)^2-x^3-ax^2,$$

ist, die ersten Glieder x^3 und ax^2 aus den Binomen $(x+h)^3 + a(x+h)^2$ zu entfernen; wir erhalten so die mit h oder $x_1 - x$ behaftete schon fertige abgeleitete Funktion als erstes Glied der Gleichung.

Die erste Differentiation auf der zweiten Seite ist nichts als einfache Subtraktion der Originalfunktion von ihrem angewachsnen Ausdruck, gibt uns also das Inkrement, um das sie gewachsen ist, dessen erstes, mit h behaftetes Glied schon die fertige abgeleitete Funktion. Die andern Glieder können nichts enthalten als Koeffizienten von h^2 etc. oder $(x_1-x)^2$ etc.; sie werden durch die erste Division mit x_1-x auf beiden Seiten um eine Potenz erniedrigt, während das erste Glied ohne h auftritt.

2) Der Unterschied von der Methode $f(x_1)-f(x) =$ etc. liegt darin, dass wir z.B. erhalten, wenn

$$f(x) \text{ oder } u=x^3+ax^2,$$
$$f(x_1) \text{ oder } u_1=x_1^3+ax_1^2,$$

der erste Anwachs der Variablen x uns keineswegs von vornherein das $f'(x)$ fertig fabriziert liefert.

[Bei der Bildung der Differenz $f(x_1)-f(x)$ erhalten wir]

$$f(x_1)-f(x) \text{ oder } u_1-u=x_1^3+ax_1^2-(x^3+ax^2).$$

Hier handelt es sich keineswegs darum die Originalfunktion wieder zu entfernen, da $x_1^3 + ax_1^2$ in keiner Form x^3 und ax^2 enthält. Im Gegenteil liefert uns diese erste Differenzengleichung ein Entwicklungsmoment, nämlich die Verwandlung jedes der beiden ursprünglichen Glieder in Differenzen von [Potenzen von] x_1 und x.

Nämlich:

$$=(x_1^3-x^3)+a(x_1^2-x^2).$$

Es ist nun klar, dass, wenn wir jedes dieser beiden Glieder wieder zerlegen in Faktoren von x_1-x, wir als Koeffizienten von x_1-x Funktionen in x_1 und x erhalten, nämlich:

$$f(x_1)-f(x) \text{ oder } u_1-u=(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1-x)(x_1+x).$$

Dividieren wir dies durch x_1-x, also auch die linke Seite, so:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \text{ oder } \frac{u_1-u}{x_1-x}=(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1+x).$$

Durch diese Division haben wir die vorläufig Abgeleitete erhalten. Jeder ihrer Teile enthält Glieder in x_1.

То, следовательно, что происходит, например, в

$$(x+h)^3+a(x+h)^2-x^3-ax^2,$$

состоит в удалении первых членов x^3 и ax^2 из биномов $(x+h)^3 + a(x+h)^2$; мы получаем, таким образом, наделенную множителем h или $x_1 - x$ уже готовую производную функцию как первый член уравнения.

Первое дифференцирование на второй стороне есть не что иное, как простое вычитание первоначальной функции из ее возросшего выражения; следовательно, это дает нам то приращение, на которое она возросла, причем его первый член, наделенный множителем h, есть уже готовая производная функция. Другие члены не могут содержать ничего иного, кроме коэффициентов при h^2 и т. д. или $(x_1 - x)^2$ и т. д.; первое деление на $x_1 - x$ на той и другой стороне снизит на одну единицу показатели степени последних, причем первый член будет выступать без h.

2) Отличие от метода $f(x_1)-f(x)=$ и т. д. заключается в том, что, если, например, мы получаем

$$f(x) \text{ или } u=x^3+ax^2, \qquad \text{когда } f(x_1) \text{ или } u_1=x_1^3+ax_1^2$$

— первое возрастание переменной x, отнюдь не дает нам с самого начала $f'(x)$ в готовом виде.

[При образовании разности $f(x_1) - f(x)$ мы получим]

$$f(x_1)-f(x) \text{ или } u_1-u=x_1^3+ax_1^2-(x^3+ax^2).$$

Здесь дело вовсе не в том, чтобы снова устранять первоначальную функцию, так как $x_1^3 + ax_1^2$ ни в какой форме не содержит x^3 и ax^2. Напротив, первое разностное уравнение дает нам некоторый момент развития, именно превращение каждого из обоих первоначальных членов в разности [степеней] x_1 и x. Именно:

$$= (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2).$$

Теперь уже ясно, что если мы в каждом из этих обоих членов выделим снова множитель $x_1 - x$, то в качестве коэффициентов при $x_1 - x$ мы получим функции в x_1 и x, именно:

$$f(x_1)-f(x) \text{ или } u_1-u=(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1-x)(x_1+x).$$

Разделив это, а следовательно и левую сторону, на x_1-x, получим

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \text{ или } \frac{u_1-u}{x_1-x}=(x_1^2+x_1x+x^2)+a(x_1+x).$$

С помощью этого деления мы получили предварительную производную. Каждая из ее частей содержит члены с x_1.

Wir können also schliesslich nur die abzuleitende erste Funktion in x erhalten, wenn wir $x_1 = x$ setzen, also $x_1 - x = 0$, dann wird:

$$x_1^2 = x^2, \quad x_1 x = x^2,$$

so:

$$(x_1^2 + x_1 x + x^2) = 3x^2 \text{ und } x_1 + x = x + x = 2x;$$

also:

$$a\,(2x) = 2xa.$$

Resultat auf der andern [Seite]

$$\frac{df\,(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Hier wird also die abgeleitete Funktion erst durch das Setzen von $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$ erhalten. $x_1 = x$ liefert das schliessliche positive Resultat in der wirklichen Funktion x.

Aber $x_1 = x$ liefert auch $x_1 - x = 0$ und daher zugleich, neben diesem positiven Resultat, auf der andern Seite das symbolische $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$.

Wir hätten von vornherein sagen können: wir müssen schliesslich eine *Abgeleitete* in x_1 und x erhalten. Diese kann nur zur Abgeleiteten in x sich wandeln, sobald $x_1 = x$ gesetzt wird, aber $x_1 = x$ setzen ist dasselbe wie $x_1 - x = 0$ setzen, welche Nullifikation sich positiv ausdrückt in der Formel $x_1 = x$, die zur Verwandlung der Abgeleiteten in Funktion von x nötig, während ihre negative Form $x_1 - x = 0$ uns das Symbol liefern muss.

3) Selbst wenn diese Behandlung von x, wo nicht ein Inkrement z. B. $x_1 - x = \Delta x$ od. h selbständig neben ihm eingeführt wird, schon bekannt, was sehr wahrscheinlich und wovon ich mich auf dem Museum durch Nachsehn von J. Landen überzeugen werde, so kann ihr wesentlicher Unterschied nicht begriffen worden sein.

Was diese Methode aber von Lagrange unterscheidet, dass in ihr wirklich differenziert wird, daher auch die Differentialausdrücke auf der symbolischen Seite entspringen, während bei ihm die Ableitung nicht die Differentiation algebraisch darstellt, sondern die Funktionen algebraisch direkt aus dem Binom ableitet und ihre differentielle Form nur «der Symmetrie» halber angenommen wird, weil aus dem Differentialcalculus bekannt, dass die erste abgeleitete Funktion $= \frac{dy}{dx}$, die zweite $= \frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

Мы можем, следовательно, получить наконец первую подлежащую выводу функцию в x, лишь положив $x_1 = x$, следовательно, $x_1 - x = 0$. Тогда будет

$$x_1^2 = x^2, \quad x_1 x = x^2$$

и, следовательно,

$$(x_1^2 + x_1 x + x^2) = 3x^2 \text{ и } x_1 + x = x + x = 2x,$$

откуда

$$a(2x) = 2xa.$$

Результат на другой [стороне]:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Здесь, следовательно, производная функция получается лишь полаганием $x_1 = x$, т. е. $x_1 - x = 0$. [Равенство] $x_1 = x$ дает окончательный определенный результат в виде настоящей функции x.

Но $x_1 = x$ дает также $x_1 - x = 0$, а поэтому одновременно, наряду с этим определенным результатом, на другой стороне дает символическое $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$.

Можно было бы заранее сказать: мы должны в конце концов получить *производную* в x_1 и x. Она может только преобразиться в производную в x, коль скоро будет положено $x_1 = x$, но полагать $x_1 = x$ — все равно что полагать $x_1 - x = 0$. Это превращение в нуль положительно выражено в формуле $x_1 = x$, необходимой для превращения производной в функцию от x, тогда как отрицательная форма $x_1 - x = 0$ должна дать нам символ.

3) Даже если эта трактовка x, где его приращение, например, $x_1 - x = \Delta x$ или h, не вводится самостоятельно рядом с ним, была уже известна, что весьма вероятно и в чем я сумею убедиться, посмотрев в Музее Дж. Ландена, все же существенное ее отличие от других трактовок не могло быть понято.

Отличие этого метода от [метода] Лагранжа заключается в том, что при данном методе производится подлинное дифференцирование, в силу чего и появляются дифференциальные выражения на символической стороне, между тем как у него вывод не представляет алгебраически дифференцирование, но алгебраически выводит функции непосредственно из бинома, а их дифференциальная форма вводится лишь в целях «симметрии», так как из дифференциального исчисления известно, что первая производная $= \frac{dy}{dx}$, вторая $= \frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РУКОПИСЕЙ

РУКОПИСИ ДО 1870 ГОДА

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫКЛАДКИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ В ТЕТРАДЯХ ПО ПОЛИТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИИ

Каких-либо связных рукописей математического содержания до 60-х годов прошлого века у Маркса, по-видимому, не было. Отдельные страницы в некоторых тетрадях с выписками по политической экономии содержат математические выкладки. Но даже в случаях, когда тетрадь датирована самим Марксом, трудно сказать, к какому именно времени относятся эти выкладки. Вполне возможно, что в тетради оставалось несколько пустых страниц и Маркс использовал для математических выкладок пустое место в старой тетради. Такие страницы с выкладками, не содержащие никакого текста, имеются в следующих рукописях.

Ед. хр. 147

Это — тетрадь с выписками по политической экономии (из Шютца, Листа, Осиандера, Рикардо), которая датируется 1846 г. На последних листах (64—71) этой тетради — алгебраические выкладки, относящиеся к обобщению понятия степени на случаи дробного и отрицательного показателя степени, к показательной функции и логарифмам, к комбинаторике и биному Ньютона. Никакого словесного текста на этих листах нет.

Ед. хр. 210

Тетрадь по политической экономии, содержащая выписки из книг Кенэ. Так как выписки относятся к книге, которая вышла в свет в 1846 г., то тетрадь во всяком случае не может быть датирована ранее этого года.

На листах 12—17 — математические выкладки, содержание которых не очень ясно. Сначала встречается равенство $10 : 2 = (10 + 3^1/_3) : (2 + {}^2/_3)$ и связанная с ним система двух уравнений

$$10 : 2 = \left(10 + \frac{4}{x}\right) : \left(2 + \frac{4}{y}\right), \quad \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = 4,$$

решение которой обращает как раз первое уравнение в приведенное выше равенство. Далее приводятся разложения для $(x + a)^6$ и $(x + a)^5$ по биному Ньютона. Имеются еще какие-то системы уравнений с двумя или тремя неизвестными (какие именно, сказать трудно).

На листе 16 — два чертежа: окружности и, по-видимому, параболы. Тут же — уравнения прямой и окружности и какие-то арифметические вычисления, которые продолжаются на листе 17 (в частности, деление углом числа 15 911 729 на 2; полученного частного, т. е. 7 955 864, — на 4; числа 1 988 966, полученного в результате деления,— на 751 195; уследить за выкладкой дальше трудно).

Таким образом, ясно, что все эти выкладки могли сохраниться в бумагах Маркса лишь случайно. Они приводятся здесь только для полноты картины.

Ед. хр. 1052

Имеется в виду лист 36 в тетради, которая обозначена буквой «М» и содержит «Введение» и указатель к семи тетрадям подготовительных работ к книге «К критике политической экономии». В тетради имеются даты: 23/VIII и IX 1857 г., первая половина июня 1858 г.

Лист 36 содержит некоторые выкладки, имеющие вид каких-то разложений в ряд, и решение задачи: вставить n средних арифметических между числами a и b (сначала в общем виде, а затем при $a = 1$, $b = 23$, $n = 10$).

Ед. хр. 1153

На листах 15 и 17, которые представляют собою остававшиеся, очевидно, незаполненными первоначально половинки страниц в тетради с тематическим указателем к тетрадям I — VII с подготовительными работами к книге «К критике политической экономии», имеются:

на листе 15 — геометрические чертежи: прямоугольники и треугольники,

на листе 17 — дробные показатели степени и логарифмы, два треугольника и четырехугольник, разделенные на треугольники с общей вершиной в некоторой внутренней точке.

Со связным текстом историко-математического содержания мы встречаемся впервые в рукописи 497.

КОНСПЕКТЫ И ВЫПИСКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИЗ КНИГИ ПОППЕ

Ед. хр. 497

Среди фотокопий тетради с выписками по истории технологии, сделанными Марксом в сентябре — октябре 1851 г., имеются три листа: лл. 19—21 (в нумерации Маркса стр. 10—11), содержащие конспект некоторых частей книги: J. H. M. Poppe, «Geschichte der Mathematik seit der ältesten bis auf die neueste Zeit», Tübingen, 1828 (И. Г. М. Поппе, «История математики от древнейших времен до новейшего времени», Тюбинген, 1828).

Конспект представляет собой очень краткое изложение введения в книгу и некоторых сведений по истории чистой и прикладной математики. Чтобы дать представление о том, что именно привлекло внимание Маркса в книге Поппе, мы воспроизводим текст Маркса полностью.

Einleitung. Wie ⟨unvollkommen⟩ zurück die Mathematik der Chaldäer und Ägypter, zeigt schon die Methode der

Введение. Насколько несовершенной была математика халдеев и египтян, свидетельствует уже тот метод, с помощью alten Ägypter, die Höhe der Pyramiden aus der Länge ihrer Schatten zu messen. Für uns die Lehrer der Mathematik die Griechen. Plato Erfinder der geometrischen Analyse. Euclid, 284 vor Christus, studierte zu Athen unter den Platonikern. An der Elementargeometrie seit ihm wenig geändert. Die römischen Mathematiker nur Übersetzer und Erklärer der berühmten griechischen Schriftsteller. Gegen 7. Jahrhundert blühten die mathematischen Wissenschaften in den Ländern, die unter der Herrschaft der Araber und später auch der Perser standen. Von den Mauren nach Spanien gebracht und von da nach dem übrigen Europa verpflanzt. Fast nur bei den Arabern die Mathematik im 10^t, 11^t, 12^t und 13^t Jahrhundert ihre Zuflucht. Besonders die *Astronomie* von ihnen kultiviert. Übersetzten auch Euclides, Apollonios, Archimedes usw. *Roger Baco* in der letzten Hälfte des 13^t Jahrhunderts (1—14).

которого древние египтяне определяли высоту пирамид по длине их тени. Нашими учителями математики являются греки. Платон — изобретатель геометрического анализа. Евклид, 284 до р. Х., учился в Афинах у платоников. После него в элементарной геометрии мало что изменилось. Римские математики — только переводчики и комментаторы знаменитых греческих авторов. К 7-му столетию математические науки расцвели в странах, находившихся под властью арабов, а позднее и персов. Маврами они были перенесены в Испанию, а оттуда переместились в остальную Европу. Только у арабов в основном математика находила прибежище в 10-м, 11-м, 12-м и 13-м столетиях. В особенности ими культивировалась *астрономия*. Они переводили Евклида, Аполлония, Архимеда и др. *Роджер Бэкон* в последней половине 13-го столетия (1—14).

Цифры (1—14) указывают на соответствующие страницы книги Поппе. Следующие за этим выписки подразделяются, как и в книге, на историю чистой и историю прикладной математики. Более или менее подробно Маркс конспектирует, однако, только часть, относящуюся к истории арифметики, или «искусства счета».

Здесь мы читаем в рукописи:

Erste Abteilung. Geschichte der reinen Mathematik.

1) *Geschichte der Arithmetik oder Rechenkunst.* Phönizier. Die ältesten Völker, Chinesen und Tataren ausgenommen, zählten schon nach 10. Durch die Finger

Первая часть. История чистой математики.

1) *История арифметики, или искусство счета.* Финикияне. Уже древнейшие народы, за исключением китайцев и татар, считали десятками.

der beiden Hände müssten sie so schon darauf kommen. Als *Zahlzeichen* bedienten sie sich der Buchstaben ihres Alphabets. Die verschiedenen Abstufungen der Zehnen unterschieden durch Akzentzeichen, wie die Griechen, oder durch eigne Zusammensetzungen der Buchstaben wie die Römer. Die sogenannten arabischen Zahlzeichen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mit denselben unter Beihülfe der 0, die allerhöchsten Zahlen zu schreiben, indem man ihnen nur eine gewisse Stelle anweist, eine der schönsten Erfindungen. Kam durch die *Araber* nach Europa im 10[t] oder 11[t] Jahrhundert. Archimedes hatte schon mit sehr grossen Zahlen zu tun. Er brauchte dazu Ordnungen nach Zehntausenden oder Miriaden. Konnte die Berechnung der Peripherie eines Kreises, bei dieser Art, nicht weiter treiben als bis zu den Grenzen von $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, den Durchmesser des Kreises zur Einheit genommen. Anfangs waren die arabischen Zahlzeichen und ihr durch die Stelle angewiesener Wert nur zum Gebrauch der Mathematiker und keineswegs für das gemeine Leben bestimmt. Selbst im 15. Jahrhundert, sogar in Urkunden, diese Ziffer noch höchst selten: damals meist noch römische Zahlzeichen üblich. Erst nach der Mitte des 16[t] Jahrhunderts gewöhnlicher. Im 15[t] Jahrhundert solche Ziffern auf Steinen

По-видимому, их на это натолкнули пальцы на обеих руках. В качестве *числовых знаков* им служили буквы их алфавита. Различные степени десятков различались штрихами, как у греков, или подходящими комбинациями букв, как у римлян. Так называемые арабские цифры, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Одно из прекраснейших открытий, состоявшее в том, чтобы записывать, пользуясь ими, самые большие числа с помощью нуля и указания определенного места, пришло через *арабов* в Европу в 10-м или 11-м столетии. Уже Архимед имел дело с очень большими числами, применяя для этого порядки по десяти тысяч, или мириады. При этом способе он не сумел продвинуть вычисление длины окружности далее границ от $3\frac{1}{7}$ до $3\frac{10}{71}$, если принять диаметр окружности за единицу. Первоначально арабские цифры и их поместное значение использовались только математиками, но никак не в обычной жизни. Еще в 15-м столетии, даже в источниках, эти цифры еще очень редки: тогда чаще всего употреблялись еще римские числовые знаки. Лишь с середины 16-го столетия арабские цифры становятся более обычными. В 15-м столетии эти цифры встречаются больше на камнях, чем на пергаменте. В печатных изданиях ими еще mehr als auf Pergament. Gedruckt noch am wenigsten üblich. In älteren gedruckten Büchern selbst Jahrzahlen fast immer mit Worten oder römischen Buchstaben angegeben. So zur Römer Zeit, und später auch mässige Rechnungen, z. B. Haushalt und Handelsrechnungen, nie mit Ziffern, sondern mit Steinen und anderen ähnlichen Marken auf einem *Rechenbrette* gemacht. Auf diesem mehre parallele Linien verzeichnet; und hier bedeuteten einerlei Steine oder sonstige Zeichen auf der ersten Linie Einer, auf der 2ten Zehner etc.

Spielereien der Alten mit den Zahlen. Aberglauben. Wie auch in neuern Zeiten, besonders im 16ten Jahrhundert. *Erfindungen der Pythagoräer*: eine (auch sehr unbequeme und schwerfällige) Multiplikationstafel, Polygonal-Pyramidal etc., die ebenen und körperlichen Zahlen überhaupt; auch die Berechnung der musikalischen Verhältnisse. Die Griechen kannten die 4 Spezies, auch die Eigenschaften der geometrischen Verhältnisse und Proportionen, die arithmetische und geometrische Progressionen, die Lehre von den Grössen, deren Verhältnis sich in Zahlen nicht genau ausdrücken lässt usw. Auch schon Verfahrungsarten zur Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Von Ende des 16t Jahrhunderts die Ausziehung der Wurzeln, ebenfalls die Näherung, wenn sie irrational

почти не пользуются. В более старых печатных книгах даже год указывается почти всегда словами или римскими буквами. Так, во времена римлян и позднее даже небольшие вычисления, например хозяйственные или торговые, никогда не производились с помощью цифр, а с помощью камешков и других аналогичных знаков на *вычислительной доске*. На ней рисовалось несколько параллельных линий; и здесь одни и те же камешки или другие знаки на первой линии обозначали единицы, на второй — десятки и т. д.

Игры древних с числами. Суеверия. Как и в более новые времена, особенно в 16-м столетии. *Открытия пифагорейцев*: таблица умножения (правда, очень неудобная и громоздкая), полигонально-пирамидальные и т. д., плоские и телесные числа вообще; а также вычисление музыкальных отношений. Греки знали четыре действия арифметики, а также свойства геометрических отношений и пропорций, арифметическую и геометрическую прогрессии, учение о величинах, отношение которых не может быть точно выражено в числах, и т. д. А также способы извлечения квадратных и кубических корней. С конца 16-го столетия извлечение корней, также приближенное, когда они иррациональны, было продвинуто дальше, чем это делали ранее, когда sind, weiter getrieben worden als vorher, wo man sich bloss mit Brüchen begnügte, die man an die ganze die Wurzel anzeigende Zahl setzte. Simon Stewin benutzte hierzu die Dezimalbrüche. Um die *Benennung und Bezeichnung der Potenzen* gab man sich von je sehr viel Mühe... Im *16ᵗ Jahrhundert* Gesellschaftsrechnung etc. nicht mehr selten. Schon damals fing man an zusammengesetzte Interessen zu berechnen, wie die Zinsen, welche zum Kapital geschlagen werden... Die Kettenregel soll Graumann 1731 zuerst erfunden haben... Der *Regel falsi* bediente man sich, eh die Algebra noch bekannt und erst wenig angewandt wurde.

довольствовались просто дробями, которые приставляли к целому числу, указывающему корень. Симон Стевин употреблял для этого десятичные дроби. Уже в древности очень много трудностей доставляло *наименование и обозначение степеней*... В *16-м веке* уже не редки правила товарищества и др. Уже тогда начали вычислять сложные проценты на капитал... Цепное правило, по-видимому, первым нашел Грауман в 1731 г. ... *Правилом ложного положения* пользовались, когда алгебра еще не была известна или лишь немного применялась.

Logarithmen. 1614 gab der Schottländer *Johann Neper* (eigentlich Napeir) der Welt zuerst logarithmische Tafeln. Verbessert von *Briggs*. Seine logarithmischen Tafeln erschienen in London zuerst 1624. Rechenmaschinen. Rechenbücher schon seit *Anfang des 16ᵗ* Jahrhunderts in sehr grosser Menge zum Vorschein gekommen. Spanier Juan de Ortega... Adam Riese (15—19).

Логарифмы. В 1614 г. шотландец *Иоганн Непер* (собственно, Napeir) дал миру впервые логарифмические таблицы. Усовершенствованы *Бригсом*. Его логарифмические таблицы появились впервые в Лондоне в 1624 г. Счетные машины. Уже с *начала 16-го* века в очень большом числе появляются учебники арифметики. Испанец Хуан де Ортега... Адам Ризе (15—19).

Что означают цифры 15—19, тут не ясно. Эти страницы книги Поппе, содержащие два вводных параграфа в первую часть книги, Марксом не конспектируются. Приведенная выше часть конспекта относится к §§ 19—51, стр. 19—51 этой книги. Следующие части конспекта идут в таком порядке:

2) *Geschichte der Geometrie*. Die Feldmesserkunst gab der Geometrie ihren Ursprung. Thales. Pythagoras. Oenopides von Chios. 500 Jahre vor Christus. Erfinder einiger einfacher

2) *История геометрии*. Геометрия обязана своим происхождением искусству измерения полей. Фалес. Пифагор. Энопид Хиосский. 500 лет до р. Х. Изобретатель некоторых

geometrischer Aufgaben. Hippokrates von Chios, 450 v. Chr., entdeckte zuerst die Gleichheit eines von krummen Linien eingeschlossenen Raumes mit einem von geraden Linien eingeschlossenen. Plato, 400 J. v. Chr. Vor Plato der Kreis die einzige krumme Linie, die in der Geometrie betrachtet wurde. Er führte auch die Kegelschnitte ein, als deren eigentlicher Erfinder (Ellipse, Parabel und Hyperbel) Menächmus angegeben wurde. Aristäus schrieb in der Folge 4, Apollonios 8 Bücher darüber. *Eudoxos aus Knidos. Euclides*, 300 Jahre vor Chr. *Archimedes*, 250 Jahre vor Christus... Mit dem Ende des 17^t Jahrhunderts neue Epoche in der Geometrie durch die von Newton und Leibniz erfundene Analyse des Unendlichen...

простых геометрических задач. Гиппократ из Хиоса, 450 до р. Х., открыл первым равновеликость некоторого ограниченного кривыми линиями пространства пространству, ограниченному прямыми. Платон, 400 лет до р. Х. До Платона окружность была единственной кривой линией, рассматривавшейся в геометрии. Он ввел также конические сечения (эллипсы, параболы и гиперболы), изобретателем которых собственно считался Менехм. Аристей написал впоследствии 4, Аполлоний 8 книг о них. *Евдокс из Книда. Евклид*, 300 лет до р. Х. *Архимед*, 250 лет до р. Х.... С конца 17-го столетия новая эпоха в геометрии в связи с открытием Ньютоном и Лейбницем анализа бесконечного...

Из следующего, 3-го раздела книги (стр. 99—118) Маркс записывает только заголовок:

3) *Die Geschichte der praktischen Geometrie insbesondere.*

3) *История практической геометрии в особенности.*

В следующем, 4-м разделе (стр. 118—128) Маркс выписывает, кроме заголовка, только одну фразу:

4) *Die Geschichte der Trigonometrie inbesondere.* Tangententafeln hatten die Orientalern früher als die Europäer.

4) *История тригонометрии в особенности.* На Востоке таблицы тангенсов существовали раньше, чем у европейцев.

Конспект 5-го раздела (стр. 128—162) книги Поппе выглядит у Маркса так:

5) *Geschichte der Algebra und Analysis.* Grieche *Diophant* gilt für den Erfinder der Algebra durch die Lehre von den Gleichungen. Araber kannten sie im

5) *История алгебры и анализа.* Грек *Диофант* слывет изобретателем алгебры благодаря учению об уравнениях. Арабы знали ее в начале 10-го

Anfang des 10^{t} Jahrhunderts. Im 16^{t} Jahrhunderts die Italiener voran. Der Franzose François Vieta gen Ende des 16^{t} Jahrhunderts [führte] die allgemeine Rechnungsart mit Buchstaben ein. Ende des 17^{t} und Anfang des 18^{t} Jahrhunderts Glanzperiode der Mathematik durch Newton, Leibniz, Bernoulli etc.

столетия. В 16-м столетии впереди итальянцы. Француз Франсуа Виета [ввел] в конце 16-го столетия общее искусство вычисления с буквами. Конец 17-го и начало 18-го столетий — блестящий период математики благодаря Ньютону, Лейбницу, Бернулли и т. д.

Из второй части книги (стр. 165—568) Маркс конспектирует только начало (стр. 165—166, 170).

Zweite Abteilung. Geschichte der angewandten Mathematik.

1) *Geschichte der mechanischen Wissenschaften.* Statik oder Lehre von dem Gleichgewicht fester Körper; Mechanik oder Lehre von der Bewegung fester Körper; Hydrostatik oder Lehre von dem Gleichgewicht tropfbarer flüssiger Körper; Hydraulik oder Lehre von der Bewegung tropfbarer flüssiger Körper; Aerostatik oder Lehre von dem Gleichgewicht luftförmigen Körper; Pneumatik oder die Lehre von der Bewegung der luftförmigen Körper; Atmometrie oder Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der dampfförmigen Körper. In den letzten 150 Jahren leisteten diese Wissenschaften mehr nützlichen, als früher in 1000 Jahren. Von vornherein die Menschen eine *natürliche Mechanik* [besitzen müsten]. *Archimedes* stellte über die Waage folgende Untersuchung an: sind beide Arme einer Waage gleich lang, so müssen für den Zustand des Gleichgewichts der Waage

Вторая часть. История прикладной математики.

1) *История наук по механике.* Статика, или учение о равновесии твердых тел; механика, или учение о движении твердых тел; гидростатика, или учение о равновесии жидких текучих тел; гидравлика, или учение о движении жидких текучих тел; аэростатика, или учение о равновесии воздухоподобных тел; пневматика, или учение о движении воздухоподобных тел; атмометрия, или учение о равновесии и движении парообразных тел. За последние 150 лет эти науки дали больше результатов, чем за предыдущие 1000 лет. С самого начала люди [должны были владеть] некоторой *естественной механикой*. *Архимед* провел с весами следующее исследование: если оба плеча весов одинаковой длины, то для состояния равновесия весов должны быть равны и оба груза, лежащие на чашках весов; если же одно плечо длиннее

auch beide in den Waagschalen liegenden Gewichte gleich sein; und einer der Arme schneller ist, wie der andre, wie bei der so g. Schnellwaage, so muss an dem längern Arm angebrachte Gewicht in demselben Verhältnis geringer sein, als der lange Arm länger als der kurze ist. Und so kam er bei einer ungleichartigen Waage zu dem Schluss, dass 2 an den ungleichen Armen einer solchen Waage aufgehängte Gewichte den Armen der Waage *umgekehrt proportioniert* sein müssen, wenn das Gleichgewicht stattfinden soll. In diesem Grundsatz ist enthalten die *ganze Theorie des Hebels* und aller Maschinen, die sich darauf gründen.

другого, как у так называемого безмена, то вес, прикрепленный к более длинному плечу, должен быть в том же отношении меньше другого, в каком длинное плечо длиннее короткого. Так он пришел для весов с неравными плечами к заключению, что два веса, подвешенные на неравных плечах таких весов. должны быть *обратно пропорциональны*, чтобы имело место равновесие. В этом законе заключена *вся теория рычага* и всех машин, на нем основанных.

Каких-либо собственных замечаний Маркса в рукописи нет. Но Марксом проделана большая работа по выбору из книги Поппе интересовавшей его информации по истории математики и механики.

Ед. хр. 2055

О том, что Маркс специально интересовался историей арифметики и особенно вычислительных приборов, мы знаем из его письма к дяде, Лиону Филипсу, от 14 апреля 1864 г. (см. Соч., т. 30, стр. 538—539). Из этого письма мы видим, что Маркс читал в Британском музее классическую старинную книгу Боэция (480—524) «De institutione arithmeticae» еще до того, как она была заново переиздана Фридлейном в Лейпциге в 1867 г. В этом же письме он пишет, что пользовался и другими сочинениями, которые сравнивал с книгой Боэция. Сопоставление письма Маркса с выпиской из книги Поппе «История математики...» на листе 3 в тетради с выписками с позднейшей надписью «Diversa (1867—69)» («Разное, 1867—69») говорит о том, что среди этих «других сочинений» была во всяком случае книга Поппе, которую он мог читать еще в 1864 г.

Выписка из книги Поппе приводится полностью. Цифры в скобках означают у Маркса номера страниц, одновременно и параграфов, книги Поппе.

Zur Römerzeit und später auch mässige Rechnungen, z. B. Haushaltungs- und Handelsrechnungen, nie mit Ziffern, sondern mit Steinen und anderen ähnlichen Marken auf einem

Во времена римлян и даже позднее обычные вычисления, например в домашнем хозяйстве и торговле, никогда не выполнялись с цифрами, но делались с камнями и другими

Rechenbrette gemacht. Auf diesem Brette waren mehrere parallele Linien verzeichnet; und hier bedeuteten einerlei Steine oder sonstige sinnliche Zeichen auf der ersten Linie Einer, auf der zweiten Zehner, auf der dritten Hunderter, auf der vierten Tausender usw. (Heut noch die Sineser brauchen das Rechenbrett) (22).

Multiplikationstafel oder Einmaleins des Pythagoras noch sehr unbequem und schwerfällig. Denn jene Tafel war teils aus eignen Charakteren, teils aus Buchstaben des griechischen Alphabets zusammengesetzt (23, 24).

аналогичными знаками на *счетной доске*. На этой доске рисовалось несколько параллельных линий; и одни и те же камни или другие материальные знаки обозначали здесь на первой линии единицы, на второй—десятки, на третьей — сотни, на четвертой — тысячи и т. д. (китайцы еще и теперь пользуются такой счетной доской) (22).

Пифагорова таблица умножения была еще очень неудобна и громоздка, потому что эта таблица составлялась частично из особых знаков, частично из букв греческого алфавита (23, 24).

ЗАДАЧА О КАСАТЕЛЬНОЙ К ПАРАБОЛЕ
(приложение к письму Энгельсу)

Ед. хр. 1922

Первым текстом собственно математического содержания в рукописях Маркса является «*Appendix*» («*Приложение*») к письму Энгельсу, относящемуся к концу 1865 г. — началу 1866 г. (см. Соч., т. 31, стр. 138—140). Само письмо не дошло до нас. В этом приложении Маркс объясняет Энгельсу на примере задачи о касательной к параболе сущность дифференциального исчисления. Источником для Маркса служит третий том книги аббата Сори (стр. 13—14): *Sauri*, «*Cours complet de mathêmatiques*» *Paris*, 1778 (Сори, «Полный курс математики», Париж, 1778). Дифференцирование понимается здесь еще в точности по Лейбницу.

«APPENDIX»
«ПРИЛОЖЕНИЕ»

Du hast mich während meines letzten Aufenthalts in Manchester einmal nach Erklärung des Differentialcalculs gefragt. In folgendem Beispiel wird dir die Sache ganz klar werden. Der ganze Differentialcalcul entsprang zunächst aus der Aufgabe, *Tangenten* durch einen beliebigen Punkt einer beliebigen Kurve zu ziehn. Daran will ich dir daher die Sache exemplifizieren.

Nimm an, die Linie *nAo* sei eine beliebige Kurve, deren Natur (ob Parabole, Ellipse, usw.) wir *nicht* kennen und wo

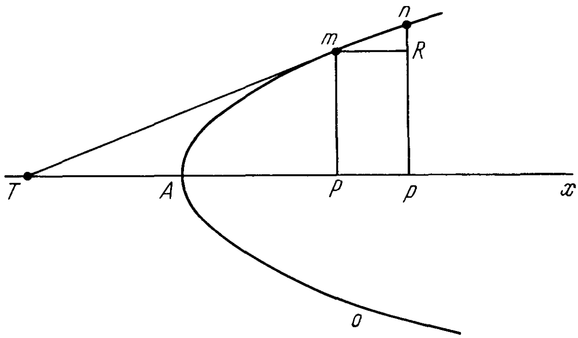
Ты как-то просил меня во время моего последнего пребывания в Манчестере объяснить дифференциальное исчисление. На следующем примере ты сможешь полностью уяснить себе этот вопрос. Все дифференциальное исчисление возникло первоначально из задачи о проведении *касательных* к произвольной кривой через любую ее точку. На этом же примере я и хочу пояснить тебе существо дела.

Пусть линия *nAo* — произвольная кривая, природы которой (является ли она параболой, эллипсом и т. д.) мы *не* im Punkt m eine Tangente gezogen werden soll.

Ax ist die Achse. Wir fällen das Perpendikel mP (die Ordinate) auf die Abszisse Ax. Nimm nun an, der Punkt n sei der unendlich *nächste* Punkt der Kurve

знаем и где в точке m требуется провести касательную.

Ax — ось. Мы опускаем перпендикуляр mP (ординату) на абсциссу Ax. Представь себе теперь, что точка n — бесконечно *ближайшая* точка кривой



neben m. Fälle ich ein Perpendikel np auf die Achse, so muss p der unendlich nächste Punkt zu P sein und np die unendlich nächste Parallellinie zu mP. Fälle nun ein unendlich kleines Perpendikel mR auf np. Nimmst du nun die Abszisse $AP \ldots x$ und die Ordinate $mP \ldots y$, so ist $np = mP$ (oder Rp), vermehrt um ein unendlich kleines Inkrement $[nR]$ oder $[nR] = dy$ (Differential von y) und $mR = (Pp) = dx$. Da der Teil der Tangente mn unendlich klein ist, fällt er zusammen mit dem entsprechenden Teil der Kurve selbst. Ich kann also mnR als ein $\triangle$ (Dreieck) betrachten und die $\triangle\, mnR$ und mTP sind ähnliche Dreiecke. Daher

возле m. Если я опущу на ось перпендикуляр np, то p должна быть бесконечно ближайшей точкой к P, а np — бесконечно ближайшей параллельной линией к mP. Опусти теперь бесконечно малый перпендикуляр mR на np. Если ты теперь примешь абсциссу AP за x, а ординату mP за y, то $np = mP$ (или Rp), увеличенной на бесконечно малое приращение $[nR]$, или $[nR] = dy$ (дифференциал от y), а $mR = (Pp) = dx$. Так как часть mn касательной бесконечно мала, то она совпадает с соответствующей частью самой кривой. Я могу, следовательно, рассматривать mnR как $\triangle$ (треугольник), $\triangle$-ки же mnR и mTP — подобные треугольники. Поэтому

$$dy\ (= nR) : dx\ (= mR) = y\ (= mP) : PT$$

(welches die Subtangente der Tangente Tn ist). Also ist die Subtangente $PT = y\frac{dx}{dy}$. Dies ist nun die *allgemeine Differentialgleichung* für alle Tangenpunkte *aller* Kurven. Soll ich nun mit dieser Gleichung weiter operieren und dadurch die Grösse der Subtangente PT bestimmen (habe ich diese, so brauche ich bloss die Punkte T und m durch eine grade Linie zu verbinden, um die Tangente zu haben), so muss ich wissen, welches der *spezifische Charakter* der Kurve. Ihrem Charakter gemäss (als Parabole, Ellipse, Zissoide usw.) hat sie eine *bestimmte allgemeine Gleichung* für ihre Ordinate und Abszisse von jedem Punkt, die man aus der algebraischen Geometrie kennt. Ist also z. B. die Kurve mAo eine Parabole, so weiss ich, das y^2 (y — die Ordinate von jedem beliebigen Punkt) $= ax$, wo a der Parameter der Parabole und x die der Ordinate y entsprechende Abszisse.

Setze ich diesen Wert von y in die Gleichung $PT = y\frac{dx}{dy}$, so muss ich also zunächst suchen, dy, d. h. den Differential von y (den Ausdruck, den y in seinem unendlich kleinen Wachstum annimmt) zu finden. Ist $y^2 = ax$, so weiss ich aus dem Differentialcalcul, dass $d(y^2) = d(ax)$ (ich muss natürlich beide Seiten der Gleichung differentieren) ergibt $2y\,dy = a\,dx$ (d heisst immer

(которое есть подкасательная для касательной Tn). Следовательно, подкасательная $PT = y\frac{dx}{dy}$. Это и есть *общее дифференциальное уравнение* для всех точек касания *всех* кривых. Если мне теперь нужно дальше оперировать с этим уравнением и с его помощью определить величину подкасательной PT (имея последнюю, мне остается только соединить точки T и m прямой линией, чтобы получить касательную), то я должен знать, каков *специфический характер* кривой. В соответствии с ее характером (как парабола, эллипс, циссоида и т. д.) она имеет *определенное общее уравнение* для ее ординаты и абсциссы каждой точки, которое известно из алгебраической геометрии. Если, например, кривая mAo есть парабола, то я знаю, что y^2 (y — ордината каждой произвольной точки) $= ax$, где a — параметр параболы, а x — абсцисса, соответствующая ординате y.

Если я подставлю это значение для y в уравнение $PT = y\frac{dx}{dy}$, то я должен, следовательно, искать сначала dy, т. е. найти дифференциал от y (выражение, которое добавляется к y при его бесконечно малом возрастании). Если $y^2 = ax$, то я знаю из дифференциального исчисления, что $d(y^2) = d(ax)$ (я должен, разумеется, дифференцировать обе части уравнения) дает

Differential). Also $dx = \frac{2y\,dy}{a}$. Setze ich diesen Wert von dx in die Formel $PT = \frac{y\,dx}{dy}$, so erhalte ich

$2y\,dy = a\,dx$ (d везде обозначает дифференциал). Следовательно, $dx = \frac{2y\,dy}{a}$. Если я подставлю это значение для dx в формулу $PT = \frac{y\,dx}{dy}$, то получу

$$PT = \frac{2y^2\,dy}{a\,dy} = \frac{2y^2}{a} = \left(\begin{matrix}\text{da}\\ \text{так как}\end{matrix}\ y^2 = ax\right) = \frac{2ax}{a} = 2x.$$

Oder die Subtangente jedes Punktes m in der Parabole = der doppelten Abszisse vom selben Punkt. Die Differentialgrössen verschwinden in der Operation.

Или: подкасательная для каждой точки m параболы равна двойной абсциссе той же самой точки. Дифференциальные величины исчезают в операции.

ПЕРВЫЙ КОНСПЕКТ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Ед. хр. 2759

Рекомендуя Энгельсу заняться дифференциальным исчислением, Маркс писал ему 6 июля 1863 г., что **«никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, здесь не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями»** (см. Соч., т. 30, стр. 296).

О том, что такую предварительную работу Маркс считал необходимой и для себя, свидетельствуют сохранившиеся в его бумагах конспекты по тригонометрии и теории конических сечений.

Первый из этих конспектов, относящийся, по-видимому, к началу 60-х годов, посвящен сводке формул тригонометрии.

Он составлен по первому тому книги Сори (стр. 433—482) и относится к разделам: «О тригонометрии» (стр. 433—447), «О решении треугольников» (стр. 448—452), «О решении косоугольных треугольников» (стр. 452—482).

Фотокопии рукописи содержат 24 листа:

Л. 1 — сводка формул тригонометрии под заголовком Маркса: **«Resumé. I»** (**«Резюме. I»**).

Л. 2 — вычисление некоторых значений тригонометрических функций под заголовком: **«Calculation of trigonometrical functions»** (**«Вычисление тригонометрических функций»**).

Листы 1 и 2 Марксом не занумерованы. Дальнейшие листы занумерованы цифрами от 1 до 18, причем некоторые цифры повторяются.

Л. 3 (стр. 1 в нумерации Маркса) содержит очень краткое изложение раздела «О тригонометрии» в книге Сори.

Л. 4 озаглавлен Марксом: **«II. Résolution des triangles»** (**«II. Решение треугольников»**). Этот раздел продолжается до нижней части л. 5, озаглавленной: **«Résolution des triangles obliqueangles»** (**«Решение косоугольных треугольников»**).

Этот раздел продолжается вплоть до л. 15 (стр. 10 в нумерации Маркса), озаглавленного им: **«Recherches ultérieures trigonométriques»** (**«Позднейшие тригонометрические изыскания»**). Здесь речь идет о тригонометрических функциях кратных углов, о преобразовании формул к виду, удобному для логарифмирования, о задачах, «невозможность» которых проявляется в виде появления мнимых чисел, и др.

Рукопись заканчивается на лл. 23—24 четырьмя таблицами формул для тригонометрических функций кратных углов.

Конспект носит очень сжатую форму и содержит только формулировки теорем или сводки формул (без доказательств). Несмотря на такую краткость, Маркс включил в свой конспект все вопросы прикладного характера из разделов тригонометрии в курсе Сори: измерение ширины реки, высоты башни или горы, расстояния между двумя недоступными местами, методы съемки карт и планов и т. п.

Рукопись содержит большое число чертежей, выполненных, однако, Марксом только от руки (без помощи каких-либо чертежных инструментов).

ПЕРВЫЕ КОНСПЕКТЫ ПО КОММЕРЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКЕ

Уже первые конспекты по коммерческой арифметике, относящиеся к 1869 г., отличаются характерной для Маркса особенностью, состоящей в том, что, встретившись с каким-нибудь специальным вопросом, с которым он был недостаточно знаком, Маркс считал для себя необходимым специально изучить этот вопрос.

На рукописях 2388 и 2400 мы видим, как занятия политической экономией приводят Маркса к необходимости овладеть техникой вексельных расчетов, в связи с которыми в свою очередь возникает потребность в решении некоторых общих «типов» арифметических задач.

Для решения этих задач издавна были придуманы людьми специальные правила — особые правила для задач каждого типа: тройное правило (простое и сложное), цепное правило, правило товарищества, правило смеси и др. И хотя Маркс очень не любил арифметические расчеты (в письме от 30 мая 1864 г. Энгельс даже писал ему по поводу его «арифметики»: **«...ты, кажется, с ней в довольно далеких отношениях,— судя по невыправленным позорным опечаткам в числах»** (Соч., т. 30, стр. 329)), с необычайным терпением и добросовестностью он изучает все эти правила по курсу коммерческой арифметики Феллера и Одермана и очень тщательно и подробно конспектирует их.

Ед. хр. 2388

В тетради с выписками по политической экономии с надписью рукою Маркса: **«1869, I Heft»** (**«1869, I тетрадь»**) 30 страниц — стр. 109—139 (лл. 109 — 139) — заняты конспектом по коммерческой арифметике.

В связи с изучением вопроса об обращении капитала Маркс конспектирует на стр. 87—109 этой тетради книгу G. J. Goschen «The Theory of the Foreign Exchanges» («Теория международного обмена»). Так как при чтении этой книги ему понадобились специальные сведения, относящиеся к международным расчетам с векселями, Маркс обратился к разделу о вексельных расчетах в книге: F. E. Feller und C. G. Odermann, «Das ganze der kaufmännischen Arithmetik», Leipzig, 1859 (Феллер и Одерман, «Полный курс коммерческой арифметики», Лейпциг, 1859) и стал подробно его конспектировать. Законспектировав параграфы 382—407 (стр. 318—365 этой книги), относящиеся к технике прямых вексельных расчетов между городами и странами, находящимися в непосредственных вексельных отношениях, Маркс прерывает конспект словами (л. 118):

Ehe wir nun übergehn zur *Arbitrage auf indirektem Weg* *, *Intermezzo* (*Kettenregel und Prozentrechnung*).

Прежде чем перейти к *арбитражу на непрямом пути* *, *вставка* (*цепное правило и вычисление процентов*).

Вслед за этим он отсылает к продолжению текста на стр. 135, где возвращается к вексельному исчислению (гл. XIV). Вставка представляет собой конспект глав V—X той же книги (§§ 129—316, стр. 98—245) Феллера и Одермана.

На листе 127 имеется следующее замечание Маркса, выражающее его критическое отношение к книге и относящееся к разделу, посвященному вычислению скидок:

Die *Usanz Rabatten* sind reine Charlatanerie. Ob sie *von* oder *auf* 100 berechnet, sie sind dem *Verkehrspreis* schon hinzugefügt [99].

Обиходные скидки — это чистое шарлатанство. Вычисляются ли они *со* 100 или *на* 100, они уже заранее прибавлены к *продажной цене* [99].

В конце л. 138 приписка Маркса: **«Continuation, 2 Heft, 1869»** (**«Продолжение, 2-я тетрадь, 1869»**) и на л. 139: **«Inhalt»** — содержание тетради, начиная со стр. 87, с подробным оглавлением законспектированных частей книг Гошена и Феллера и Одермана и указанием соответствующих страниц в тетради Маркса.

Чтобы дать представление о содержании рукописи, это оглавление воспроизводится здесь полностью (л. 139).

INHALT

СОДЕРЖАНИЕ

* То есть когда нет непосредственных отношений или же в одном пункте происходит обмен векселей, выданных на два других пункта.— *Ред.*

in which International Indebtness is ultimately embodied (90—93)	*векселей, в которых в конечном счете воплощается международная задолженность* (90—93)
Fluctuations in the Price of Foreign Bills (93—99)	*Флуктуации в цене международных векселей* (93—99)
Interpretation of Foreign Exchanges (99—104)	*Интерпретация международных обменов* (99—104)
So called Correctives of Foreign Exchanges (104—109)	*Так называемые коррективы международных обменов* (104—109)
3) *Wechselrechnung.*	3) *Вексельное исчисление.*
Wechselrechnung überhaupt (109)	*Вексельное исчисление вообще* (109)
Parirechnung (109—110)	*Исчисление паритета* (перевод в твердую валюту) (109—110)
Wechselreduktionen.	*Перевод векселей в другие курсы.*
Direkt (110—112)	*Непосредственный* (110—112)
Indirekt (112—114)	*Опосредствованный* (112—114)
Arbitragerechnung.	*Исчисление арбитражей.*
Direkt (114—118)	*Непосредственное* (114—118)
Indirekt (135—138)	*Опосредствованное* (135—138)
Regel de Tri.	*Тройное правило.*
Regel Multiplen (118—119)	*Сложное тройное правило* (118—119)
Kettenregel (118—121)	*Цепное правило* (118—121)
Gesellschaftsrechnung (121—123)	*Правило товарищества* (121—123)

Alligationsrechnung	(123—125)	*Правило смеси*	(123—125)
Prozentrechnung	(125—127)	*Исчисление процентов*	(125—127)
Zinsrechnung	(127—131)	*Исчисление интересов*	(127—131)
Diskontrechnung	(131—132)	*Исчисление дисконта*	(131—132)
Terminrechnung	(132—134)	*Исчисление сроков*	(132—134)

Из этого указателя мы видим, что Марксу действительно здесь приходится иметь дело сначала только с несколькими различными «типами» арифметических задач, для решения которых предлагаются для каждого «типа» особые правила.

Ед. хр. 2400

Это — большая тетрадь, состоящая из 125 листов с надписью рукою Энгельса:

1869

1) Kaufmännische Rechnung, Heft II, Schluss, S. 1—36.	1) Коммерческое исчисление, Тетрадь II, Окончание, стр. 1—36.
2) Foster, Commercial Exchanges, 37—51.	2) Фостер, Коммерческие обмены, 37—51.
3) Hausner, Vergl. Statistik, 1865.	3) Хауснер, Сравнит. статистика, 1865.
4) Sadler, Ireland, 1829.	4) Садлер, Ирландия, 1829.

Первые 36 страниц (лл. 3—38) представляют собою продолжение рукописи 2388. Здесь сначала заканчивается конспект главы XIV и конспектируется глава XV книги Феллера и Одермана, §§ 413—426, стр. 382—400 — о вычислениях векселей, вычислении стоимости акций и других государственных бумаг. Далее Маркс возвращается к пропущенным им ранее главам XI—XIII, §§ 317—380, стр. 246—318 этой же книги — о золотом и серебряном содержании валют различных стран. Конспект заканчивается главами XVI—XVIII, §§ 428—471, стр. 402—481, где речь идет о вычислениях мер и весов, товарных расчетах и вычислениях убытков при авариях судов.

РУКОПИСИ 1870-х ГОДОВ

РУКОПИСИ ПО ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Здесь имеются в виду рукописи ед. хр. 2760, 2761, 2762.

Ед. хр. 2760

Первая из них состоит из 9 листов (лл. 1—9) и представляет собою конспект книги: J. Hymers, «A treatise on conic sections and the application of algebra to geometry», 3-d ed., Cambridge, 1845 (Дж. Хаймерс, «Трактат о конических сечениях и приложении алгебры к геометрии», 3-е изд., Кембридж, 1845). Из этой книги, которая имелась в личной библиотеке Маркса, Маркс конспектирует начало — первые 12 страниц, относящиеся к введению координат, к задаче: найти расстояние между двумя точками, заданными их координатами, к уравнению прямой и задачам: найти уравнение прямой по отрезкам, отсекаемым ею на осях координат, уравнение прямой, проходящей через одну и две точки, заданные их координатами.

Ед. хр. 2761

5,5 двойного листа на французском и английском языках представляют собой черновые выписки по теории конических сечений из цитированной выше книги Sauri, том 2, стр. 2—27.

Ед. хр. 2762

4 двойных листа на французском языке. Чистовые выписки по теории конических сечений из той же книги Sauri, том 2, стр. 2—27.

ПЕРВЫЙ КОНСПЕКТ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Ед. хр. 3704

4 листа фотокопий; начала нет, имеются только стр. 3—6 в пагинации Маркса. Как это ясно из содержания, рукопись представляет собою, по-видимому, самый первый конспект начальных параграфов учебника Boucharlat («An elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus» by J.-L. Boucharlat. Translated from the French by R. Blakelock, B. A., Catharina Hall, Cambridge — London, 1828), т. е. относится ко времени, когда Маркс, уже познакомившись с основами дифференциального исчисления по курсу Sauri, обратился к изучению более новой трактовки этого исчисления у Boucharlat.

Сохранившиеся листы рукописи содержат конспект §§ 5—18 этого учебника. В пользу того, что на отсутствующих страницах 1—2 были законспектированы параграфы, предшествующие пятому, говорит следующее начало страницы 3 рукописи Маркса:

He would say	Он сказал бы

$$(x + dx)^3 = x^3 + 3x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3.$$

Now, if we substract the given quantity x^3, there rests $3x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3$; the two latter terms disappear as infinites of the second [and third] order[s], and we get for $d\,(x^3) = 3x^2\,dx$, which is the differential of x^3 oder $= d\,(x^3)$, and there is the less to be said against this, as in the other equation $y =$ etc., x changes independently of y and the changes of y are only correlative to those of x.	Если мы теперь отнимем данное количество x^3, то останется $3x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3$; два последних члена исчезают, как бесконечно малые 2-го [и 3-го] порядков, и для $d(x^3)$ получаем $3x^2\,dx$, что и есть дифференциал от x^3, т. е. $= d\,(x^3)$, и против этого ничего не скажешь, тем более что в другом уравнении $y =$ и т. д. x изменяется независимо от y, изменения же y только соответствуют изменениям x.

Маркс рассматривает здесь тот же пример, которым занимается Бушарла в § 3 (полный текст этого параграфа см. Приложение, стр. 588), но дифференцирует по Сори, т. е. пользуясь методом бесконечно малых Ньютона — Лейбница, здесь еще не встречающим у него возражений. Слова «он сказал бы», по-видимому, и относятся к тому, что сказал бы Бушарла, если бы он действовал по Сори.

В пользу правильности этой догадки говорит и то обстоятельство, что в критическом замечании, следующем за примерами дифференцирования функций $y = a + 3x^2$, $y = ax^3 - b^3$, $y = \frac{1-x^3}{1-x}$ (§§ 5—7 по Boucharlat), Маркс пишет (стр. 3), конспектируя § 9 этой книги:

dx «is itself the differential of x». If we had said from the beginning we call the unendlich kleine increment of x dx, the thing was simple, as with Sauri. But having introduced h, and spoken till now of the differential of the algebraic expression of it as the differential of function y (y being the function of x, put on the other side of equation) he wants some hocus pocus [100].

For [instance] let us have:

$$y = x, \quad y_1 = x + h, \quad y_1 - y = h, \quad \frac{y_1 - y}{h} = 1;$$

as h does not enter into the second side of the equation, we *pass to the limit* in making $y_1 = y$ or $y_1 - y = dy$ and h into dx. And as all expression of x has disappeared in $\frac{y_1 - y}{h} = 1$, we have not even a pretext to say, that h becomes dx, and therefore $y_1 - y = dy$ or that $\frac{0}{0} = 1$.

It is only true in that sense that $\frac{0}{0}$ = every quantity q whatever, because $\frac{0}{0} = q$, gives $0 = q \cdot 0$ or $0 = 0$ [100].

dx «само есть дифференциал от x». Если бы мы сказали с самого начала, что бесконечно малое приращение x мы называем dx, то все было бы просто, как у Сори. Но введя h и говоря до сих пор о дифференциале алгебраического выражения в h как о дифференциале функции y (где y — функция от x, помещенная на другой стороне уравнения), он [Бушарла] нуждается в каком-нибудь фокусе [100].

Пусть [,например,] мы имеем:

$$y = x, \quad y_1 = x + h, \quad y_1 - y = h, \quad \frac{y_1 - y}{h} = 1;$$

так как h отсутствует на второй стороне этого уравнения, то мы *переходим к пределу*, полагая $y_1 = y$ или $y_1 - y = dy$ и обращая h в dx. Но так как всякое выражение в x исчезло в $\frac{y_1 - y}{h} = 1$, то у нас нет даже предлога для того, чтобы сказать, что h обращается в dx и что поэтому $y_1 - y = dy$ или что $\frac{0}{0} = 1$.

В этом смысле верно только, что $\frac{0}{0}$ = какому угодно количеству q, потому что $\frac{0}{0} = q$ дает $0 = q \cdot 0$ или $0 = 0$ [100].

Остальная часть рукописи (стр. 4—6 по Марксу) представляет собой конспект §§ 10—18 той же книги Бушарла. (О содержании этих параграфов см. Приложение, стр. 589—592.) Здесь Маркс также явно предпочитает еще методы Сори. Так, по поводу теоремы о дифференциале произведения функций, которую Бушарла (см. § 14 или Приложение, стр. 591) доказывает по Лагранжу, т. е. формально перемножая разложения

$$y_1 = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{ и т. д.},$$
$$z_1 = z + A'h + B'h^2 + C'h^3 + \text{ и т. д.},$$

Маркс пишет (стр. 5 в его пагинации):

He develops out of this $d\,(xyzu$ etc.), which might have been done much more simply and directly (see *Sauri*).

He says: ...

Он получает отсюда $d\,(xyzu\ldots)$, что можно было сделать гораздо более просто и прямо (см. *Сори*).

Он говорит: ...

Далее полностью излагается доказательство по Boucharlat (см. Приложение, стр. 592), после чего Маркс приводит (стр. 5) более простое доказательство из Сори и замечает, что Бушарла фактически также опускает члены с высшими степенями h. Это замечание Маркса гласит:

Instead of which he might simply have said:

Вместо этого он мог бы сказать просто:

$$(z + dz)\,(y + dy) = zy + dz \cdot y + dy \cdot z + dz \cdot dy,$$
$$d\,(zy) = z\,dy + y\,dz$$

by substracting the given quantity *zy and suppressing* $dz \cdot dy$; he does the same in suppressing $(Bz + AA' + B'y)\,h +$ etc.

вычитанием данного количества *zy и отбрасыванием* $dz \cdot dy$; он делает то же самое, отбрасывая $(Bz + AA' + B'y)\,h +$ и т. д.

«ON THE METHOD FINITE DIFFERENCES»
(«О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ»)

Ед. хр. 4039

Две странички (два листа фотокопий), представляющие собою очень сжатый конспект (почти без слов, только выкладки, очень мало разъясненные) §§ 171, 172 из книги Sauri «Cours complet de mathématiques», t. III (Сори «Полный курс математики», т. III, стр. 303—304). Этими параграфами в курсе Сори начинается раздел «Исчисление конечных разностей».

Здесь значениям переменной x:

$$x,\ x+p,\ x+2p,\ x+3p,\ x+4p \text{ и т. д.},$$

Сори сопоставляет значения «переменной величины» y:

$$y,\quad y^{\mathrm{I}},\quad y^{\mathrm{II}},\quad y^{\mathrm{III}},\quad y^{\mathrm{IV}} \quad \text{и т. д.},$$

замечая при этом, что если $y = x^0$, то все значения y остаются постоянными (равными единице). С этого замечания и начинает свой конспект Маркс. После этого Маркс приводит и следующее замечание Сори, состоящее в том, что если $y = ax + b$, то ряд для y-ов будет арифметическим; если $y = a^x$, то это будет геометрический ряд; если $y = \frac{a}{bx+c}$ — гармонический.

Дальше рассматриваются разности между последовательными значениями y-ов и разности второго и более высоких порядков (разности между разностями первого, затем второго и т. д. порядка). Вводятся соответствующие обозначения: $Dy = y^{\mathrm{I}} - y$, $Dy^{\mathrm{I}} = y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}}$, . . ., $D^2y = Dy^{\mathrm{I}} - Dy = y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}} + y$, $D^3y = y^{\mathrm{III}} - 3y^{\mathrm{II}} + 3y^{\mathrm{I}} - y$. На этих параграфах конспект обрывается.

ТЕТРАДИ С ВЫПИСКАМИ ПО КОММЕРЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКЕ

Ед. хр. 3881

В тетради с надписью Маркса: **«II. März 1878 begonnen»** (**«II. Начата в марте 1878»**) на лл. 144—146 (в нумерации Маркса 142—144) содержатся выписки из книги Feller und Odermann «Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik» (§§ 385 и 382) о математических оценках влияния дисконта на вексельный курс.

Ед. хр. 3931

Тетрадь с выписками по коммерческой арифметике на немецком языке, 69 листов.

Лл. 1—20. Выписки из книги Feller und Odermann: глава IX — об исчислении дисконта, §§ 294—309, стр. 226—238; глава XIV — о вексельном исчислении, §§ 382—418, стр. 320—390.

Лл. 21—22. Выписки из книги Sauri, т. I, стр. 109—121, об арифметической и геометрической прогрессиях.

Лл. 23—54. Выписки из книги Feller und Odermann: глава VII — об исчислении процентов, §§ 210—260, стр. 162—196; глава VIII — об исчислении интересов, §§ 261—293, стр. 197—227.

Лл. 54—69. Выписки из Sauri, т. I, стр. 109—132 под общим заголовком Маркса: **«Zwischenschub (Progression etc.)»** (**«Вставка (Прогрессия и т. д.)»**) о прогрессиях и логарифмах.

ТЕТРАДЬ С КОНСПЕКТАМИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ПО КНИГАМ СОРИ, НЬЮТОНА, БУШАРЛА И ХАЙНДА

Ед. хр. 2763

81 лист на немецком и французском языках. Тетрадь с выписками и заметками по математике, относящимися к длительному периоду занятий Маркса математикой, начиная от работы над курсом Sauri, строившимся еще по Лейбницу и Ньютону, через непосредственное обращение к трудам самого Ньютона (лл. 24—28), вплоть до детального ознакомления (по курсам Бушарла и Хайнда) с идеями «алгебраического» дифференциального исчисления Лагранжа (лл. 37—81).

Маркс в дальнейшем (см. часть первую настоящей книги) уже не считал эти идеи Лагранжа пригодными в качестве «начал», на которых можно строить дифференциальное исчисление. Но в описываемой здесь тетради он еще к этому заключению не приходит: задача состоит прежде всего в том, чтобы по имеющимся у него руководствам разобраться в «методе Лагранжа», выяснить его достоинства и недостатки. В связи с этим вопрос о датировке рукописи представляет значительный интерес. Ответ на него может пролить свет и на вопрос о том, когда именно у Маркса окончательно созрело его собственное диалектическое понимание оперативной сущности дифференциального исчисления. К сожалению, с этой датировкой связан ряд трудностей.

Как это ясно из некоторых библиографических указаний и дат на лл. 33—36, не относящихся к математике, посвященные методу Лагранжа страницы рукописи были написаны во всяком случае после 1872 г. Можно с уверенностью сказать также, что они были написаны до 1881 г., к которому относится первая работа Маркса «О понятии производной функции», где Маркс излагает уже свой способ трактовки основных понятий дифференциального исчисления. Сколько-нибудь значительно сузить эти границы, однако, не удается. Дело в том, что на последних двух страницах тетради, содержащей рукопись 2763 (лл. 79—80), под заголовком: **«Fortsetzung von anderem Heft (III, folgend auf Kaufmann II) (letzte Seite)»** (**«Продолжение другой тетради (III, следующей за Кауфман II) (последняя страница)»**) (см. описание рукописей 3881 и 3888) Маркс начинает еще раз конспектировать параграфы из курса Бушарла, посвященные методу Лагранжа, явно с целью не критиковать Лагранжа, а разобраться (и притом достаточно сочувственно) в его «методе». Правда, Маркс скоро оборвал этот конспект и перечеркнул его карандашом. Но тетрадь «Кауфман II» (см. рукопись 3881) начинается надписью рукою Маркса: **«März 1878 begonnen» («Начата в марте 1878 г.»)**. Когда она закончена, неизвестно. Тетрадь III (рукопись 3888) следует за тетрадью «Кауфман II». Таким образом, она относится, во всяком случае, ко времени после марта 1878 г. В рукописи же 2763 помещено продолжение этой тетради — ее последней страницы. Естественно думать, что это продолжение вряд ли могло быть написано ранее 1879 г.

Наоборот, первые страницы рукописи 2763 содержат конспекты курса Сори. Это дает основания полагать, что они могли быть написаны до 1872 г. Из всего этого ясно, что тетрадь действительно относится к достаточно длинному промежутку времени, в течение которого математические занятия Маркса нашли отражение и в некоторых других тетрадях.

Хотя в тетради 2763 собственная точка зрения Маркса на сущность дифференциального исчисления еще не оформлена и он еще в основном высоко оценивает «алгебраический метод» Лагранжа, однако уже здесь имеется ряд замечаний Маркса, относящихся к выбору и роли символов дифференциального исчисления, к связанной с ними диалектике качества и количества, формы и содержания, единства и противоположности в соотношении между алгеброй и математическим анализом («алгебраические» корни символического дифференциального исчисления). Эти замечания подготавливают уже отчасти собственную концепцию Маркса, которая и начинает складываться у него на этой стадии его занятий математикой. Многие из них разрабатываются Марксом дальше. В следующем ниже подробном описании рукописи 2763 собственные замечания Маркса приводятся полностью. Приводятся и многие такие места, которые представляют собой не просто выписки, а собственное изложение конспектируемого материала. Заглавия всех четырех частей рукописи принадлежат самому Марксу. Подзаголовки наши.

«КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ»

Лл. 1—24 (в нумерации Маркса: ad p. 1, 1—23). Выписки из книги Sauri «Cours complet de mathématiques» (Сори, Полный курс математики), 1778 г., т. II, стр. 2—49, под заголовком: **«Conic sections» («Конические сечения»)**. В этой части книги содержатся главы о параболе (стр. 2—12), об окружности, эллипсе и гиперболе (стр. 12—34) и часть (стр. 34—49) главы об асимптотах гиперболы и диаметрах эллипса и гиперболы. Изложение носит еще очень архаический характер. Хотя из геометрических свойств кривых выводятся уже уравнения, связывающие абсциссы и ординаты их точек, но общий метод координат еще отсутствует. Абсциссы и ординаты данной кривой существуют в ней так же, как ее оси симметрии, касательные или диаметры, и определяются через последние. Так, «ордината параболы» определяется как «линия PM, перпендикулярная к оси и оканчивающаяся на параболе» (стр. 2); «абсцисса»— как «часть AP оси, заключенная между ординатой и точкой A, где ось встречает параболу» (там же). Под «касательной» понимается прямая, имеющая с данной кривой одну, и только одну, общую точку. Площадь «полупараболы» acb (где a — вершина параболы, c — ее точка, ab — абсцисса точки c) находится по способу Архимеда, но упрощенному по методам Ньютона и Лейбница (т. е. через «характеристический треугольник» Паскаля и Лейбница — путем отождествления бесконечно малой дуги кривой с отрезком касательной, бесконечно малых криволинейных трапеций с прямоугольниками, отличающимися от них на бесконечно малые второго порядка). Площадь эллипса ищется иначе — при посредстве плохо сформулированного принципа Кавальери: «Сумма всех y равна площади эллипса» (стр. 22).

Рассуждениями, обычными в элементарной геометрии (т. е. синтетически, а не с помощью исчисления), доказывается большое число теорем о различных свойствах каждого из конических сечений, их диаметров, осей, фокусов, асимптот и других элементов, о способах построения касательных к ним, построения любого числа точек этих кривых, вычисления площадей, связанных с ними, и др.

Какого-либо общего метода или принципов систематизации материала из этой части книги извлечь нельзя. Можно думать, что Маркс занялся ею в связи с тем, что в предисловии к английскому переводу учебника Бушарла (1828 г.) читатель специально предупреждался о том, что в оригинале предполагается знакомство «с элементарными принципами, относящимися к кривым линиям», а под последними имелись прежде всего в виду конические сечения. Действительно, уже 6 июля 1863 г. Маркс писал Энгельсу, что у него «избыток книг» по дифференциальному и интегральному исчислению и что «никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, здесь не требуется, но *необходимо общее знакомство с коническими сечениями*» (курсив наш.—*Ред.*) (Соч., т. 30, стр. 296). Выбор курса Сори естественно объяснить тем, что этот курс Марксу сначала очень понравился именно доступностью его методов (см. описание рукописи 3704, стр. 263). Более близкое знакомство с содержанием раздела о конических сечениях, который Маркс конспектировал весьма детально, должно было, однако, разочаровать его. И действительно, конспект главы об асимптотах гиперболы и диаметрах эллипса и гиперболы, занимающей стр. 35—68 книги Сори, Маркс обрывает уже на стр. 49 этой книги, а из всех последующих глав конспектирует в дальнейшем только одну: «О конических сечениях высших родов» (см. ниже описание листов 29—33). Даже у него не хватило терпения изучить все это множество частных теорем, не объединенных какой-либо общей идеей.

Содержание дальнейших частей рукописи 2763 (начиная с л. 33) говорит о том, что они должны были быть написаны позже рукописи 3704, в которой Маркс еще предпочитает методы Сори (т. е. Лейбница и Ньютона). В рукописи имеются, однако, и прямые указания на то, что лл. 37—81 написаны, во всяком случае, после 1872 г. Так на лл. 33—36 (стр. 32—35 в нумерации Маркса) Маркс приводит список книг по новейшей (тогда!) истории Германии. В этом списке имеются издания 1866, 1868, 1871 гг., а одна из них: «Von 1806—1866. Zur Vorgeschichte des neuen Deutschen Reich» von H. Langwerth von Simmern, издана в Лейпциге в 1872 г. Лл. 33—36 относятся, правда, к той части рукописи, которая находится (непосредственно) за последними выписками из курса Сори. Но ясно, что следующие за ними страницы не могли уже быть написаны до 1872 г.

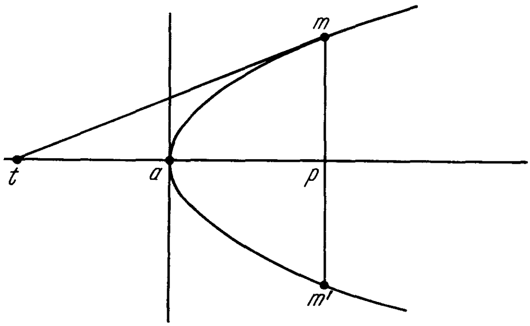
Л. 1 (ad p. 1 по Марксу), приложенный к началу рукописи, содержит опущенные Марксом сначала определения: «параболы» (как это делалось обычно, т. е. через «фокус» и «директрису»), «оси», «диаметра», «касательной», «ординаты» и «абсциссы», «подкасательной», «параметров» оси или диаметра, «нормали», «поднормали», «аппликаты к диаметру» *, «радиуса-вектора», «вершины»— все это специально для параболы. Лист заканчивается следующим замечанием, которого у Сори нет. Оно, по-видимому, принадлежит самому Марксу.

---

* Под «ординатой» или «аппликатой (т. е. приложенной) к диаметру» здесь имеется в виду — если говорить на более современном языке — ордината точки параболы в системе координат, осью ординат которой является касательная в фиксированной точке m параболы, а осью абсцисс — диаметр, проходящий через ту же точку m.—*Ред.*

Aus diesen durch die Konstruktion der Kurve selbst gegebenen Erklärungen, folgt:

Ist irgendein Punkt m der Kurve gegeben und ich soll Tangente durch ihn ziehen, so



klar, dass denn ich die diesem Punkt m, z. B. dem Punkt m in der nebenstehenden Figur entsprechende *Subtangente* pt habe, d. h. die entsprechende Verlängerung der Abszisse ap, ich bloss den Endpunkt der Subtangente pt, i.e. den Punkt t, zu verbinden habe durch gerade Linie mit m,— dann ist mt *die Tangente*.

Ferner, da ap die *Abszisse*, durch deren Verlängerung die Subtangente entsteht, so ist mp die Ordinate.

Denn der einer gegebenen Abszisse entsprechende Punkt m der Kurve, wird geschnitten durch das im Endpunkt der Abszisse errichtete Perpendikel; also vice versa die gerade Linie, die m mit p verbindet, perpendikulär auf der Axe.

Folgt daraus ferner, dass der Punkt m, wo die der Abszisse

Из этих — самим построением кривой данных — объяснений следует:

Если дана какая-нибудь точка m кривой и мне нужно провести через нее касательную, то ясно, что, если я имею соответствующую этой точке m, например точке m на помещенном здесь рисунке, *подкасательную* pt, т. е. соответствующее продолжение абсциссы ap, мне остается только соединить конечную точку подкасательной pt, т. е. точку t, прямой линией с m,— mt и есть тогда *касательная*.

Далее, так как ap — *абсцисса*, при продолжении которой получается подкасательная, то mp — ордината.

Ибо соответствующая какой-нибудь данной абсциссе точка m кривой получается при пересечении последней перпендикуляром, восставленным в конечной точке абсциссы; следовательно, и, наоборот, прямая линия, соединяющая m с p, перпендикулярна к оси.

Из этого следует, далее, что точка m, где ордината, соотentsprechende Ordinate die Kurve schneidet, der Punkt ist, in dem die dieser Ordinate entsprechende Tangente die Kurve berührt, der Tangierpunkt.

Daraus folgt: ist der gegebene *Punkt m* der Parabel ihr *origin a*, so ist dieser Punkt der Punkt, worin die *Ordinate* zu errichten, i. e. ein Perpendikel auf die Axe; es ist aber zugleich der einzige Punkt, worin die [dieser Ordinate entsprechende] Tangente die Kurve berührt. Die *Tangente und die Ordinate fallen also zusammen*, sind *eine einzige Linie*, die in *a* Perpendikuläre auf der Axe. Während so die Tangente unendlich * geworden, ist die Abszisse *pa* gleich 0 geworden, und daher auch ihre Verlängerung, die Subtangente; oder vielmehr die Differenz zwischen Abszisse und Subtangente ist verschwunden, beide fallen zusammen mit dem Ausgangspunkt der Ordinate und Tangente *a*, deren Differenz ebenfalls verschwunden ist **.

ветствующая данной абсциссе, пересекает кривую, есть точка, в которой касательная, соответствующая этой ординате, касается кривой,— точка касания.

Отсюда следует: если данная *точка m* параболы есть ее *вершина a*, то она есть одновременно и точка, где нужно восставить *ординату*, т. е. перпендикуляр к оси; и она же есть при этом та единственная точка, в которой [соответствующая этой ординате] касательная касается кривой. Эти *касательная* и *ордината*, *следовательно*, *совпадают*: вместо двух — тут *одна-единственная линия*, перпендикулярная в *a* к оси. В то время как касательная стала, таким образом, бесконечной *, абсцисса *pa* обратилась в 0, а вместе с нею и ее продолжение, подкасательная; или, точнее, разность между абсциссой и подкасательной исчезла, обе совпали с исходной точкой ординаты и касательной *a*, разность между которыми также исчезла **.

Весь остальной текст этого раздела написан по-французски, т. е. на языке изучаемого учебника, хотя конспект бо́льшею частью представляет собой не просто выписки, а сокращенное изложение конспектируемого материала. Все выкладки Маркс, однако, выполняет полностью, чертежи (в том числе и очень запутанные) копирует (с точным сохранением обозначений). Каких-либо собственных замечаний Маркса в этой части рукописи нет. Она заканчивается

---

* Под «касательной» в этом замечании, очевидно, имеется в виду отрезок касательной между точкой касания и точкой, в которой касательная пересекает ось абсцисс, т. е. (см. рисунок) отрезок *mt*, если точки *m* и *t* различны. Если же точки *m* и *t* совпадают, то они уже не определяют однозначно прямую — касательную — и за «касательную» приходится принимать не отрезок *mt*, а *всю* касательную прямую. Именно это здесь, видимо, и хочет сказать Маркс.— *Ред.*

** То есть исчезла разность между абсциссами «исходных точек» *m* и *t* ординаты и касательной: обе эти точки совпали с *a*.— *Ред.*

чертежом к оставшемуся незаконспектированным § 55 курса Сори, где вводится понятие «соприкасающейся окружности». Под чертежом в начале строки написано число «12» (номер следующего пункта конспекта) и оставлено пустое место, на котором впоследствии, быть может, и было что-то написано, но карандашом, следы которого уже невозможно распознать. На этом, очевидно, Маркс прервал на некоторое время свои занятия математикой.

КВАДРАТУРЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛОЩАДЕЙ (ПО НЬЮТОНУ)

Лл. 25—28 на немецком языке.

Выписки из работы Ньютона с критическими замечаниями Маркса. Приводятся здесь полностью. Большое собственное замечание Маркса отмечено им вертикальной чертой слева. В других случаях из контекста ясно, где Маркс излагает Ньютона и где делает замечания в его адрес. Комментарии к этому разделу рукописи см. в примечаниях [101–107].

«QUADRATUREN VON KURVENFLÄCHEN»

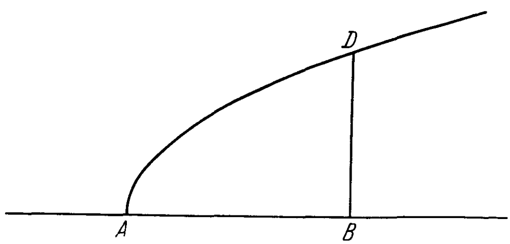
«КВАДРАТУРЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛОЩАДЕЙ»

(Aus *Newton's* Darstellung von 1669 «*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*» an den Präsidenten der Royal Society in London [101]).

Es handelt sich um Kurven (einfache) von der Form $y = ax^{m/n}$ (wo z. B. für Parabel $a = p^{1/2}$ und $x^{m/n} = x^{1/2}$).

(Из *Ньютоновского* изложения 1669 г. «*Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов*» президенту Лондонского Королевского общества [101]).

Речь идет о простых кривых вида $y = ax^{m/n}$ (где, например, для параболы $a = p^{1/2}$ и $x^{m/n} = x^{1/2}$).



$AB = x$, $BD = y$, a, b, c gegebne Grössen, $[m, n]$ — ganze Zahlen.

$AB = x$, $BD = y$, a, b, c — заданные величины, $[m, n]$ — целые числа.

Wenn $y = ax^{m/n}$, *so ist*

Если $y = ax^{m/n}$, *то*

$$\begin{matrix}\textit{Fläche}\\ \textit{площадь}\end{matrix}\ ABD = \frac{an}{m+n}\, x^{\frac{m+n}{n}}.$$

(Dies hingestellt [102] ohne Beweis.)

(Это приводится [102] без доказательства.)

Als Beispiele gibt er:

1) $x^2 = 1 \cdot x^{2/1} = y$; $a = 1$, $m = 2$, $n = 1$; so

В качестве примеров он дает:

1) $x^2 = 1 \cdot x^{2/1} = y$; $a = 1$, $m = 2$, $n = 1$; тогда

$$\begin{matrix}\text{Fläche}\\ \text{площадь}\end{matrix}\ ABD = \frac{1}{3}x^3.$$

2) Wenn $4\sqrt{x} = 4x^{1/2} = y$ ($a = 4$, $m = 1$, $n = 2$), so

2) Если $4\sqrt{x} = 4x^{1/2} = y$ ($a = 4$, $m = 1$, $n = 2$), то

$$\begin{matrix}\text{Fläche}\\ \text{площадь}\end{matrix}\ ABD = \frac{8}{3}x^{3/2}\ {}^{103}.$$

Er gibt bei dieser Aufstellung keine Beweise, weder für den allgemeinen Satz noch irgendwelchen Aufschluss über die Beispiele.

Это перечисление не сопровождается никакими доказательствами: ни доказательством общей теоремы, ни хоть какими-нибудь пояснениями для примеров.

Nehmen wir *erstes Beispiel*: $y = x^2$; so Element der Fläche $= y\,dx = x^2\,dx$.

Hence

Возьмем *первый пример*: $y = x^2$; тогда элемент площади $= y\,dx = x^2\,dx$.

Следовательно,

$$\begin{matrix}\text{Fläche}\\ \text{площадь}\end{matrix} = \int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{1}{3}x^3.$$

Zweites Beispiel: $y = 4x^{1/2}$; Element der Fläche $= y\,dx = 4x^{1/2}\,dx$. Hence

Второй пример: $y = 4x^{1/2}$; элемент площади $= y\,dx = 4x^{1/2}\,dx$; следовательно,

$$\begin{matrix}\text{Fläche}\\ \text{площадь}\end{matrix} = \int 4x^{1/2}\,dx = \frac{4x^{1/2+1}}{3/2} = \frac{8}{3}x^{3/2}.$$

Und allgemein: wenn

И вообще: если

$$y = ax^{m/n},$$

so

то

$$\begin{matrix}\text{Element der Fläche}\\ \text{элемент площади}\end{matrix} = y\,dx = ax^{m/n}\,dx;$$

hence

следовательно,

$$\begin{matrix}\text{Fläche}\\ \text{площадь}\end{matrix} = \int ax^{m/n}\,dx:$$

$$\int ax^{m/n}\,dx = \frac{ax^{m/n+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{ax^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} = \frac{an}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}}.$$

Newton wusste aus der analytischen Geometrie [104], dass das Element [der Fläche] der Parabel etc. $= y\,dx$, i.e. gleich dem Differential der gesuchten Kurvenfläche; und da y durch die Gleichung der Kurve $= ax^{m/n}$, so dass das Differential $= ax^{m/n}\,dx$, d. h. gleich dem Abszissenausdruck von y [multipliziert mit dx]. Er wusste ferner aus derselben Quelle, dass die Fläche als unendliche Summe dieser Elemente, also als

Ньютон знал из аналитической геометрии [104], что элемент [площади] параболы и др. $= y\,dx$, т. е. равен дифференциалу искомой криволинейной площади; и так как y по уравнению кривой $= ax^{m/n}$, то этот дифференциал равен $ax^{m/n}\,dx$, т. е. равен выражению y в абсциссе [, помноженному на dx]. Он знал, далее, из того же источника, что площадь рассматривается как бесконечная сумма этих элементов, т. е. как

$$\int ax^{m/n}\,dx$$

betrachtet wird. Er wusste ferner, dass das Resultat für $x^m\,dx$ (wo m irgendein $\frac{m}{n}$ sein kann, nur ganze Zahlen für m und n; z. B. $n=1$, so $x^{m/n}=x^m$) $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ [ist], welches gibt für

Он знал, далее, что результат для $x^m\,dx$ (где m может быть любым $\frac{m}{n}$, целыми числами являются только m и n; например, при $n=1$ $x^{m/n}=x^m$) [есть] $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, что дает для

$$\int ax^m\,dx = a\,\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1}\,ax^{m+1}.$$

Übrigens zeigte ihm die Differentiation von x^m z. B., dass sein Differential $mx^{m-1}\,dx$, also das zweite Glied des binomischen Satzes und dieses wird wieder das erste, also integriert in der Formel

Впрочем, уже дифференцирование x^m, например, показало ему, что дифференциалом его является $mx^{m-1}\,dx$, т. е. второй член биномиального разложения, снова становящийся первым, стало быть, интегрирующийся по формуле

$$\frac{mx^{m-1+1}dx}{(m-1+1)\,dx} = x^m.$$

Kannte er diese Formel, so wusste er aus der analytischen Geometrie, dass sie das Integral von $y\,dx$, d. h. von der differenzierten Funktion von x

Зная эту формулу, он знал из аналитической геометрии, что она [представляет собой] интеграл от $y\,dx$, т. е. от дифференцированной функции от x в уравнеin der Kurvengleichung [ist] [105]. Dass er aber durchaus die Anwendung des Integral- und Differentialcalculus auf die analytische Geometrie nicht fertigbrachte, beweist sein folgender Beweis des allgemeinen Satzes, wo: 1) das Hilfs ▭, oder vielmehr Hilfstrapez, nicht aus dx und $y + dy$ konstruiert wird, sondern aus dx und einer Höhe, die keine Ordinate ist, also auch nicht verschwindet, wenn dx verschwindet; 2) er konstruiert nicht aus der Gleichung $y =$ etc. die Kurve, sondern geometrisch, indem der Flächeninhalt als *gegeben* vorausgesetzt wird; 3) vermittelst der Differentiation der gegebnen Funktion von x wird y, die Höhe gefunden und dann zurückgeschlossen: ist nun y die Höhe = so und so, so muss umgekehrt, wenn y gegeben ist in solchem Ausdruck, der Flächeninhalt so und so sein. Er hütet sich aber wohl wirklich zu integrieren oder zu zeigen, wie dieser umgekehrte Prozess zu machen ist durch den calculus; 4) er hätte sonst auch gefunden, dass die Formel nicht für alle einfachen Kurven hinreicht, sondern $+C$, die Konstante in vielen Fällen nicht 0 ist, sondern bestimmt werden muss. Wir geben nun wirklich seinen so g. Beweis auf der folgenden Seite.

Notabene: er setzt überall o, o^2 etc., wo wir dx, dx^2 etc. setzen.

нии кривой [105]. То, однако, что он отнюдь не справился с применением интегрального и дифференциального исчисления к аналитической геометрии, показывает последующее его доказательство общей теоремы, где: 1) вспомогательный ▭ или, вернее, вспомогательная трапеция построена не из dx и $y + dy$, а из dx и некоторой высоты, не являющейся ординатой, почему [dy] и не исчезает при исчезании dx; 2) он строит кривую не из уравнения $y =$ и т. д., но геометрически, предполагая площадь *заданной*; 3) при помощи дифференцирования заданной функции от x находится y, высота, и затем заключается обратно: если теперь y, высота, = тому-то и тому-то, то, обратно, если y задана таким выражением, площадь должна быть такая-то и такая-то. Однако он избегает действительно интегрировать или показать, как надлежит проделать этот обратный процесс с помощью исчисления; 4) иначе он обнаружил бы также, что формула достаточна не для всех простых кривых, но [нужно еще писать] $+C$; во многих случаях постоянная не есть 0, но должна быть еще определена. Мы дадим теперь на следующей странице дословно его так называемое доказательство.

Notabene: всюду, где у нас dx, dx^2 и т. д., он пишет o, o^2 и т. д.

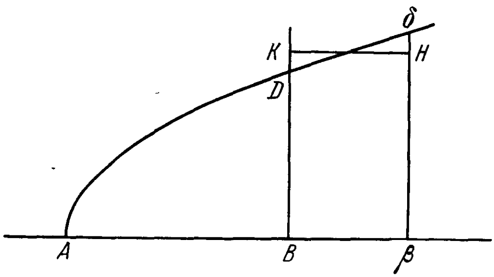
1) *Vorbereitung zum Beweis.* Fläche ABD, die berechnet werden soll, $=z$; $AB=x$; $BD=y$; $B\beta=dx$; $BK=v$; [Inhalt] $\square\, B\beta KH\,(v\,dx)=$ Fläche $B\beta\delta D$

1) *Приготовление к доказательству.* Площадь ABD, которую надо вычислить, $=z$; $AB=x$; $BD=y$; $B\beta=dx$; $BK=v$; $\square\, B\beta KH\,(v\,dx)=$ площади $B\beta\delta D$;

$$A\beta=x+dx;\qquad A\delta\beta=z+v\,dx.$$

Aus der beliebig angenommenen Relation zwischen x und z *suche ich y auf folgende Weise*:

A) Man setze $z=\frac{2}{3}x^{3/2}$ oder $z^2=\frac{4}{9}x^3$. Dann substituiere man



$x+dx$ für x und $z+v\,dx$ für z, so erhält man:

B) $\frac{4}{9}(x+dx)^3=(z+v\,dx)^2$;

hence:

Из произвольно выбранного соотношения между x и z *я ищу y следующим образом*:

A) Полагаем $z=\frac{2}{3}x^{3/2}$ или $z^2=\frac{4}{9}x^3$. Подставляя $x+dx$ вместо x и $z+v\,dx$ вместо z, получаем:

B) $\frac{4}{9}(x+dx)^3=(z+v\,dx)^2$, так что

$$\frac{4}{9}(x^3+3x^2\,dx+3x\,dx^2+dx^3)=z^2+2zv\,dx+v^2\,dx^2.$$

$\frac{4}{9}x^3=z^2$; diese beiden hebt man gegeneinander auf und dividiert den Rest durch dx, so

$\frac{4}{9}x^3=z^2$; взаимно сокращая оба эти члена и деля остаток на dx, получаем

$$\frac{4}{9}(3x^2+3x\,dx+dx^2)=2zv+v^2\,dx.$$

Nehmen wir jetzt an, $B\beta=dx$ nehme ins unendliche ab und verschwinde zuletzt oder werde wirklich 0 (er hat es vorher schon o ernannt), so versch-

Предположим теперь, что $B\beta=dx$ бесконечно убывает и наконец исчезает, т. е. становится действительно 0 (он уже раньше назвал его o); тогда winden die mit o multiplizierten Glieder und wir erhalten:

C) $\frac{4}{9}\cdot 3x^2 = 2zv$, oder $\frac{4}{3}x^2 = 2zv$; daher

члены, помноженные на o, исчезают, и мы получаем:

C) $\frac{4}{9}\cdot 3x^2 = 2zv$, или $\frac{4}{3}x^2 = 2zv$, откуда

$$\frac{2}{3}x^2 = zv.$$

v ist nun aber (warum? da v keine Ordinate, und dx keine Funktion von v ist? [106]), wenn dx zu 0 wird $= y$, und daher

Но и теперь, когда dx становится $= 0$, v равно y (почему? ведь v не ордината, а dx не функция от v? [106]), и поэтому

$$\frac{2}{3}x^2 = zv = zy = \frac{2}{3}x^{3/2}y.$$

Wenn aber $\frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^{3/2}y$, so

Но если $\frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^{3/2}y$, то

$$y = \frac{\frac{2}{3}x^2}{\frac{2}{3}x^{3/2}} = \frac{x^2}{x^{3/2}} = x^{2-\frac{3}{2}} = x^{1/2}.$$

⟦Wir haben also y gefunden, indem wir 1), was keineswegs aus der Konstruktion folgt, das Differentialrechteck $= y\,dx$ gesetzt und dann durch Differentiation $\frac{4}{9}x^3$ gefunden aus dem angenommenen Flächenausdruck $vz = \frac{2}{3}x^2$.⟧

Nun fügt *Newton* hinzu — und das soll beweisen, dass er zu *integrieren* wusste:

«Wenn *daher* (woher?) umgekehrt $x^{1/2} = y$ ist (d. h. wenn wir die Gleichung der Kurve haben), so die Fläche $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$».

Der Gang also der: ich finde, vermittelst Differentiation, wenn eine Gleichung für die Fläche gegeben ist, worin der Flächeninhalt in der Abszisse

⟦Мы нашли, таким образом, y тем, что 1) положили дифференциальный прямоугольник $= y\,dx$, что никоим образом не следует из построения, и тогда дифференцированием $\frac{4}{9}x^3$ нашли из принятого выражения площади $vz = \frac{2}{3}x^2$.⟧

Теперь добавляет *Ньютон* — и это должно доказать, что он умел *интегрировать*:

«Если *поэтому* (почему?), обратно, $x^{1/2} = y$ (т. е. если мы имеем уравнение кривой), то площадь $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$».

Ход рассуждения, следовательно, такой: я нахожу при помощи дифференцирования, если дано уравнение для площади, в котором она выражена ausgedrückt ist, die *Kurvengleichung*, z. B. $y = x^{1/2}$ (also $y = 1 \cdot x^{1/2}$, und wenn ich für 1 a setze oder sonst gegebne Zahlen und für $\frac{1}{2}$ $\frac{m}{n}$, [so] $y = ax^{m/n}$), also die Bestimmung der Ordinate y in der Abszisse x. Dann schliesse ich, dass umgekehrt es möglich sein muss, aus der *Kurvengleichung* — also integrando — auch den Flächeninhalt zu finden, und zwar muss dieser Flächeninhalt derselbe sein, aus dem ich

через абсциссу, *уравнение кривой*, например $y = x^{1/2}$ (стало быть, $y = 1 \cdot x^{1/2}$, и если я заменю 1 через a или какие-либо заданные числа, а $\frac{1}{2}$ через $\frac{m}{n}$, [то] получу $y = ax^{m/n}$), т. е. определение ординаты y через абсциссу x. Тогда я заключаю, что, обратно, должно быть возможным из *уравнения кривой* — т. е. интегрируя — найти также площадь, и притом эта площадь должна быть той же, из которой я нашел

$$y = ax^{m/n}$$

gefunden habe. Damit habe ich noch keineswegs *integriert*, so wenig wie ursprünglich, das Differential der Fläche *ABD* direkt durch *Differentiation* der Kurvengleichung — die ich ja umgekehrt als Resultat finde —hergeleitet ist [107]. Wenn Newton übrigens geglaubt hätte, dass diese Manier, die er «Vorbereitung zum Beweise» nennt, selbst der Beweis wäre, so hätte er keinen *Beweis* folgen lassen. Dieser angebliche *Beweis* besteht aber nur darin, dass dieselbe Sache wiederholt wird in *allgemein algebraischer* Form statt *bestimmter* Zahlen, also dass gesetzt wird $z = \frac{n}{m+n}\, ax^{\frac{m+n}{n}}$ statt $z = \frac{2}{3}\, x^{3/2}$.

Man sehe sich nur den folgenden *Beweis* an.

Тем самым я, однако, еще отнюдь не *интегрировал*, не более чем получил первоначально дифференциал площади *ABD* прямо с помощью *дифференцирования* уравнения кривой, которое я ведь, наоборот, получаю как результат [107]. Если бы, впрочем, Ньютон думал, что этот прием, который он называет «приготовлением к доказательству», давал бы само доказательство, то он не помещал бы после него никакого *доказательства*. Но это мнимое *доказательство* состоит лишь в том, что то же самое повторяется *в общей алгебраической форме* вместо *определенных* чисел, т. е. что вместо $z = \frac{2}{3} x^{3/2}$ полагается $z = \frac{n}{m+n}\, ax^{\frac{m+n}{n}}$.

Познакомимся теперь со следующим *доказательством*.

Beweis. Im allgemeinen nun, wenn $z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$ (statt $=\frac{2}{3}x^{3/2}$; die allgemeine algebraische Formel gesetzt für die Ziffern) oder (dies bloss algebraische Vereinfachung, Substitution einfacherer Ausdrücke, wofür später wieder ihre Werte gesetzt werden können), *oder* [ist] $\frac{an}{m+n}=c$ und $m+n=p$, [so] wenn (durch diese Substitution, die kein neues Beweisargument liefert, sondern nur die *Voraussetzung* in andren, einfacheren Zeichen *wiederholt*) $z=cx^{p/n}$ oder $z^n=c^nx^p$, so ist, wenn (ganz wie vorher in der Vorbereitung) $x+dx$ ⟦er hat wie oben $x+o$⟧ [statt x] und $z+v\,dx$ (er hat wie oben $z+vo$) oder (was nachher auf dasselbe herauskommt) $z+y\,dx$ für z substituiert wird ⟦der Fortschritt besteht hier darin, dass das Element ▭ direkt als $y\,dx$ ohne weiteres Brimborium bestimmt wird⟧

Доказательство. Теперь *в общем виде*, когда $z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$ (вместо $=\frac{2}{3}x^{3/2}$; общее алгебраическое выражение, подставленное вместо цифр), или (это только алгебраическое упрощение, подстановка более простых выражений, вместо которых затем могут быть снова подставлены их значения), *или* [если] $\frac{an}{m+n}=c$ и $m+n=p$, [то] когда (с помощью этой подстановки, которая не дает никакого нового доказательного аргумента, но лишь *повторяет предположение* в других, более простых обозначениях) $z=cx^{p/n}$ или $z^n=c^nx^p$, то, если подставить (совершенно так же, как в приготовлении) $x+dx$ ⟦он пишет, как и выше, $x+o$⟧ [вместо x] и $z+v\,dx$ (у него, как и выше, $z+vo$) или (что́ затем сводится к тому же) $z+y\,dx$ вместо z ⟦прогресс состоит в том, что элемент ▭ определяется непосредственно как $y\,dx$ без дальнейшей шумихи⟧, [мы получим]

$$c^n(x^p+px^{p-1}\,dx+\ldots)=z^n+nz^{n-1}y\,dx+\ldots$$

c^nx^p aufgehoben gegen z^n, und das übrige durch dx dividiert [was nachdem $=0$ gesetzt wird], wird

Сокращая c^nx^p с z^n и деля оставшееся на dx [полагая его затем $=0$], находим

$$c^npx^{p-1}=nz^{n-1}y=\frac{ynz^n}{z}=\frac{ync^nx^p}{cx^{p/n}}\ ;$$

oder durch c^nx^p dividiert:

или, деля на c^nx^p,

$$\frac{c^npx^{p-1}}{c^nx^p}=\frac{ync^nx^p}{cx^{p/n}c^nx^p}\ ,$$

$px^{-1} = \frac{yn}{cx^{p/n}}$; hieraus

$$ny = px^{-1}cx^{p/n} = pcx^{p/n-1} = pcx^{\frac{p-n}{n}}.$$

Setzt man für p und c ihre Werte wieder, so erhält man schliesslich: $y = ax^{m/n}$. (Nämlich dann:

$$ny = (m+n)\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n-n}{n}},$$

Wenn daher *umgekehrt* $y = ax^{m/n}$ (i. e. die Kurvengleichung gegeben ist) gesetzt wird, so ergibt sich für z der Wert $\frac{m}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$, q. e. d. D. h. es ist nichts bewiesen, sondern nur die «Vorbereitung zum Beweis» in allgemeiner algebraischen Form *wiederholt*.

$px^{-1} = \frac{yn}{cx^{p/n}}$, откуда

Подставляя вместо p и c снова их значения, мы получим окончательно: $y = ax^{m/n}$. (В самом деле, при этом

$$ny = anx^{m/n}, \quad y = ax^{m/n}.)$$

Если поэтому, *наоборот*, положено $y = ax^{m/n}$ (т. е. дано уравнение кривой), то для z получается значение $\frac{m}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$, что и требовалось доказать. То есть ничего не доказано, но лишь *повторено* в общей алгебраической форме «приготовление к доказательству».

Л. 28 (стр. 27 по Марксу) рукописи содержит только одну строку: «...sondern nur d. «Vorbereitung zum Beweis» in allgemeiner algebr. Form wiederholt» («...но лишь повторено в общей алгебраической форме «приготовление к доказательству»). Весь остальной лист пуст. Очевидно, между этим разделом рукописи и ее дальнейшими частями — второй разрыв в работе Маркса.

«КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ ВЫСШИХ РОДОВ»

Лл. 29—33. Здесь Маркс возвращается к тому II курса Сори, но, как уже было отмечено, конспектирует не продолжение начатой им раньше главы. Он пропускает и две следующие за нею главы и останавливается на главе «О конических сечениях высших родов» (§§ 91—99, стр. 95—105), которую конспектирует полностью. В этой главе Сори рассматривает кривые, уравнение которых — при специально указываемых им способах выбора системы координат — имеет один из следующих видов:

1) $y^{m+n} = x^m(2a-x)^n$ или, что считается у Сори отличным от этого и получается отсюда преобразованием системы координат,

$y^{m+n} = x^m(a-x)^n$ —«окружности высших родов» (род определяется числом m, порядок в роде — числом n), § 91;

2) $y^{m+n} = a^m x^n$ —«параболы высших родов», § 92;

3) $\frac{p}{a}y^{m+n} = x^m(a-x)^n$ —«эллипсы высших родов». § 93;

4) $\frac{p}{a} y^{m+n} = x^m (a+x)^n$ или, при отнесении к асимптотам,

$x^m y^n = a^{m+n}$ —«гиперболы высших родов», §§ 94—95;

5) $a^{m-1}y = x^m + bx^{m-1} + acx^{m-1} + \ldots + a^{m-1}k$ —«параболоиды», § 96.

Тут, «если мы предполагаем x бесконечным, положительным или отрицательным, то, пренебрегая всеми членами, которые по сравнению с x^m рассматриваются как 0, мы получаем уравнение $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$» (стр. 102). Последнее означает у Сори, что когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то в случае нечетного m кривая, в силу непрерывности, должна пересекать ось x-ов (поскольку ордината y из равной $-\infty$ должна стать равной $+\infty$, т. е. из отрицательной должна стать положительной), и притом пересекать ее нечетное число раз. И аналогично в случае четного числа m кривая либо совсем не должна пересекать ось x-ов, либо должна пересекать ее отличное от нуля четное число раз. На вытекающих отсюда следствиях, относящихся к числу действительных и мнимых корней уравнений высших степеней (с одной неизвестной x), и заканчивается конспект Маркса.

Конспект носит очень лаконичный характер и не содержит никаких собственных замечаний Маркса. Все определения, чертежи и общие утверждения Сори, однако, полностью воспроизводятся Марксом. Что он не собирался дальше изучать курс Сори, ясно из того, что на последнем листе 33 (стр. 32 у Маркса) этого конспекта Маркс не оставил пустого места, но тут же начал записывать интересующие его сведения о содержании книг по новейшей истории Германии.

Лл. 34—36 Марксом не занумерованы. Следующий за ними лист 37 имеет Марксов номер «33». На протяжении листов 37—52 Марксова нумерация получается поэтому вычитанием четверки из номера листа в архиве. Далее Маркс два раза ошибся в нумерации: вместо «45» написал «46», а затем вместо «47»—«44», и номер архива, вплоть до л. 62, уже на 10 больше номера Маркса.

«НЕСКОЛЬКО ВИДОИЗМЕНЕННОЕ ЛАГРАНЖЕВО ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА НА ЧИСТО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОСНОВЕ»

Лл. 37—81, на немецком языке: имеются английские и французские фразы.

Вся эта часть — больше половины рукописи — объединена Марксом общим заголовком: «**Nach Lagrange somewhat modified Entwicklung des Taylorschen Theorems auf bloss algebraischer Grundlage**» («**Несколько видоизмененное Лагранжево изложение теоремы Тейлора на чисто алгебраической основе**»). Она начинается (лл. 37—44, стр. 33—40 у Маркса) конспектом самой последней главы раздела «Дифференциальное исчисление» в курсе Бушарла под заголовком: «О методе Лагранжа обосновывать дифференциальное исчисление без рассмотрения пределов, бесконечно малых или каких-нибудь исчезающих количеств» (§§ 244—250, стр. 168—172 имеющегося у нас 5-го французского издания). Местами этот конспект перемежается выдержками из главы 5 книги: J. Hind «The principles of the differential calculus», Cambridge, 1831 (Дж. Хайнд «Основы дифференциального исчисления», §§ 95, 96, 99, стр. 120—121, 124—129). При этом он носит систематизированный характер и состоит из пунктов, последовательно занумерованных Марксом цифрами 1—9. Все эти страницы рукописи перечеркнуты карандашом, за исключением одного места на л. 39 (стр. 35 по Марксу), взятого им в рамку, где, возвращаясь еще раз к уравнениям

$$y = f(x) + Ph, \quad P = p + Qh, \quad Q = q + Rh, \quad \ldots,$$

приводимым в курсе Бушарла (стр. 168), Маркс поясняет (имея в виду разложение их правых частей в ряд):

So dass in jeder dieser Gleichungen nur das zweite Glied zu finden, welches mit h in der ersten Potenz behaftet.

Так что в каждом из этих уравнений нужно находить только второй член, содержащий h в первой степени.

ОБ ОЦЕНКЕ МЕТОДА ЛАГРАНЖА

Особое внимание в этом конспекте Маркс обращает на такие места в конспектируемых им учебниках, которые относятся к способам введения специфической символики дифференциального исчисления у Лагранжа и к оценке его метода. Здесь Маркс местами называет свои источники и приводит (в кавычках) цитаты из них. Так, на л. 41 (стр. 37 по Марксу) мы читаем:

So sagt Lagrange selbst, dass er für h dx setzt, for the sake of uniformity of notation *.

Boucharlat sagt that the expression $\frac{dy}{dx}$ is the symbol of the operation by which we obtain the coefficient of h in the development of $f(x+h)$, und $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. indicate that the same prozess repeated will make known to us the coefficients of the other powers of h.

In der Tat zeigt die Vergleichung mit der Formel von Taylor und Differentialcalculus überhaupt that if the development of a proposed function of $x+h$ by any means be expressed in a series ascending by integral and positive powers of h, the coefficients of h, $\frac{h^2}{2}$, $\frac{h^3}{2\cdot 3}$, ..., $\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$ will be so many *Derived functions* equivalent to the correspon-

Так, Лагранж сам говорит, что он пишет dx вместо h для единообразия обозначений *.

Бушарла говорит, что выражение $\frac{dy}{dx}$ есть символ операции, посредством которой мы получаем коэффициент при h в разложении для $f(x+h)$, а $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. указывают, что тот же процесс, будучи повторен, даст нам коэффициенты при других степенях h.

В действительности сравнение с формулой Тейлора и дифференциальное исчисление вообще показывают, что, каким бы способом разложение предложенной функции от $x+h$ ни было выражено рядом по возрастающим целым и положительным степеням h, коэффициентами при h, $\frac{h^2}{2}$, $\frac{h^3}{2\cdot 3}$, ..., $\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$ будут столько же *производных функций*,

* Слова «for the sake of uniformity of notation» имеются в курсе Хайнда, § 95, стр. 120 (из раздела о «производных функциях» Лагранжа).— *Ред.*

ding *Differential Coefficients*, denoted by

эквивалентных соответствующим *дифференциальным коэффициентам*, обозначаемым посредством

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

Это место в конспекте Маркса относится к § 251 (стр. 172—173 в 5-м французском издании) курса Бушарла.

Следуя Бушарла, Маркс приводит далее в качестве примера способ отыскания последовательных производных от ax^m посредством разложения $a(x+h)^m$ по биномиальной теореме и выписывания коэффициентов при h, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$, $\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д., после чего пишет (л. 42, стр. 38 у Маркса):

Dies ist also keine Methode, um durch den Differentialcalculus algebraische und transcendental Funktionen zu lösen, sondern umgekehrt um durch die algebraische Entwicklung der Funktionen ihren Differentialausdruck ready cut zu liefern.

Это, следовательно, не метод, позволяющий с помощью дифференциального исчисления разлагать алгебраические и трансцендентные функции, а, наоборот, способ получать из алгебраического разложения функций выражение для их дифференциалов в готовом виде.

Непосредственно следующая за этим местом оценка метода Лагранжа представляет собою итог уже законспектированной Марксом части (§§ 244—251) главы о методе Лагранжа в курсе Бушарла. В имеющемся у нас 5-м французском издании этого курса таких формулировок, однако, нет. Их нет и в курсе Хайнда. (Не исключена возможность, что они имеются в примечаниях Пикока (G. Peacock) к английскому переводу книги S. F. Lacroix, An elementary treatise on the Differential and Integral Calculus. Cambridge, 1816, но это еще нуждается в проверке.) Вслед за этим подведением итога и содержащейся в нем оценкой метода Лагранжа Маркс приводит в квадратных скобках и в кавычках, с указанием фамилий авторов, оценки метода Лагранжа, содержащиеся в курсах Бушарла (§ 252, стр. 173 5-го франц. изд.) и Хайнда (§ 99, стр. 128—129). Вся эта часть конспекта (лл. 42—43, стр. 38—39), перечеркнутая в рукописи карандашом, приводится ниже полностью, поскольку она освещает некоторый этап пути следуя которому Маркс пришел к своей точке зрения на сущность дифференциального исчисления. Квадратные скобки Маркса здесь (и далее) заменены двойными квадратными.

Wenn also Lagrange in seiner Theorie of functions weiter nichts getan, als bisher nicht algebraisch gelöste Funktionen gelöst zu haben, um damit auch

Если, таким образом, Лагранж в своей теории функций не сделал ничего больше, помимо того, что нашел разложения для до тех пор алгебраически ihren Differentialausdruck * zu liefern, so beschränkte sich sein Verdienst für den Differentialcalculus darauf:

1) das *Taylorsche Theorem*, was within certain limits in gewisser Hinsicht als Basis des Differentialcalculus betrachtet werden kann, algebraisch bewiesen zu haben, indem er die Expansion für $f(x+h)$, wovon Taylor ausgeht, algebraisch bewiesen hat **;

2) ein für allemal [algebraisch bewiesen zu haben], dass $f(x)$ oder y das erste Glied der Expansion von $f(x+h)$ und dass das zweite Glied, das nur die erste power von h enthält, also der Koeffizient von h, die value der ersten Differentialkoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ [ist],

не разложенных функций, чтобы тем самым дать и их дифференциальное выражение *, то его заслуга перед дифференциальным исчислением ограничилась тем, что:

1) он алгебраически доказал *теорему Тейлора*, которая, при некоторых ограничениях, может рассматриваться в определенном смысле как базис дифференциального исчисления, [доказав алгебраически] то разложение для $f(x+h)$, из которого исходит Тейлор **;

2) раз навсегда алгебраически доказал, что $f(x)$ или y — это первый член разложения для $f(x+h)$ и что второй член, который содержит только первую степень h, т. е. коэффициент при h, есть значение первого дифференциального коэффициента $\frac{dy}{dx}$,

$$\begin{matrix}\text{oder} \\ \text{или}\end{matrix}\ \frac{dy}{dx} = \begin{matrix}\text{dem Koeffizienten von} \\ \text{коэффициенту при}\end{matrix}\ h,$$

und dass das erste Differential daher

и что первый дифференциал поэтому есть

$$\begin{matrix}\textit{das zweite Glied} \\ \textit{второй член}\end{matrix} \times dx \left(\begin{matrix}\textit{statt} \\ \textit{вместо}\end{matrix}\ h\right)$$

* Под «дифференциальным выражением» (Differentialausdruck) функции тут имеется в виду выражение для ее дифференциалов или «дифференциальных коэффициентов», т. е. производных.— *Ред.*

** Так как тут Марксу приходится повторять несколько раз слова, говорящие о том, что Лагранж доказал что-то алгебраически, в рукописи одно из таких повторений оказалось опущенным. Его пришлось восстановить, хотя фраза при этом стала тяжелой. Заметим, что во всех руководствах, которыми пользовался Маркс, теорема Тейлора доказывалась в предположении, что $f(x+h)$ разлагается в ряд по возрастающим целым положительным степеням h. Говоря об этой теореме, естественно было поэтому связывать не только ее формулировку, но и доказательство с именем Тейлора. (Подробнее об этом см. Приложение, стр. 594—596.) Уже из этого, однако, ясно, что эти замечания заведомо *не* являются просто выпиской из конспектируемого Марксом источника.— *Ред.*

Aber Lagrange hat auf seinem Weg nicht nur ein unter seinem Namen figurierendes neues Theorem für den Differentialcalculus * gefunden, sondern auch, wie wir weiter sehen werden, durch die Darstellung sukzessiven Koeffizienten von h, h^2 etc. als derivierte Funktionen von x: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ [etc.], die eigentliche rationelle Basis des differential calculus geliefert.

Es ist noch zu bemerken, dass Lagrange die derived functions in anderer Weise bezeichnet, indem er statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. y', y'' etc. schreibt.

⟦Dahingegen, obgleich in der Methode des Lagrange «the principles of the differential calculus appear demonstrated in a manner independent of every considerations of *limits*, *infinitesimals* or *evanescent quantities*, he is himself bound constantly to have recourse to limits or infinitesimals, as soon as you come to its applications, f.i. the determination of volumes, surfaces, the length of curves, or to obtain the expressions for the subtangents etc.» (*Boucharlat*) **.

Но на своем пути Лагранж не только нашел для дифференциального исчисления некоторую, его именем названную, новую теорему *, но и, как мы увидим дальше, представив последовательные коэффициенты при h, h^2 и т. д. как производные функции от x: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ [и т. д.], подвел собственный рациональный базис под дифференциальное исчисление.

Нужно заметить еще, что Лагранж обозначает производные функции по-другому: именно, он пишет вместо $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. y', y'' и т. д.

⟦С другой стороны, хотя в методе Лагранжа «принципы дифференциального исчисления представляются доказанными независимо от всякого рассмотрения *пределов*, *бесконечно малых* или *исчезающих количеств*, сам он неизменно вынужден прибегать к пределам или бесконечно малым, как только вы переходите к его приложениям, например к определению объемов, поверхностей, длины кривых или хотите получить выражения для подкасательных и т. д.» (*Бушарла*) **.

---

* «Теоремой Лагранжа» в дифференциальном исчислении называется теперь обычно теорема о собственном значении. В учебниках, которыми пользовался Маркс (см., например, T. G. Hall «A treatise on the differential and integral calculus», London, 1852, стр. 227—231), «теоремой Лагранжа» называлась носящая его имя формула (разложение в ряд) для обращения функции, опубликованная им впервые в статье «Новый метод решения буквенных уравнений посредством рядов» (Mém. Ac. Berlin, 1768 (1770)).— *Ред.*

** В 5-м французском издании Бушарла это пункт 252, стр. 173.—*Ред.*

Zugleich «implies his method a previous knowledge of the methods of developing all kinds of functions of $x + h$ in integral ascending positive powers of h, oft sehr difficult. Ausserdem Mac Laurins und Taylor's theorems, when once established, enable us to determine, with great ease, the developments of many functions, whose expansion by common Algebra would be exceedingly tedious» (*Hind*) *.]]

В то же время «его метод предполагает предварительное знакомство с методами разложения всех родов функций от $x + h$ по целым возрастающим положительным степеням h, часто очень трудного. Между тем теоремы Маклорена и Тейлора после того, как они уже установлены, позволяют нам определить с большою легкостью ряды для многих функций, разложение которых средствами обычной алгебры было бы исключительно громоздким» (*Хайнд*) *.]]

Вслед за этим (под номером «9», лл. 43—44, стр. 39—40 в рукописи) Маркс конспектирует по Хайнду (конец § 96, стр. 126—127) приводимое им в качестве примера доказательство теоремы о первом и втором дифференциале произведения двух функций методом Лагранжа. Оно состоит просто в формальном перемножении рядов Тейлора для этих функций и выписывании затем коэффициентов при h и $\frac{h^2}{2}$ как первой и второй производных произведения (с последующим переводом на язык дифференциальных символов Лейбница).

Остальная часть пункта «9» отделена Марксом от предыдущего текста горизонтальной чертой (л. 44, стр. 40 по Марксу) и озаглавлена: **«Zu Gleichung III, p. 34» («К уравнению III, стр. 34»).** «Уравнение III» — это уравнение, которое получается подстановкою $h + i$ на место h в разложении $f(x + h)$ в ряд по степеням h, что дает одно из разложений $f(x + h + i)$ в ряд по степеням двух переменных h и i. Подставляя затем $x + i$ на место x в разложении $f(x + h)$ по степеням h и разлагая при этом по степеням i коэффициенты при степенях h (в разложении для $f(x + h)$ эти коэффициенты являются функциями от x), Бушарла получает другое разложение для

$$f(x + h + i)$$

по степеням переменных h и i. Здесь Маркс выписывает сначала второе разложение и обрывает конспект, так и не дойдя до уравнения III. Что именно его не удовлетворяло в прежнем конспекте (или у Бушарла), остается неясным. Существенно, однако, что это — часть Лагранжева выяснения связи между коэффициентами разложения $f(x + h)$ в ряд по степеням i и последовательными производными функции $f(x)$, к рассмотрению следствий из которого Маркс здесь и переходит.

На этом заканчивается перечеркнутая часть рукописи. Следующие затем листы 45—63 уже не перечеркнуты Марксом.

* В учебнике Хайнда это из главы V, пункт 99, стр. 128—129.— *Ред.*

О РАЗНЫХ СПОСОБАХ ОТЫСКАНИЯ (И ОПРЕДЕЛЕНИЯ) ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ $f(x)$

Неперечеркнутая часть рукописи начинается так (л. 45, стр. 41 по Марксу) (здесь $y_1 = f(x+h)$ и h предполагается отличным от нуля):

10) Nehmen wir zunächst die Lagrangesche expansion als reines development der *derived functions von x*,

10) Если мы возьмем сначала Лагранжево разложение как чистое развертывание *производных функций от x*,

$$y_1 = f(x)\left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y\right) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

$$y_1 - f(x) \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y_1 - y = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix}\text{erste Differenz}\\ \text{первая разность}\end{matrix} = \Delta y\right) \tag{Ia}$$

und

и

$$\frac{y_1 - y}{h} = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + f'''(x)\frac{h^2}{2\cdot 3} + f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

und nennen wir

и обозначим

$$\frac{y_1 - y}{h} = y^{①}, \tag{Ib}$$

so

то

$$y^{①} = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + f'''(x)\frac{h^2}{2\cdot 3} + f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots \tag{II}$$

Вслед за этим Маркс образует разность $y^{①} - f'(x)$, которую он называет второй разностью или $\Delta^2 y$, после чего вводит функцию $y^{②} = \dfrac{y^{①} - f'(x)}{h}$, вычитая из которой $\dfrac{1}{2}f''(x)$, получает третью разность, и функцию $y^{③} = \dfrac{2y^{②} - f''(x)}{h}$, с которой поступает аналогично тому, как это было сделано с $y^{①}$ и $y^{②}$. Далее Маркс выписывает равенства (л. 46, стр. 42 по Марксу):

1) $$\frac{y_1 - y}{h} = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + f'''(x)\frac{h^2}{2\cdot 3} + f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots,$$

2) $$\frac{y_1 - f(x)}{h^2} - \frac{f'(x)}{h} = \frac{1}{2}f''(x) + f'''(x)\frac{h}{2\cdot 3} + f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^2}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots,$$

3) $$\frac{y_1 - f(x)}{h^3} - \frac{f'(x)}{h^2} - \frac{\frac{1}{2}f''(x)}{h} = \frac{1}{2\cdot 3}f'''(x) + f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots,$$

4) $$\frac{y_1 - y}{h^4} - \frac{f'(x)}{h^3} - \frac{\frac{1}{2}f''(x)}{h^2} - \frac{\frac{1}{2\cdot 3}f'''(x)}{h} = f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Преобразуя левые части этих равенств к виду (соответственно)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h^2},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^3},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{2\cdot 3}f'''(x)h^3}{h^4}$$

[y_1 заменили его значением $f(x+h)$] и формально полагая в них $h=0$ [что можно сделать, так как $f(x+h)$ предполагается разложенной в ряд Тейлора и все нужные пределы поэтому здесь осмыслены], Маркс заключает, далее (л. 46, стр. 42 по Марксу):

Wir erhalten also:

Мы получаем, следовательно:

$$1)\ \frac{0}{0}=f'(x), \quad 2)\ \frac{0}{0}=\frac{1}{2}f''(x),$$

$$3)\ \frac{0}{0}=\frac{1}{2\cdot 3}f'''(x), \quad 4)\ \frac{0}{0}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}f^{\mathrm{IV}}(x)$$

etc. etc. и т. д. и т. д.

Wir erhalten auf rein algebraischen Wege diese verschiedenen Werte von $\frac{0}{0}$, die alle aus Ableitung von der Originalfunktion von x abstammen, da $f'(x)$ abgeleitet aus $f(x)$, $f''(x)$ aus $f'(x)$ usw. Was also übrig bleibt, ist aus dem Prozess selbst das Symbol $\frac{0}{0}$ mit seinen verschiedenen Werten zu deuten.

Эти различные значения для $\frac{0}{0}$ мы получаем чисто алгебраическим путем. Все они происходят из вывода [последовательных] производных от первоначальной функции от x, так как $f'(x)$ — производная от $f(x)$, $f''(x)$ — от $f'(x)$ и т. д. Остается, следовательно, обращаясь к самому процессу, придать символу $\frac{0}{0}$ его различные значения.

Естественно, однако, что если символ может иметь *разные* значения в зависимости от *способа* его порождения, то он не может иметь вид постоянной, но должен содержать переменные (параметры), указывающие на то, какая дополнительная информация заведомо нужна еще, чтобы можно было точно определить его значение (что нужно, во всяком случае, знать для этого о том конкретном процессе, в котором это значение строится). (Символ производной функции, например, должен содержать указание на то, что нужно знать первообразную функцию и аргумент, по которому ищется производная.) Если такая дополнительная информация относится к *способу* порождения объекта, то ясно, что она должна определять *самый* этот способ, его отличие от других способов, т. е. его *качество*. Символ $\left(\frac{0}{0}\right)$ — даже если снабдить его индексами (1), (2), (3), . . ., играющими роль значений численного параметра (n),— этому требованию не удовлетворяет. Иначе обстоит дело с символами $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. Вопрос о замене символа $\frac{0}{0}$ этими символами — о диалектике количества и качества, связанной с ними,— привлекает поэтому внимание Маркса, и он специально останавливается на нем на лл. 47—49 (стр. 43—45 в нумерации Маркса). Часть этой заметки, относящаяся к замене символа $\frac{0}{0}$ символом $\frac{dy}{dx}$, была опубликована раньше (по-русски, см. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 21—23). Ниже заметка приводится полностью.

О ЗАМЕНЕ СИМВОЛА $\frac{0}{0}$ СИМВОЛАМИ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ И Т. Д.

Das Verhältnis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ oder } \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x} \text{ oder } \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

drückt aus: [die Relation der] Differenz zwischen der ursprünglichen Grösse von $f(x)$ und ihrer angewachsnen Grösse als $f(x+h)$ [zu h], oder die Relation zwischen der Rate, um welche Funktion x, d. h. $f(x)$, gewachsen ist und der Wachstumsrate der variablen Grösse x, deren Funktion sie [d. h. f] ist.

Es ist das Verhältnis zwischen der Differenz der Funktion von x zur Differenz der variablen Grösse x selbst.

Im *Zähler* haben wir die *Differenz* zwischen den *Funktionen von* x, im *Nenner* die *Differenz* zwischen der ursprünglichen und der angewachsenen Grösse der variablen Grösse x selbst; im Nenner das Mass der Variation von x, im Zähler der Variation seiner Funktion.

Δy ist die erste Differenz von y, und Δx ist die erste Differenz von x.

Отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ или } \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x} \text{ или } \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

выражает [отношение] разности между первоначальной величиной функции $f(x)$ и ее наращенной величиной $f(x+h)$ [к h], или отношение между частью, на которую возросла функция x, т. е. $f(x)$, и величиной приращения переменной величины x, функцией которой она [т. е. f] является.

Это есть отношение разности функции от x к разности самой переменной величины x.

В *числителе* у нас *разность* между *функциями от* x, в *знаменателе* — *разность* между первоначальной и наращенной величинами самой переменной величины x; в знаменателе — мера изменения x, в числителе — мера изменения его функции.

Δy есть первая разность y, а Δx — первая разность x.

Wird $\Delta x = 0$, so wird $\Delta y = 0$, denn y ward nur $= y_1$, weil $x = x + \Delta x$ wurde.

Wir sehn in dem ersten und zweiten Ausdruck:

Если $\Delta x = 0$, то $\Delta y = 0$, так как y стала постольку $= y_1$, поскольку x стала $= x + \Delta x$.

Мы видим в первом и во втором выражении:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x} = \frac{y_1-y}{x_1-x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

dass, wenn h zu 0 wird, wir haben

что если $h = 0$, то

$$\frac{f(x+0)-f(x)}{0} = \frac{f(x)-f(x)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Dass $y_1 - y$ oder $\Delta y = 0$ wird, sobald es Δx oder h wird, ist klar.

Denn

Ясно, что $y_1 - y$ или Δy становится $= 0$, коль скоро равным нулю становится Δx или h.

Ибо

$$x_1 - x = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Δy wird 0, sobald es Δx wird.

Δy становится 0, коль скоро им становится Δx.

Es ist also klar, dass hier Δy oder $y_1 - y$ nicht nur 0 wird, sondern dass es dies nur wird infolge des 0-werdens von Δx, oder des Gleichwerdens von $x_1 = x$; da $x_1 - x = \Delta x$, also $(x + \Delta x) - x = \Delta x$, so kann die erstere Seite nur 0 oder $x + \Delta x = x$ werden, wenn Δx zu 0 wird.

Also selbst in dem Verschwinden von Δy erhält sich die Abhängigkeit der Funktion y von der variablen Grösse x, deren Funktion sie ist, und ihre schliessliche Verwandlung in 0, ihr schliessliches Verschwinden bleibt selbst eine Folge des Verschwindens von Δx, dem Zuwachs der variablen Grösse x; bis in die Nullifikation hinein erhält

Итак, ясно, что здесь Δy или $y_1 - y$ не только становится 0, но и что это происходит только вследствие превращения Δx в нуль или приравнивания $x_1 = x$; так как $x_1 - x = \Delta x$, т. е. $(x + \Delta x) - x = \Delta x$, то первая сторона может стать нулем или $x + \Delta x$ стать $= x$, только если Δx станет 0.

Таким образом, даже в исчезновении Δy проявляется зависимость функции y от переменной величины x, функцией которой она является, и заключительное превращение ее в 0, ее окончательное исчезновение, само остается следствием исчезновения Δx — приращения переменной величины x; вплоть до нулификации sich die Abhängigkeit der Funktion y von der variablen Grösse x[108]. In dem Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist aber dies *qualitative Verhältnis* zwischen Funktion y und der variablen Grösse x, deren Funktion sie ist, ebenfalls *verschwunden*. Jede Spur von dem *qualitativen* Unterschied zwischen Zähler und Nenner, zwischen Funktion der variablen Grösse und der variablen Grösse selbst, ist in dem Ausdruck $\frac{0}{0}$ ausgelöscht.

Um also den Ursprung und Sinn von $\frac{0}{0}$ auszudrücken, setzen wir für das verschwindende Δx dx, womit von selbst das verschwindende Δy zu dy wird.

$\frac{dy}{dx}$ ist also nicht nur ein Symbol für $\frac{0}{0}$, es ist zugleich ein Symbol für den *Prozess*, aus dem $\frac{0}{0}$ in den bestimmten gegebnen Bedingungen der Originalgleichung entsprang; und es $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ drückt aus, was $\frac{0}{0}$ nicht ausdrücken kann, dass das Werden von Δy zu 0 aus dem qualitativen Verhältnis der Funktion y zu der variablen Grösse x entspringt, und die Verwandlung von Δy in dy, daher Folge der Verwandlung von Δx in dx ist. Es wird so in der Negation das *qualitative Verhältnis* festgehalten, dessen Negation sie ist[109].

сохраняется зависимость функции y от переменной величины x[108]. Но в выражении $\frac{0}{0}$ это *качественное отношение* между функцией y и переменной величиной x, функцией которой она является, также *исчезло*. В выражении $\frac{0}{0}$ стерся всякий след *качественного* различия между числителем и знаменателем, между функцией переменной величины и само́й переменной величиной.

Поэтому, чтобы выразить происхождение и смысл $\frac{0}{0}$, мы вместо исчезающего Δx ставим dx, вместе с чем исчезающее Δy уже естественно заменяется на dy.

Следовательно, $\frac{dy}{dx}$ есть не только символ для $\frac{0}{0}$, но одновременно и символ *процесса*, из которого при данных определенных условиях первоначального уравнения получилось $\frac{0}{0}$, и оно $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ выражает то, чего не может выразить $\frac{0}{0}$, а именно, что превращение Δy в 0 проистекает из качественного отношения функции y к переменной величине x, и превращение Δy в dy есть поэтому следствие превращения Δx в dx. В отрицании, таким образом, удерживается то *качественное отношение*, отрицанием которого это превращение является[109].

Dagegen in $\frac{0}{0}$ zeigt sich *nicht*, *was verschwindet*; nur die *quantitative* Seite, dass Zähler verschwunden ist und Nenner ditto ist ausgedrückt, und damit verschwindet das Verhältnis selbst; das *qualitative Verhältnis*, *das existiert*, indem die 0 im Zähler nur eine *Konsequenz* der 0 im Nenner ist, also selbst ein Ausdruck der Abhängigkeit der Funktion von der variablen Grösse, deren Funktion sie ist, ist nicht ausgedrückt. Es ist ganz richtig, dass $\frac{0}{0}$ jede Grösse ausdrücken kann, aber ebenso kann x jede Grösse ausdrücken; der particular sense of $\frac{0}{0}$ sowie von x hängt jedesmal ab von den bestimmten Bedingungen oder [der] Funktion, in der das $\frac{0}{0}$ oder x figuriert, und den bestimmten Bedingungen, woraus sei es $\frac{0}{0}$ entspringt, sei es x variiert.

Wir werden aber nicht nur durch die Untersuchung über den Entwicklungsprozess von $\frac{0}{0}$ hingeführt auf das Symbol $\frac{dy}{dx}$ für die Verwandlung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{0}{0}$, sondern [auch] durch das Resultat, was sich aus der Originalgleichung ergibt. Dies Resultat ist nämlich $\frac{0}{0} = f'(x)$ und nicht $\frac{0}{0} = 0$ oder irgendeinen andern beliebigen realen Wert.

Наоборот, в $\frac{0}{0}$ не указано, *что́ исчезает*; здесь выражена лишь *количественная* сторона, именно, что исчез числитель, а также и знаменатель и тем самым исчезает самое отношение; *качественное отношение*, *существующее*, поскольку 0 в числителе есть лишь *следствие* 0 в знаменателе, т. е. являющееся само выражением зависимости функции от переменной величины, чьей функцией она является, не выражено. Совершенно правильно, что $\frac{0}{0}$ может выражать любую величину, но в такой же мере и x может выражать любую величину; частное значение как $\frac{0}{0}$, так и x зависит каждый раз от тех определенных условий или функции, в которой это $\frac{0}{0}$ или x фигурирует, и тех определенных условий, которые ведут к возникновению $\frac{0}{0}$ или к изменению x.

Но к символу $\frac{dy}{dx}$ для превращения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в $\frac{0}{0}$ нас привело не только исследование процесса возникновения $\frac{0}{0}$, но [также и] результат, получающийся из первоначального уравнения. Этот результат есть именно: $\frac{0}{0} = f'(x)$, а не $\frac{0}{0} = 0$, или какому-либо другому произвольному реальному значению.

Es ist (sieh p. 42 *):

Мы имеем (см. стр. 42 *):

$$1)\ \frac{0}{0}(1) = f'(x), \qquad 2)\ \frac{0}{0}(2) = \frac{1}{2}f''(x),$$

$$3)\ \frac{0}{0}(3) = \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(x), \quad 4)\ \frac{0}{0}(4) = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}f^{\mathrm{IV}}(x)$$

etc. etc. и т. д. и т. д.

Wir sehen also, dass das erste reale Gehalt von $\frac{0}{0}$ gleich der ersten *abgeleiteten Funktion von* x *ist*, *oder der* $f'(x)$ und dass die weiteren Gehalten oder realen Werte von $\frac{0}{0}$ alle in bestimmten, aus der Originalfunktion von x abgeleiteten, sukzessive gesetzmässig auseinander entspringenden Funktionen der Variablen x bestehen.

Мы видим, таким образом, что первое реальное содержание символа $\frac{0}{0}$ равно первой *производной функции от* x, *или функции* $f'(x)$, и что дальнейшие содержания, или реальные значения для $\frac{0}{0}$, состоят все из определенных, выведенных из первоначальной функции от x, последовательно возникающих по определенному закону друг из друга функций переменной x.

⟦Wir können de prime abord sagen, wann $\frac{0}{0} = 0$ wird und damit sowohl differential coefficient als limit verschwindet. Dies der Fall, sobald im Prozess die variable Grösse selbst verschwindet oder gleich einer konstanten Grösse wird.

⟦Мы можем тут же сказать, когда $\frac{0}{0}$ обращается в 0, причем становится равным нулю как дифференциальный коэффициент, так и предел. Это имеет место, когда процесс приводит к тому, что сама переменная исчезает или становится равной какой-нибудь постоянной.

Hätten wir z. B.

Если бы мы имели, например,

$$y = f.x$$

[hier im Sinne abgekürzter Aufzeichnung: y ist eine solche Funktion der Variablen x, dessen Ausdruck «x» ist],

[здесь в смысле сокращенной записи: y есть функция x, графически совпадающая с выражением «x»],

$$y_1 = f.(x+h)$$

[d. h. y_1 fällt graphisch mit der Funktion «$x+h$» zusammen], so

[т. е. y_1 графически совпадает с функцией «$x + h$»], то

$$y_1 = f.x + h\ [= y + h];$$

* Л. 46, здесь стр. 288.— *Ред.*

da, wenn h 0 wird, hier $y_1 = f.x = y$ wird.

Also

так как когда h обращается в 0, то здесь становится $y_1 = f.x = y$.

Следовательно,

$$y_1 - y \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \ \Delta y = h; \ \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f.(x+h) - f.x}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

also $f.\frac{dy}{dx}$ [hier im Sinne: also gleich der (abgeleiteten) Funktion $\frac{dy}{dx}$].

Also $\frac{0}{0} = 1$. Die Variable x ist hier verschwunden.

Setzen wir für $\frac{0}{0}$ $\frac{dy}{dx}$, so $\frac{dy}{dx} = 1$; hence $dy = dx$; also $1 = 1$ $\left(\text{da } \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a} = 1\right)$.

$\frac{0}{0}$ ist hier gleich einer konstanten Grösse geworden...

Nehmen wir von $\frac{dy}{dx}$ das zweite Differential; da das Inkrement der Konstanten $= 0$, so $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ oder $\frac{0}{0} = 0$.]]

Es ist also nur, indem man das qualitative Verhältnis in $\frac{0}{0}$ durch $\frac{dy}{dx}$ fixiert (symbolisiert), dass man fähig wird, die vom ersten $\frac{0}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ (1) verschiedenen aber damit zusammenhängenden und daraus sukzessiv entspringenden $\frac{0}{0}$ (2), $\frac{0}{0}$ (3), $\frac{0}{0}$ (4) zu fixieren; zu Symbolen der untereinander gesetzmässig zusammenhängenden Prozesse zu

т.е. $f.\frac{dy}{dx}$ [здесь в смысле: т. е. равно (производной) функции $\frac{dy}{dx}$].

Так что $\frac{0}{0} = 1$. Переменная x исчезла здесь.

Если мы заменим $\frac{0}{0}$ на $\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = 1$, откуда $dy = dx$ и $1 = 1$ $\left(\text{так как } \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a} = 1\right)$.

$\frac{0}{0}$ стало здесь равным некоторой постоянной величине...

Продифференцируем $\frac{dy}{dx}$, чтобы найти второй дифференциал; так как приращение постоянной равно нулю, то получим $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$, или $\frac{0}{0} = 0$.]]

Таким образом, только фиксируя (в символах) качественное отношение в $\frac{0}{0}$ посредством $\frac{dy}{dx}$, мы получаем возможность фиксировать отличные от первого $\frac{0}{0}$ или $\frac{0}{0}$ (1), но связанные с ним и последовательно из него возникающие $\frac{0}{0}$ (2), $\frac{0}{0}$ (3), $\frac{0}{0}$ (4), сделать их символами закономерно связанных между собою процессов, machen, aus denen sie entspringen, und sie sprechen diesen ihren Zusammenhang selbst aus durch die zweiten Seiten, worin ihre verschiednen realen Werte erscheinen, die in bestimmten Verhältnis zueinander stehen und die alle in näherem oder entfernterem Grad aus der Originalfunktion von x und der ersten Gleichung A), worin diese Originalfunktion noch existiert, abstammen.

порождающих их. [Заметим, что] они и сами выражают эту их связь вторыми сторонами, где выступают их различные реальные значения, находящиеся между собою в определенном отношении и происходящие все на более близкой или более отдаленной ступени, из первоначальной функции от x и первого уравнения A), в котором эта первоначальная функция еще фигурирует.

К обсуждению этого — первого из четырех уравнений, приведенных выше (см. стр. 287), Маркс и переходит теперь, заметив (л. 49, стр. 45 по Марксу, внизу):

Wir müssen nun zunächst das Resultat der ersten Differentiation mit Rücksicht auf die zweite Seite der Gleichung und der von ihr durchgemachten Prozesse betrachten.

Нам нужно теперь рассмотреть сначала результат первого дифференцирования, учитывая вторую сторону нашего уравнения и приведшие к ней процессы.

Уравнением, о котором здесь идет речь, является все то же разложение $f(x+h)$ в ряд Тейлора.

Непосредственно вслед за этими словами находится приводимая ниже заметка (л. 50, стр. 46), в которой идет уже речь о дифференциале как главной части приращения функции [110].

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ КАК ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ

A) *Die Originalgleichung*:

A) *Первоначальное уравнение*:

$$f(x+h) \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{oder}}{\text{или}} y_1 = f(x) \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{oder}}{\text{или}} y\right) + f'(x)\,h + \frac{1}{2} f''(x)\,h^2 + \frac{1}{2\cdot 3} f'''(x)\,h^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(x)\,h^4 + \ldots$$

Was zunächst geschieht, dass wir $f(x)$ von $f(x+h)$ oder y von y_1 abziehn. Wir erhielten dann, solang $h > 0$,

Первым долгом мы отнимаем $f_1(x)$ от $f(x+h)$ или y от y_1. Мы получили затем, при $h > 0$,

$$\Delta y = f'(x)\,h + \frac{1}{2} f''(x)\,h^2 + \frac{1}{2\cdot 3} f'''(x)\,h^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(x)\,h^4 + \ldots$$

Dann, um das Verhältnis der Differenz zwischen $f(x+h)$ und $f(x)$ zum Inkrement der Variablen x zu finden (da $x_1 - x = h$), wurden beide Seiten durch h dividiert, und wir erhielten

Далее, чтобы найти отношение разности между $f(x+h)$ и $f(x)$ к приращению переменной x (так как $x_1 - x = h$), мы поделили обе стороны на h и получили

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) h + \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x) h^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(x) h^3 + \ldots$$

Die Division durch h, nötig um das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu erhalten, hat das *zweite Glied der Originalgleichung* und das erste Glied dieser neuen Gleichung, in fact den term, der h nur in erster Potenz als factor hat, von h befreit, aber gleichzeitig auch alle andern Glieder der Originalgleichung soweit modifiziert, als sie jedes mit *einer um* 1 *verminderten Potenz von h behaftet* sind; so das dritte Glied z. B. mit h^{3-1} oder h^2, statt mit h^3, usw. Aber es ist wichtig festzuhalten, dass der Prozess, wodurch das zweite Glied der Originalgleichung vom factor h befreit wird, alle anderen Glieder *modifiziert* hat.

Деление на h, необходимое для того, чтобы получить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, освободило от h *второй член первоначального уравнения* и первый член этого нового уравнения, на самом деле тот член, который имеет h множителем только в первой степени, но, наряду с этим, и видоизменило так все остальные члены первоначального уравнения, что *множитель h в каждом из них убавил свою степень на* 1; так что, например, третий член имеет h^{3-1} или h^2, вместо h^3, и т. д. Важно, однако, раз навсегда запомнить, что процесс, освобождающий второй член первоначального уравнения от множителя h, *видоизменяет* и все остальные члены.

Zweitens sehen wir aus der Gleichung, wo Δy erscheint (also die *Originalfunktion von x noch mitspielt*, da

Во-вторых, мы видим из уравнения, где появляется Δy (т. е. *еще участвует первоначальная функция от x*, поскольку

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)),$$

dass, je mehr die Grösse von h abnimmt, um so kleiner jedes der nachfolgenden Glieder gegen sein antecedens wird, so dass das erste Glied $f'(x)h$, wo $f'(x)$ nur mit erster power von h

что, чем больше убывает величина h, тем меньше становится каждый из последующих членов по сравнению с предшествующим ему, так что первый член $f'(x)h$, где $f'(x)$ сопровождается behaftet, die *grösste* [Teil der] *Differenz* zwischen y_1 und y ausdrückt, und je kleiner h wird, desto mehr wird es die *Grenze der Summe der partiellen Differenzen*, in deren Gesamtheit A oder Reihe Δy sich darstellt, oder desto weniger ist $\Delta y >$ * als $f'(x)h$.

только первой степенью h, выражает *наибольшую* [часть] *разности* между y_1 и y, и, чем меньше становится h, тем больше *приближается* этот первый член *к сумме частичных разностей*, всею совокупностью которых представляется А, или ряд для Δy, и тем меньше Δy превосходит * $f'(x)h$.

Маркс не называет произведения $f'(x)h$ (или, в других обозначениях, $f'(x)\Delta x$) дифференциалом. Однако роль этого произведения как главной части приращения функции $f(x)$, когда x получает приращение h (или Δx), им, как мы видим, специально подчеркивается. Таким образом, у нас есть все основания считать, что в распоряжении Маркса было и понятие, эквивалентное понятию *дифференциала* как *главной части приращения функции* (как это было и у Эйлера, см. Приложение, Об исчислении нулей Леонарда Эйлера, стр. 577).

О ДВУХ РАЗНЫХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Обсуждение первого из четырех уравнений, приведенных выше на стр. 287, заканчивается словами (л. 50, стр. 46 по Марксу):

Wird $h = 0$, daher $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, so verschwinden alle mit h behafteten Glieder auf der zweiten Seite der Gleichung und bleibt nur $f'(x)$ als realer Wert von $\frac{dy}{dx}$.

Man muss sich erinnern, dass $\frac{0}{0} = f'(x)$ auf rein algebraischem Weg gefunden ward, ohne Anwendung des Differentialcalculus, dass, vielmehr umgekehrt aus dem algebraischen Resultat $\frac{0}{0} = f'(x)$ der symbolische Differentialausdruck $\frac{dy}{dx}$ für $\frac{0}{0}$ entwickelt ward.

Если становится $h = 0$ и поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, то на второй стороне уравнения исчезают все члены, содержащие h, и остается только $f'(x)$ как реальное значение для $\frac{dy}{dx}$.

Нужно помнить, что $\frac{0}{0} = f'(x)$ было получено чисто алгебраическим путем, без применения дифференциального исчисления, что, скорее, наоборот, из алгебраического результата $\frac{0}{0} = f'(x)$ было развито символическое дифференциальное выражение $\frac{dy}{dx}$ для $\frac{0}{0}$.

---

* Тут в смысле «отличается». Маркс сам оговаривает в ряде мест (см. стр. 193, 201, 432) употребление термина «приращение» в смысле, в котором мы теперь употребляем термин «абсолютная величина приращения».— *Ред.*

Не приходится сомневаться в том, что это не конспект, а слова самого Маркса, и притом такие, которые, как и выше, уже содержат характерное для идей, развитых им в дальнейшем, противопоставление «символическому» дифференциальному выражению его «реального» «алгебраического» значения.

Закончив обсуждение первого уравнения, Маркс переходит к следующим за ним, замечая при этом (л. 50, стр. 46 по Марксу):

Es sind nun zwei Schwierigkeiten, die bestehen, sobald wir nicht, wie es hier geschehen, die 4 algebraischen Gleichungen nebeneinander haben, sondern auf Differentialweg verfähren.	Тут имеются две трудности, которые возникают, когда мы не имеем, как это произошло здесь, этих четырех алгебраических уравнений рядом друг с другом, но получаем их путем дифференцирования.

Что именно имеется в виду под этими двумя трудностями, не вполне ясно. Следующий за этой фразой текст начинается, правда, с пункта а), но пункта b) в рукописи нет.

Из приведенного места ясно, однако, что речь идет о трудностях, возникающих при переходе от уравнений, выписанных Марксом, к уравнениям, используемым при последовательном отыскании производной $(n+1)$-го порядка $(n \geqslant 0)$ от $f(x)$ как *первой* производной от производной n-го порядка. Судя по началу пункта а), под *первой трудностью*, связанной с таким переходом,— хотя бы лишь предстоящим еще,— Маркс подразумевает вопрос о том, как может h, которое уже в связи с отысканием первой производной было подвержено (как мы сказали бы теперь) «предельному переходу по h к нулю» *, снова оказаться отличным от нуля и подвергнуться опять предельному переходу по h к нулю при отыскании второй производной и т. д. Поскольку, объяснив это, Маркс переходит к общему вопросу о том, как согласовать обычное определение производной $(n+1)$-го порядка как первой производной функции от производной n-го порядка с определением выражений $\left(\frac{0}{0}\right)^1$, $\left(\frac{0}{0}\right)^2$, $\left(\frac{0}{0}\right)^3$ и т. д. через разности, получаемые из уже готового разложения $f(x+h)$ в ряд Тейлора (см. стр. 287), то естественно думать, что под «второю трудностью» Маркс и имеет в виду вопрос о связи между двумя разными определениями производной $(n+1)$-го порядка: 1) как коэффициента при $\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}$ в разложении для $f(x+h)$ и 2) как первой производной от производной n-го порядка. В настоящей рукописи Маркс, по-видимому, считает еще, что Лагранжу удалось не только вывести второе из этих определений из первого, но и, наоборот, первое из второго, т. е. доказать их эквивалентность. В дальнейшем, как мы знаем (см. на стр. 175 п. 3) «Чисто алгебраическое дифференциальное исчисление»), Маркс не думал уже, что Лагранжу действительно удалось «чисто алгебраически» обосновать дифференциальное исчисление.

Пункт а) начинается с того, что Маркс выписывает все четыре уравнения, приведенные выше на стр. 287, еще раз в виде (л. 50, стр. 46):

$$1)\ f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{2\cdot 3}h^3f'''(x)+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}h^4f^{\mathrm{IV}}(x)+\ldots,$$

* В этой связи Маркс тоже говорит о пределе (см. ниже, стр. 300).— *Ред.*

$$2)\ f^{①}(x+h)=f'(x)+\frac{1}{2}hf''(x)+\frac{1}{2\cdot 3}h^2f'''(x)+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}h^3f^{IV}(x)+\ldots,$$

$$3)\ f^{②}(x+h)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2\cdot 3}hf'''(x)+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}h^2f^{IV}(x)+\ldots,$$

$$4)\ f^{③}(x+h)=\frac{1}{2\cdot 3}f'''(x)+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}hf^{IV}(x)+\ldots$$

(Здесь $f^{①}(x+h)$, $f^{②}(x+h)$, $f^{③}(x+h)$ употреблены в особом смысле. Они обозначают соответственно

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h^2},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^3},$$ см. стр. 287.)

Заметив, что из этих уравнений были «развиты» («haben wir entwickelt») затем последовательные значения $\left(\frac{0}{0}\right)^1$, $\left(\frac{0}{0}\right)^2$, $\left(\frac{0}{0}\right)^3$, $\left(\frac{0}{0}\right)^4$, Маркс продолжает (л. 51, стр. 47 по Марксу):

Es ist also algebraisch hier durchaus kein Grund der Verwunderung darüber, dass nachdem h *in* 1) *gleich* 0 *gesetzt*, und daher *alle Glieder*, die mit h^2, h^3 etc., in einem Wort mit höheren powers als h^1 behaftet, *verschwunden sind*, nicht nur h, sondern auch die verschwundenen Glieder in Gleichung 2) wieder erscheinen, und zwar in der Form, wie sie durch Herstellung von $\frac{dy}{dx}$ oder $\left(\frac{0}{0}\right)^1$ in Gleichung 1) modifiziert worden sind; ebenso zwischen Gleichung 2) und 3) etc.

Die 0-Setzung von h in allen 4 Gleichungen kann in jeder [der]selben nur verschiedene Resultate hervorbringen, da die $f(x)$ und also auch $f(x+h)$ sich in jeder derselben in verschiedenen Bedingungen befindet; alle 4 Gleichungen sind f [Funktionen von] $(x+h)$, aber $f(x+h)$, $f^{①}(x+h)$, $f^{②}(x+h)$, $f^{③}(x+h)$ etc. unter verschiedenen

Алгебраически, следовательно, здесь нет никаких оснований удивляться тому, что после того, как h *в* 1) *было положено равным* 0,— и поэтому *все члены*, содержащие h^2, h^3 и т. д.—одним словом, содержащие более высокие степени h, чем h^1, *исчезли*,— в уравнении 2) снова появились не только h, но и исчезнувшие члены, и притом в виде, к которому они были приведены в ходе получения $\frac{dy}{dx}$ или $\left(\frac{0}{0}\right)^1$ из уравнения 1); так же между уравнениями 2) и 3) и т. д.

Полагание h равным 0 во всех четырех уравнениях может дать в каждом из них только различные результаты, так как наша $f(x)$, а значит и $f(x+h)$, находится в каждом из них в различных условиях; все четыре уравнения выражают f [функции от] $(x+h)$, но $f(x+h)$, $f^{①}(x+h)$, $f^{②}(x+h)$, $f^{③}(x+h)$ и т. д. при различных voneinander abgeleiteten Bedingungen und daher untereinander verschiedene Funktionen.

друг из друга выведенных условиях и поэтому друг от друга отличные функции.

После этого места в рукописи (л. 51, стр. 47 по Марксу) шесть строк зачеркнуты. В них вводились обозначения для «разных y» («der verschiedenen y»): y, y', y'', y''' и т. д.— через p, q, r и т. д. и начато было рассмотрение примера $y = ax^3$. Маркс, однако, не стал этого делать и перешел, по-видимому, к рассмотрению второй трудности. Здесь он пишет (л. 51, стр. 47):

Wenn in der ersten Gleichung, die noch die Originalfunktion von x und daher auch die originale Funktion $f(x+h)$ enthält, durch die Nullsetzung von h, bloss der Koeffizient von h in der ersten Potenz, jetzt aber davon befreit, am Schluss in $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{oder } \frac{y_1-y}{x_1-x}\right)$ bleibt $= f'(x)$, der ersten abgeleiteten Funktion von x, so, weil dies die *limit* der Variation von x innerhalb der Gleichung, worin seine Originalfunktion erscheint, während die Nullsetzung von h gleichzeitig andere limits in den derivierten Gleichungen liefert oder, was dasselbe andere Werte für $\frac{0}{0}$. (*Über den Begriff der limit später* *.) Der innere Zusammenhang der verschiedenen Gleichungen, von denen jede mit dem Resultat der vorherigen beginnt, geht aus ihrem Bau, ihrer Derivation hervor und da Lagrange dies rein algebraisch zuweg gebracht, ist nichts dagegen zu wollen [111].

Когда в первом уравнении, которое содержит еще первоначальную функцию от x, а поэтому и первоначальную функцию $f(x+h)$, в результате полагания h равным нулю остается в заключение в $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{или в } \frac{y_1-y}{x_1-x}\right)$ только коэффициент при h в первой степени, теперь, однако, освобожденный от h [и] равный $f'(x)$ — первой производной функции от x, то дело в том, что это — *предел* изменения x в уравнении, в котором появляется первоначальная функция x, между тем как полагание h равным нулю дает в то же время другие пределы в производных уравнениях, или, что то же самое, другие значения $\frac{0}{0}$. (*О понятии предела ниже* *.) Внутренняя связь между различными уравнениями, каждое из которых начинается с результата предшествующего, вытекает из их строения, их выведения, и так как Лагранж выяснил это чисто алгебраически, то возражать против этого не приходится [111].

* См. сноску на стр. 298.— *Ред.*

Но если «возражать не приходится», то и вторая трудность оказывается разрешенной. Действительно, можно воспользоваться Лагранжевым доказательством того, что коэффициент при $\frac{1}{n!}h^n$ в разложении $f(x+h)$ в ряд по степеням h есть n-я производная от $f(x)$, для того чтобы получать эту производную не с помощью n-го из равенств, на левых сторонах которых стоят выражения $f^{①}(x+h)$, $f^{②}(x+h)$ и т. д., а так же, как получается первая производная из разложения $f(x+h)$,— но только теперь уже из аналогичных разложений для $f'(x+h)$, $f''(x+h)$ и т. д., где $f'(x+h)$, $f''(x+h)$ и т. д. в таком же смысле наращенные значения производных функций $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., как $f(x+h)$ — наращенное значение функции $f(x)$ (Естественно, что эти разложения уже нельзя писать одновременно, так как нужно сначала находить последовательно $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д.) Ясно, что именно это Маркс имеет в виду, когда непосредственно вслед за приведенным выше местом пишет (л. 51—52 стр. 47—48 по Марксу):

Es folgt aber umgekehrt, dass eben weil diese verschiedenen Resultate	Но отсюда следует, наоборот, что так как эти различные результаты

$$\left(\frac{0}{0}\right)^1, \quad \left(\frac{0}{0}\right)^2, \quad \left(\frac{0}{0}\right)^3, \quad \left(\frac{0}{0}\right)^4$$

aus dem Zusammenhang auseinander derivierter Gleichungen hervorgehen, wir auch anders verfahren können, nachdem dies einmal festgestellt ist *.	имеют своим источником связь между выводимыми друг за другом уравнениями, то именно поэтому мы можем поступать и иначе после того, как это уже установлено *.
⟦Statt die 4 Gleichungen z. B. für die 4 ersten Differentialkoeffizienten nebeneinander zu haben, genügt es, dass wir das Resultat der ersten haben, um die données der zweiten zu erhalten, und ebenso mit dem Resultat der zweiten, um daraus die dritte zu entwickeln, denn eben weil sie auseinander deriviert sind, muss das Resultat, was die erste liefert, die zweite liefern usf ...⟧**	⟦Вместо того, чтобы иметь, например, 4 уравнения для 4 первых дифференциальных коэффициентов одновременно, достаточно иметь результат первого, чтобы получить данные второго, и так же с результатом второго, чтобы развить из него третье, так как именно потому, что они выводятся друг за другом, результат, который дает первое, должен давать второе и т. д ...⟧**

* Здесь имеется в виду доказательство Лагранжа, выяснившее связь между коэффициентами разложения $f(x+h)$ в ряд по степеням h и последовательными производными функции $f(x)$ (см. Приложение, стр. 593).— *Ред.*

** В опущенном ниже абзаце речь идет, короче говоря, о том, что достаточно рассмотреть переход от коэффициента при h к коэффициенту при h^2, поскольку «für die mit h^3, h^4 etc. behafteten Koeffizienten versteht sich dann die Sache von selbst» («для коэффициентов при h^3, h^4 и т. д. после этого все уже само собою разумеется»). —*Ред.*

⟦$f'(x)$, die erste *abgeleitete* Funktion [in] x (im Unterschied zur Originalfunktion [in] x, i. e. $f(x)$), also der Koeffizient von h in der Originalgleichung ist der neue Ausgangspunkt. Da x eine variable Grösse ist, so muss es neuer Inkrementierung fähig sein, innerhalb neuer Grenzen. Gehen wir also von diesem Resultat $f'(x)$ aus und behandeln es zunächst als selbstständige Funktion [in] x, ohne zunächst uns zu erinnern an sein weiteres Verhältnis zu $f(x)$ und $f(x+h)$.

Wir erhalten dann:

⟦$f'(x)$, первая *производная* функция [в] x (в отличие от первоначальной функции [в] x, т. е. $f(x)$), иначе говоря, коэффициент при h в исходном уравнении, есть новый исходный пункт. Так как x — переменная величина, то она должна допускать новое приращение в новых границах. Будем же исходить из этого результата $f'(x)$ и рассматривать его сначала как самостоятельную функцию [в] x, не вспоминая сначала о его более далеком отношении к $f(x)$ и $f(x+h)$.

Мы получим тогда:

$$y = f'(x),$$

$$y_1 = f'(x+h) = f'(x) + f''(x)h + \frac{1}{2}f'''(x)h^2 + \ldots,$$

$$\Delta y \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y_1 - y = f'(x+h) - f'(x) = f''(x)h + \frac{1}{2}f'''(x)h^2 + \ldots$$

Also

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ \frac{y_1-y}{x_1-x}\right) = f''(x) + \frac{1}{2}f'''(x)h + \frac{1}{2\cdot 3}f^{\mathrm{IV}}(x)h^2 + \ldots$$

Die zweite Zeile tratt früher * auf als zweite Gleichung, erste

Вторая строка выступала ранее* как второе уравнение, пер-

* Под «ранее» тут имеются в виду те места рукописи (листы 39 и 41, стр. 35 и 37 по Марксу), которые содержат конспект § 248 курса Бушарла (стр. 171 в 5-м французском издании), где в лагранжевом доказательстве связи между коэффициентами разложения для $f(x+h)$ и последовательными производными от $f(x)$ используются уравнения:

$$\begin{array}{llll}
f(x+h) = fx + hf'x + & \text{члены в } h^2, & \text{в } h^3 & \text{и т. д.,}\\
f'(x+h) = f'x + hf''x + & \text{члены в } h^2, & \text{в } h^3 & \text{и т. д.,}\\
f''(x+h) = f''x + hf'''x + & \text{члены в } h^2, & \text{в } h^3 & \text{и т. д.}\\
\text{и т. д.} & \text{и т. д.} & & \text{и т. д.}
\end{array}$$

— *Ред.*

abgeleitete Gleichung neben der ersten.]]

вое производное уравнение рядом с первым.]]

$$\left(\frac{0}{0}\right)^2 \ \text{oder / или}\ \frac{dy}{dx} = f''(x) \ \text{oder / или}\ \left(\frac{y_1 - y}{h}\right)^*.$$

Jetzt gilt es also, dass $\left(\frac{0}{0}\right)^2$ oder $\frac{dy}{dx} = f''(x)$ zu deuten im Zusammenhang mit dem Resultat der ersten $f(x+h)$ die seinen Ausgangspunkt bildet.

Für sich betrachtet, gilt es für absolut dasselbe, was bei der ersten Funktion [in] $x+h$ galt. Der Unterschied kommt erst heraus, sobald wir es nicht isoliert betrachten, sondern zugleich als ein Resultat was wir eben erhalten haben, indem wir von dem Resultat $f'(x)$ der ersten Gleichung ausgingen.

Теперь нужно, следовательно, истолковать это $\left(\frac{0}{0}\right)^2$ или $\frac{dy}{dx} = f''(x)$ в связи с результатом первого $f(x+h)$, являющегося его исходным пунктом.

Если рассматривать его самого по себе, то для него верно абсолютно то же, что было верно для первой функции [в] $x+h$. Различие выступает, лишь когда мы его рассматриваем не изолированно, но одновременно как результат, который мы только что получили, когда исходили из результата $f'(x)$ первого уравнения.

Написав это, Маркс продолжает (л. 52, стр. 48 по Марксу):

Nehmen wir als Beispiel:

Возьмем для примера:

$$a(x+h)^m = y_1; \ \text{also / т. е.}\ f(x) = ax^m \ \text{und / и}\ y_1 = f(x+h) = a(x+h)^m.$$

На этом примере (лл. 52—63, стр. 48, 46, 44, 45—52, 52 по Марксу) — особенно удобном потому, что разложение в ряд по степени h в нем дается теоремой о биноме Ньютона, т. е. без помощи дифференциального исчисления,— Маркс подробно проверяет все сказанное им выше. Так, например, показав sub 1), что коэффициент при h (т. е. max^{m-1}) есть действительно (первая) производная от ax^m в обычном смысле (т. е. есть предел отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$), Маркс пишет далее (л. 53, стр. 46, вторая 46-я по Марксу):

max^{m-1} ist eine reine Funktion von x, worin kein h enthalten, ebensowohl wie ax^m es war.

max^{m-1} — это чистая функция от x, куда не входит никакое h, так же как это было с ax^m.

* Переход к пределу (по $h \to 0$) Маркс обозначает здесь тем, что помещает выражение, которое мы поместили бы за знаком предела, в скобки. Впоследствии он это специально оговаривает (см. стр. 503). Символы вида $\left(\frac{0}{0}\right)^1$, $\left(\frac{0}{0}\right)^2$ и т. д. здесь уже относятся просто к последовательным производным.— *Ред.*

x ist in dem einen Ausdruck wie in dem anderen dieselbe variable Grösse und ist daher in dem einen wie in dem anderen der Variation fähig. Wir hätten sub 1) daher eben sowohl max^{m-1} als Anfangspunkt, als $f(x)$ wählen können, wie wir ax^m gewählt haben.	В обоих этих выражениях x есть также переменная величина, и поэтому так же допускает варьирование во втором, как и в первом. Мы могли бы поэтому sub 1) в точности так же взять за исходный пункт max^{m-1} в качестве $f(x)$, как мы это сделали с ax^m.

После этого Маркс во всех деталях проделывает то же для отыскания второй производной, специально подчеркивая, что вторая производная от $f(x)$, рассматриваемая как первая производная от $f'(x)$, действительно оказывается при этом второй производной и в смысле Лагранжа (т. е. коэффициентом при $h^2/_2$) от $f(x)$.

В дополнение к предшествующему Маркс останавливается в этой связи еще на одном определении второй, а значит, и более высоких производных (и дифференциалов): через разности более высоких порядков.

В тех из руководств, имевшихся в распоряжении Маркса, которые известны нам, производные высших порядков не определялись через конечные разности более высоких порядков (этого не делают обычно и в современных курсах). Если это и делалось, как, например, в курсе Лакруа (S. F. Lacroix, «Traité du calcul différentiel et du calcul intégral», t. I—III, Paris, 1810—1819), то только в разделе «Конечные разности», которым Маркс вообще не занимался. (Конспекты Маркса по математическому анализу — за исключением работы Ньютона, см. выше стр. 272—280—относятся к разделу «Дифференциальное исчисление».) Если пользоваться тем определением «второй разности или $\Delta^2 y$», которое, по-видимому, принадлежит самому Марксу и которое он ввел выше (см. стр. 287), то мы получим, что $f''(x)$ есть предел отношения $\frac{2\Delta^2 y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ (тут h обозначено через Δx), между тем как у Маркса здесь (л. 57, стр. 47 по Марксу, «47»—второй раз у Маркса) $f''(x)$ есть тот самый предел отношения $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, который приводится в современных руководствах, где $\Delta^2 y$ — обыкновенная разность второго порядка. Да и выкладки Маркса, посредством которых он обосновывает это заключение, говорят о том же. Эти выкладки — если их выполнить в более удобных обозначениях (Марксово обозначение для наращенного значения производной y' неудобно потому, что $'$ был принят для обозначения производной) — выглядят так.

Пусть имеем обозначения (знак $\rightleftarrows$ читается: обозначает):

$$\begin{array}{l|l|l}
y \rightleftarrows f(x), & \Delta y \rightleftarrows y_1 - y, & \Delta^2 y \rightleftarrows \Delta y_1 - \Delta y \\
y_1 \rightleftarrows f(x+h), & \Delta y_1 \rightleftarrows y_2 - y_1 & \text{пусть } \Delta x = h \text{ — постоянная.} \\
y_2 \rightleftarrows f(x+2h) & &
\end{array}$$

И пусть

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}. \tag{1}$$

Заменим производную $f'(x)$ ее приближенным («допредельным») значением: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{y_1-y}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда $f'(x+h)$ заменится аналогично на $\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}=\frac{y_2-y_1}{h}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ и отношение $\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ на

$$\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y_1-\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta^2 y}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2},$$

откуда Маркс и делает заключение (см. (1)):

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}{}^{*}.$$

Естественно думать поэтому, что Маркс пользовался здесь — не в форме выписки, а в собственном изложении — каким-нибудь еще не обнаруженным нами источником, где дифференциальное исчисление излагалось в более тесной связи с исчислением конечных разностей (как это было, например, у Эйлера, «Дифференциальное исчисление» которого даже начинается с главы «О конечных разностях»; см. Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, auctore Leonhardo Eulero, impensis Academiae imperialis scientiarum, Petropolitanae, 1755 (Леонард Эйлер, Дифференциальное исчисление и его применение к анализу конечных и к учению о рядах, Издание Императорской Академии Наук, Петербург, 1755), (имеется русский перевод: Л. Эйлер, «Дифференциальное исчисление», Москва — Ленинград, 1949), гл. I. Правда, с книгой Эйлера Маркс, по-видимому, не успел познакомиться, хотя и собирался, очевидно, сделать это.

Проделав далее (лл. 57—58, стр. 47—48 по Марксу) то же самое (за исключением определения в конечных разностях), что было сделано для второй производной, для производных третьего и четвертого порядков, Маркс еще более конкретизирует свой пример, полагая $m=3$ в полученных им формулах. Именно, он пишет (л. 59, стр. 49):

Setzen wir statt des unbestimmten Exponenten oder Index m z. B. 3, so erhalten wir [...].	Если вместо неопределенного показателя степени или индекса m мы подставим, например, 3, то мы получим [...].

На этом примере Маркс уже может выполнить все выкладки до конца (до получения четвертой производной, равной нулю), что он и делает (лл. 59—63, стр. 49—52, 52 еще раз), сначала выписывая полученные ранее формулы в общем виде (через m), а затем полагая в них $m=3$. При этом Маркс специально подчеркивает три обстоятельства:

1) Что хотя исходная функция и все ее производные — это разные функции (л. 62, стр. 52),

aber in der Originalfunktion alle terms enthalten, die später	но в исходной функции заключены все члены, которые позднее

* В современных курсах математического анализа (см., например, Ф. Франклин, «Математический анализ», ч. 1, Москва, ИЛ, 1950, § 93. Конечные разности, стр. 150—160) это доказывается в более общем виде и более строго (хотя и не конструктивно). — *Ред.*

sich selbständig entwickeln, differenzieren, so dass im Keim die Originalfunktion schon die abgeleiteten enthält.

самостоятельно развиваются, дифференцируются, так что в зародыше исходная функция уже содержит эти производные.

2) Что последовательные производные — это не просто коэффициенты при h, h^2, h^3, ... в разложении для $f(x+h)$, а отличаются от коэффициента при h^n множителем $\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}$ (л. 62, стр. 52 у Маркса).

3) Что при получении коэффициентов разложения для $f(x+h)$ (если такового еще не имеется у нас) путем последовательного дифференцирования уже полученных членов разложения нужно помнить, что h рассматривается как постоянная (л. 63, стр. 52, вторая 52-я стр. у Маркса).

Иными словами, Маркс предупреждает о том, что с невниманием к точным формулировкам теоремы о связи между производными функциями от $f(x)$ и коэффициентами разложения $f(x+h)$ в ряд по степеням h могут быть связаны затрудняющие понимание ошибки вычисления.

Следующие за этим листы 64—68 (стр. 53—57 по Марксу) перечеркнуты карандашом. Они содержат следующие выписки:

Выписки о методе Лагранжа из книги Boucharlat, стр. 168—171 (в 5-м изд.), выписки о теореме Тейлора из книги Hind, стр. 83—85.

Листы 69—77, стр. 58—66 по Марксу, уже не перечеркнуты им. Поскольку, однако, они содержат только выписки из книги Хайнда, мы ограничимся здесь указанием соответствующих страниц книги и заголовков, под которыми эти выписки приводятся Марксом.

Лл. 68—71 (стр. 57—60 по Марксу). Выписки из книги Hind, стр. 86—92, озаглавленные Марксом: **«A. Finding certain limits of Taylor's theorem in its application» («A. Об отыскании некоторых оценок для теоремы Тейлора в ее приложении»)** [112].

Лл. 71—73 (стр. 60—62 по Марксу). Выписки из книги Hind, стр. 96—98, озаглавленные Марксом: **«B. Furhter manipulations with Taylor's theorem» («B. Дальнейшие манипуляции с теоремой Тейлора»).**

Лл. 73—77 (стр. 62—66 по Марксу). Выписки из книги Hind, стр. 92—96 под заголовком Маркса: **«C. Failure of Taylor's theorem» («C. Неприменимость теоремы Тейлора»).**

Листы 78 и 79 (верхняя часть) (стр. 67—68 по Марксу) содержат его собственную заметку, специально выделенную им на стр. 67 (л. 78) чертой вида Ɛ слева. Эта заметка приводится ниже. Заголовок наш.

О КАЧЕСТВЕННОМ РАЗЛИЧИИ ВЫРАЖЕНИЙ ВИДА $\frac{0}{0}$ В АЛГЕБРЕ И $\frac{dy}{dx}$ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Das $\frac{0}{0}$, sei es $\left(\frac{0}{0}\right)_1$, $\left(\frac{0}{0}\right)_2$ etc., d.h. das $\left(\frac{0}{0}\right)$, wie wir es bei [der] ersten Differentiation erhalten, und die $\left(\frac{0}{0}\right)_1$, etc.,

$\frac{0}{0}$, будет ли это $\left(\frac{0}{0}\right)_1$, $\left(\frac{0}{0}\right)_2$, и т. д., т. е. то $\left(\frac{0}{0}\right)$, которое мы получаем при первом дифференцировании, и те $\left(\frac{0}{0}\right)$, wie sie als Resultate sukzessiver Differentiation erscheinen, ist dort wo x als independent variable und y als dependent variable figuriert, wo es also entspringt aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, reduziert auf $\frac{dy}{dx}$, *qualitativ* verschieden von dem $\frac{0}{0}$, wie wir es erhalten, wo x eine konstante Grösse, wie in der gewöhnlichen Algebra.

Z. B. wenn wir haben $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ — so dies auch schreibbar $=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$; wird $x=a$ gesetzt, so $x^2-a^2=a^2-a^2$ und $x-a=a-a$; $\therefore \frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{0}{0}$; aber es wird nicht $\frac{0}{0}$, weil der Nenner $=0$, sondern Zähler und Nenner werden gleichzeitig 0, sobald wir statt x und x^2 ihre Werte a und a^2 hineinsetzen[113]...

Dagegen in

и т. д., которые появляются в результате последовательного дифференцирования, является там, где x выступает как независимая переменная, а y как зависимая переменная, где оно, следовательно, возникает из $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, приведенного к $\frac{dy}{dx}$, *качественно* отличным от $\frac{0}{0}$, которое мы получаем там, где x — постоянная величина, как в обычной алгебре.

Например, если мы имеем $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, то для последнего можно написать также $=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$; если мы положим $x=a$, то $x^2-a^2=a^2-a^2$ и $x-a=a-a$; $\therefore \frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{0}{0}$; но оно не потому обращается в $\frac{0}{0}$, что знаменатель $=0$, а потому, что числитель и знаменатель одновременно обращаются в 0, когда подставляем вместо x и x^2 их значения a и a^2 [113]...

Между тем в

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

ist der Wert des Zählers bestimmt und abhängig von dem des Nenners. Ich kann zwar sagen: wenn h im Zähler gleich 0 wird, wird

значение числителя определяется значением знаменателя и зависит от него. Я могу сказать, правда: если h в числителе становится равным нулю, то

$$f(x+h)-f(x)=f(x)-f(x),$$

daher $=0$; aber ich kann nur $h=0$ setzen, heisst hier, wenn $x_1-x=h=0$, also wenn $x_1-x=$ $=x-x=0$ wird.

и поэтому $=0$; но положить $h=0$ я могу здесь, только если $x_1-x=h=0$, т. е. если x_1-x становится $=x-x=0$.

Der Zähler wechselt seine Grösse nur, wenn der Nenner sie wechselt [114]...

Dagegen in $f(x+h)-f(x)$ kann ich h nicht $=0$ setzen, ohne dass vorher $x_1-x=0$ geworden oder $x_1=x$.

Dies qualitative Verhältnis zwischen dx und dy existiert daher nicht da, wo der Zähler nicht Funktion einer Variablen x, sondern wo x im Zähler und Nenner dieselbe Konstante, wenn auch eine unbekannte und noch nicht bestimmte, aber stets *konstante* Grösse.

Ferner $\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=$ $=x+a$. Und wenn $x=a$, daher $\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a$.

Dies $2a$ ist nicht die Grenze von $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ im selben Sinn wie bei $\frac{dy}{dx}=m$, f. i. $2a$ ist, einfach durch Division erhalten, der aktuelle Wert des Bruches $\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Es ist nur in dem Sinn Grenze, als der aktuelle [Wert] irgendeiner Verhältniszahl ihre Grenze ist.

So $\frac{6}{3}=2$. $\frac{6}{3}$ weder $>$ noch $<$ $<$ als 2, und in diesem Sinn drückt jede Gleichung eine Grenze aus [115] und ist sogar für jede konstante Quantität, wie 3 etc., ihre Grenze zusammenfallend mit ihrem Dasein. 3 ist weder 2 noch 4 noch ein Bruch zwischen 2 und 4, sondern $=2+1$ oder $4-1$.

Числитель изменяет свою величину, только если ее изменяет знаменатель [114]...

Напротив, в $f(x+h)-f(x)$ я не могу положить $h=0$, не положив предварительно $x_1-x=0$ или $x_1=x$.

Это качественное соотношение между dx и dy не существует поэтому там, где числитель не является функцией переменной x, но где x в числителе и знаменателе — одна и та же постоянная, хотя и неизвестная и еще не определенная, но всегда *постоянная* величина.

Далее, $\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=$ $=x+a$. И когда $x=a$, то поэтому $\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a$.

Это $2a$ не является пределом для $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ в том же смысле, как, например, в $\frac{dy}{dx}=m$; $2a$ получено просто делением, как действительно найденное значение дроби $\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Оно лишь в том смысле предел, в каком действительно найденное значение какого-нибудь численного отношения является его пределом.

Так, $\frac{6}{3}=2$. $\frac{6}{3}$ не больше и не меньше, чем 2, и в этом смысле каждое равенство выражает некоторый предел [115] и даже для каждого постоянного количества, как 3 и т. д., предел его совпадает с его бытием. 3 не есть ни 2, ни 4, ни какая-нибудь дробь между 2 и 4, но равно $2+1$, или $4-1$.

$\frac{1}{3}$ für sich seine eigene Grenze. Drücke ich es in Reihe aus: so

$\frac{1}{3}$ сама по себе — ее собственный предел. Если я выражу это в виде ряда, то

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline -\,10 & 0{,}33 \\ 9 & \\ \hline 10 & \end{array}, \quad \begin{array}{c}\text{so}\\ \text{то}\end{array} \quad \frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10\,000}+\ldots$$

In diesem Fall wird $\frac{1}{3}$ die Grenze seiner unbegrenzten Reihe.

В этом случае $\frac{1}{3}$ становится пределом ее бесконечного ряда.

Последние два листа 79—80 (стр. 68—69) опять перечеркнуты Марксом. Они озаглавлены им:

Fortsetzung von anderem Heft (III, folgend auf Kaufmann II) (letzte Seite).

Продолжение другой тетради (III, следующая за Кауфман II) (последняя страница).

Об этих страницах речь уже шла выше (см. стр. 267). В дополнение к сказанному там заметим только, что Маркс здесь ставит ряд вопросов, относящихся к исходным допущениям Лагранжа. Почему, предположив $f(x+h)$ равным $f(x) + Ph$, Лагранж должен предположить P функцией не только от x, но и от h, в свою очередь представимой в виде $P = p + Qh$, где p — функция только от x, а Q — снова от обоих: x и h? Почему аналогичное должно быть верно и для Q и т. д., т. е. ряд у Лагранжа должен быть бесконечным (неограниченно продолжаемым)? И то же должно иметь место для рядов, представляющих $f'(x+h)$, $f''(x+h)$ и т. д.?

Ответ, который дает здесь Маркс на эти вопросы, состоит в том, что теорема Лагранжа носит общий характер, т. е. должна быть применима *не только* к таким функциям $f(x)$, для которых $f(x+h)$ есть многочлен какой-нибудь определенной степени относительно h; в частности, она должна быть применима и к $f'(x+h)$ и т. д., в силу чего и ряд у Лагранжа оказывается (в общем случае) неограниченно продолжаемым («бесконечным»).

Эта заметка (хотя она и перечеркнута Марксом) заведомо принадлежит самому Марксу. Она не является ни выпиской из какого-нибудь источника, ни даже конспектом, хотя и связана с желанием разобраться в туманных идеях Лагранжа, состоящих в противопоставлении «общего случая» произвольной функции какой-нибудь индивидуальной, «частной» функции. Естественно поэтому было бы привести здесь ее текст. Поскольку, однако, ее начало находится в другой тетради (рукопись 3888), а без этого начала (и того, что предшествует ему) текст продолжения непонятен, то он будет приведен при описании рукописи 3888.

Последний, 81-й лист рукописи 2763 содержит только заголовок: «**Fortsetzung vom ersten inneren Deckel (mit Rücksicht auf Figur 1)**» («**Продолжение первой внутренней обложки (относительно фигуры 1)**»), который находится, очевидно, на второй внутренней обложке тетради. Рукопись 2763 этим заканчивается.

ТЕТРАДЬ С КОНСПЕКТАМИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ПО КНИГАМ ЛАКРУА, БУШАРЛА, ХАЙНДА И ХОЛЛА

Ед. хр. 3888

Тетрадь, названная Марксом: **«III (folgt auf d. Kaufmann, II)»** (**«III (следует за Кауфман II)»**), лл. 1—87. Язык немецкий, местами французский или английский. Так как тетрадь «Кауфман II» (рукопись 3881) начата в марте 1878 г., эта рукопись не может датироваться ранее чем 1878 г. Непосредственно под названием тетради (на ее внутренней обложке, очевидно) выдержка из книги Феллера и Одермана, которая гласит (л. 2):

Sieh p. 185 das Buch «*Kaufmännische Arithmetik*», wo es heisst: «Um jedoch den reinen Gewinn oder den reinen Verlust auf ein Geschäft zu berechnen, muss man auch die *Zinsen* für das *Anlagekapital* (er meint *ausgelegte Kapital* in Waren etc.) *auf die Zeit in Anschlag bringen*, *in welcher dasselbe nicht benutzt werden kann*».

См. стр. 185 книги «*Коммерческая арифметика*», где говорится: «Чтобы, однако, подсчитать чистую прибыль или чистый убыток предприятия, нужно учесть также *проценты* на *инвестированный капитал* (он имеет в виду *капитал*, *вложенный* в товары и т. д.) *за время*, *в течение которого последний не может быть использован*».

Слова в скобках надписаны Марксом над словами: **«Anlagekapital auf die Zeit»**, их в книге нет. Еще одно, небольшое отличие состоит в том, что Маркс написал просто **«zu berechnen»** («подсчитать») вместо имеющихся в книге «berechnen zu können» («иметь возможность подсчитать»).

На листах 3—31 (верх) (в нумерации Маркса: 1—22, 22а, 23, 23а, 24—27) за этим следуют выписки из неизвестного нам источника: о валюте разных стран, способах чеканки монет, взвешивании слитков и т. п. К чему относится приведенная выше выдержка, пока неясно.

Вслед за этим под заголовком: **«Zwischenschub»** (**«Вставка»**) на листах 31—36 (стр. 27—32 в нумерации Маркса) помещен конспект двух разделов из учебника Feller u. Odermann:

«A) Gesellschaftsrechnung» (**«А. Правило товарищества»**), стр. 144—151 учебника, лл. 31—35 рукописи. Это правило пропорционального деления —«простого», которое может быть «прямым» (прямо пропорционально) и «обратным» (обратно пропорционально), и «сложного» (осложненного какими-нибудь дополнительными условиями на задаваемые отношения).

Конспект состоит в основном из решения задач и почти не содержит пояснительного текста учебника. Последняя задача из решаемых в нем (для иллюстрации «сложного» правила товарищества) гласит: «4 мельницы должны размолоть за одно и то же время 2000 четвериков зерна. Как нужно распределить между ними это зерно, если мельница A перемалывает за 4 часа 15 четвериков, B за 3 часа 16 четвериков, C за 3 часа 10 четвериков и D за 2 часа 9 четвериков?» (Feller u. Odermann, стр. 150.) Оба решения этой задачи, состоящие в сведе́нии ее к простым — прямому и обратному — правилам товарищества, Маркс приводит в своем конспекте. (Первое сведе́ние осуществляется с помощью ответа на вопрос: «Сколько зерна перемалывает каждая из мельниц за один час?» Второе — путем ответа на вопрос: «Сколько часов нужно каждой из мельниц, чтобы перемолоть один четверик зерна?»)

«B) Alligationsrechnung» («B. Правило смеси»), т. е. способы решения задач на вычисление: 1) среднего значения (единицы смеси по «весам» компонентов и их количествам), 2) цифрового соотношения между количествами компонентов данных «весов», нужного для получения смеси требуемого «веса». Из этого раздела Маркс конспектирует (лл. 35—36, стр. 31—32 в нумерации Маркса) только часть, относящуюся к задачам первого рода (стр. 153—154 книги). Особое внимание Маркса привлекает здесь задача, в которой приводятся данные о потреблении чая в Англии в 1842—1846 гг.: количество фунтов чая и цена (средняя) одного фунта в каждом году,— и требуется вычислить соответствующие средние (количество и цену) за 1 год. В связи с этой задачей Маркс не только приводит всю таблицу данных и результатов, имеющуюся в учебнике, но и пишет (в квадратных скобках) большое примечание, в котором анализирует динамику процесса: ход изменения данных за 5 лет в абсолютных цифрах и в процентах, которые все вычисляет. На следующих за этим листах (нижняя часть л. 36, лл. 37—39; стр. 32—35 в нумерации Маркса) находятся заметки об обращении капитала, по содержанию относящиеся ко 2-й части II тома «Капитала».

Собственно математическая часть рукописи начинается с л. 40 (стр. 36 в нумерации Маркса) и продолжается до конца тетради (л. 87; в нумерации Маркса стр. 36—63, 66—73, 76—86, последняя страница без номера — на фотокопии). Почти весь текст рукописи перечеркнут карандашом. Рукопись можно подразделить на следующие части, содержание которых кратко описывается тут же. Небольшие собственные замечания Маркса приводятся в ходе описания. Более крупные выделены особо и приводятся ниже. Из текста описания ясно, однако, к чему они относятся. Некоторые дополнительные указания предшествуют тексту этих замечаний Маркса.

I. Лл. 40—41 (стр. 36—37 у Маркса). Выписки из введения к большому «Трактату» Лакруа, которые Маркс начинает с точного указания источника, что он делает только по отношению к авторам, имя которых уже само по себе имеет значение. В этой рукописи он называет еще и Бушарла и Хайнда (см. ниже), но чаще всего только для критики и без указаний источника. Эта часть рукописи начинается с новой страницы (л. 40, стр. 36 у Маркса) так:

Lacroix: «*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*», *t.* I, 1810.	*Лакруа*: «*Трактат по дифференциальному и интегральному исчислению*», *т.* I, 1810.
Introduction.	*Введение.*

Конспект состоит из следующих шести пунктов, соответствующих пунктам 1—5, 10—11 у Лакруа, стр. 1—7, 13—14, но значительно более кратко передающих их содержание. Поскольку в этом конспекте идет речь об основных понятиях «функции» и «предела», мы опишем его подробнее, чем другие части рукописи. Нумерация пунктов дается по Марксу.

1) Этот пункт озаглавлен Марксом так: **«Fonction: 1)»** (**«Функция: 1)»**). Он содержит только приводимую Марксом в кавычках цитату из Лакруа: определение функции как зависимости (в точном немецком переводе).

2) Второй пункт начинается словами, также являющимися переводом текста из Лакруа (стр. 2) (но тут уже не полностью и без кавычек) (л. 40):

Die Betrachtung der *équations indéterminées* hat zur Generalisation des Begriffs der Funktionen geführt. Wollte man ausdrücken, dass eine Quantität nicht assignierbar, ohne *vorher bestimmte Werte* anderen Quantitäten zu geben, die pouvaient en recevoir un nombre infini dans une même question, so bediente man sich des Wortes «Funktion», um diese Abhängigkeit zu bezeichnen.

Рассмотрение *неопределенных уравнений* привело к обобщению понятия функций. Если хотели выразить, что какое-нибудь количество нельзя указать, не придав *ранее определенных значений* другим количествам, которые могли получить бесконечное число таковых в одном и том же вопросе, то пользовались словом «функция» для обозначения этой зависимости.

Этот пункт более подробно конспектируется Марксом: тут и все примеры, приводимые Лакруа, и определение *явной* и *неявной* функций, и определение *алгебраических функций*, и замечание (стр. 3 у Лакруа), которое гласит (л. 40):

Es ist nicht *Gleichung* nötig zwischen mehren Quantitäten, damit eine von ihnen fonction implicite der andern; genügt, dass ihr Wert von deren Werten abhängt; z. B. im Kreis *sinus* fonction implicite vom *Bogen* — obgleich keine algebraische Gleichung dies ausdrücken kann,— weil eine von beiden bestimmt, wenn andre bestimmt, und umgekehrt.

Не требуется *уравнения* между несколькими количествами для того, чтобы одно из них было неявной функцией остальных; достаточно, чтобы его значение зависело от их значений; например, в круге *синус* — неявная функция от *дуги* — хотя никакое алгебраическое уравнение не может выразить этого,— потому что одна из обеих (величин) определена, когда определена другая, и наоборот.

3) Бесконечные ряды и трансцендентные функции (как невыразимые конечным числом алгебраических членов) (Лакруа, стр. 3—4), л. 40.

4) Сходимость и расходимость рядов (Лакруа, стр. 4—5), л. 40.

Série gibt nicht immer den *Wert der Funktion*, zu der sie

Ряд не всегда дает *значение функции*, которой он принадле-

gehört; oft entfernt sie sich davon, je mehr termes man nimmt.	жит; часто он удаляется от него с увеличением числа членов.

Пример: геометрическая прогрессия $\left(\text{ряд для } \frac{a}{a-x}\right)$.

5) Чтобы можно было пользоваться разложением в ряд, достаточно знать «*das Gesetz*, *wonach sich seine termes bilden*» («*закон*, *по которому образуются его члены*») (Лакруа, стр. 5), л. 41. Но если речь идет о вычислении приближенного значения разлагаемой в ряд функции, то нужно тщательно проверять сходимость ряда.

И дальше там же:

...und man kann nur ganz auf diese *déterminations* zählen, wenn man imstande *d'assigner les limites de la différence*, qui se peut trouver entre elles et la vraie valeur.	...и можно полностью полагаться на эти *вычисления*, только если мы в состоянии *указать границы разности*, которая может иметь место между ними и истинным значением.

Неограниченное уменьшение «членов» ряда как необходимый признак его сходимости. (И у Лакруа речь идет о «членах» ряда, а не об их абсолютных величинах, хотя в следующем за этим примере — который уже не конспектируется Марксом — Лакруа предлагает «отвлечься от знака» таких-то чисел.)

6) Опустив все примеры, которые приводит (и обсуждает) Лакруа, Маркс переходит к пунктам 10—11 у Лакруа (стр. 13—14) и конспектирует их кратко под заголовком: «**Limite**» (**«Предел»**), л. 41. Понятие предела вводится здесь (п. 10) на примере отыскания предела дроби $\frac{ax}{x+a}$ при $x \to \infty$. Вычисляется разность между этой дробью и a, после чего Маркс записывает (л. 41):

Diese Differenz $\frac{a^2}{x+a}$ wird um so kleiner, je grösser x; [sie] kann kleiner gemacht werden, als jede gegebne Grösse; die fraction proposée kann also so nah zu a gebracht werden, wie man will; a also die *limite* der Funktion $\frac{ax}{x+a}$, relativement à l'augmentation indéfinie que peut recevoir x.	Эта разность $\frac{a^2}{x+a}$ становится тем меньше, чем больше x; [она] может быть сделана меньше любой данной величины; предложенную дробь можно, следовательно, сколь угодно приблизить к a, т. е. a — *предел* функции $\frac{ax}{x+a}$ по отношению к неограниченному увеличению x.

(Общего определения предела в «Трактате» Лакруа нет. О понятии предела у Лакруа см. Приложение, стр. 571—572.)

Из пункта 11 Маркс выписывает места, где говорится о том, что если свести отношение $ax : (ax+x^2)$ к его «простейшему выражению» $\frac{a}{a+x}$, то окажется, что оно не только все больше и больше приближается к единице по мере уменьшения x, но и в точности обращается в 1, когда $x = 0$, и где ставится вопрос, который Маркс излагает так:

Aber können ax, $ax + x^2$ — nachdem sie 0 geworden — noch bestimmtes Verhältnis haben?	Но могут ли ax, $ax + x^2$ — после того как они обратились в 0 — еще иметь определенное отношение?

Маркс выписывает и ответ на этот вопрос, который состоит в том, что «отношение $\frac{a}{a+x}$ количеств ax и $ax+x^2$ может не только достигнуть единицы, когда мы в нем положим $x=0$, но и превзойти ее, когда мы предположим x отрицательным» (Лакруа, стр. 14).

На этом конспект «Введения» в «Трактат» Лакруа заканчивается Марксом.

II. Лл. 42—66 (стр. 38—62 в нумерации Маркса). Выписки из английского перевода (1828 г.) третьего французского издания курса Бушарла, пп. 3—72, стр. 2—45. Эта часть рукописи содержит ряд собственных замечаний Маркса, текст которых приводится ниже, и подразделена им на следующие 20 пунктов. (Заголовки пунктов, имеющиеся в рукописи, приводятся в кавычках. В скобках указываются номера пунктов и страниц в английском издании курса Бушарла. В заключение даются номера листов рукописи.)

1) Производная и дифференциал от функции $y = x^3$ (пп. 3—4, стр. 2—4). Критическое замечание в адрес Бушарла см. стр. 323—325.

2) **«The differential of x = [ist gleich] dx»** (**«Дифференциал от x = [равен] dx»**) (пп. 9—10, стр. 5—6). За этим заголовком слова: **«proved in the following *strange* way»** (**«доказывается следующим *странным* образом»**). Л. 42. (См. Приложение, стр. 590),

3) Способ нахождения производной как предела отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (при «$h=0$») через разложение $f(x+h)$ в ряд по степеням h (п. 13, стр. 7). Л. 42.

4) Применение этого способа к дифференцированию произведения двух и большего числа функций (п. 14, стр. 8). Лл. 42—43.

5) Дифференцирование частного $\frac{z}{y}$ (п. 16, стр. 9). Л. 43.

6) Производная от степени x^m (через равенство

$$\frac{d\cdot(xyztu\ldots)}{xyztu\ldots}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}+\frac{du}{u}+\ldots$$

и полагание в нем $x = y = z = t = u = \ldots$, а всего их m). Распространение на дробные и отрицательные степени. Другой способ дифференцирования степени (через разложение $(x+h)^m$ по формуле бинома Ньютона) (пп. 17, 19, 20, стр. 9—12). Лл. 43—44 (верх).

7) **«On the principle of the Method of indeterminate coefficients»** (**«Об обосновании метода неопределенных коэффициентов»**) («Третье примечание» к английскому изданию курса Бушарла, стр. 364—365). Л. 44.

8) Дифференцирование сложной функции (пп. 26—29, стр. 14—17). Лл. 44—45.

9) **«Sukzessive differentiation»** (**«Последовательное дифференцирование»**) (п. 30, стр. 17—18). Лл. 45—46 (верх).

10) **«Maclaurin's theorem» («Теорема Маклорена»)** (пп. 31—33, стр. 18—21). Лл. 46—47.

11) Определение «трансцендентных количеств» (п. 35, стр. 22). Весь текст этого пункта в английском переводе курса Бушарла состоит из слов: **«Transcendental quantities** [are] **such as are affected by variable indices, logarithms, sines, cosines, etc.» («Трансцендентные количества**—[это] **такие как** [количества] **с переменными показателями степени, логарифмы, синусы, косинусы и т. д.»)**, которые Маркс приводит полностью (за исключением взятого нами в скобки слова «are») и подчеркивает. Л. 48.

12) **«To differentiate a^x» («Дифференцирование a^x»)** (пп. 36—37, стр. 21—24). Лл. 48—49.

13) Дифференцирование логарифма (п. 38, стр. 24). Лл. 49—50.

14) **«The arc is greater than the sine, and less than the tangent» («Дуга больше, чем синус, и меньше, чем тангенс»)** (пп. 39—40, стр. 24—25). Это — первые слова пункта 39. В пункте 40 идет речь о пределе отношения $\frac{\sin x}{x}$ (при «$x=0$»). Л. 50. (См. Приложение, стр. 571.)

15) **«Differential of the sine, whose are is x» («Дифференциал синуса дуги x»)** (пп. 41—43, стр. 25—27). Лл. 50—51.

16) **«Differential of $\cos x$» («Дифференциал от $\cos x$»)** (п. 44, стр. 27). **«Differential of $\tan x$» («Дифференциал от $\operatorname{tg} x$»)** (п. 45, стр. 27—28). **«Differential of $\cot x$ und $\sec x$» («Дифференциалы от $\operatorname{ctg} x$ и $\sec x$»)** (пп. 46—47, стр. 28). **«Differential of the cosecant x» («Дифференциал от $\operatorname{cosec} x$»)** (п. 48, стр. 28). **«Differential of versinus» («Дифференциал от versinus»)** (п. 49, стр. 28). Лл. 51—52.

17) Сводка формул для дифференциалов тригонометрических функций (составлена Марксом). Л. 52.

18) **«Taylor's theorem» («Теорема Тейлора»)** (пп. 52—60, стр. 30—35). Содержит два больших замечания Маркса: а) о лемме Бушарла см. стр. 325), b) Сравнение теорем Тейлора и Маклорена (см. стр. 326). Лл. 53—57.

19) **«On the differentiation of equations of 2 variables» («О дифференцировании уравнений от 2 переменных»)** (пп. 61—68, стр. 35—41). Здесь идет речь о дифференцировании неявной функции (в том числе и последовательном) и о полном дифференциале. Лл. 57—62.

Вслед за этим в рукописи (на листе 62) три вставки под заголовками: **«7a) ad p. 40, after 7, also 7a» («7a к стр. 40, после 7, следовательно, 7a»)**, **«7b и «7c**. Здесь конспектируются опущенные Марксом ранее пп. 22—23, 25, стр. 12—13, относящиеся: 7a) к дифференцированию суммы, 7b) к роли постоянной как множителя (при дифференцировании), 7c) то же для постоянной как слагаемого. Особое внимание Маркс здесь обращает на общее замечание Бушарла, которое он передает (в основном уже по-немецки) так:

Die *Methode für den Prozess der Differentiation*, *erst die value von y_1 zu finden* und dann daraus zu entwickeln $\frac{y_1-y}{h}$, then passing to the limit by making $h=0$, sehr *weitläufig*, wenn es sich darum handelt zu differen-	*Метод для процесса дифференцирования*, состоящий в том, чтобы *найти сначала значение* y_1, а затем отсюда получить $\frac{y_1-y}{h}$ и перейти к пределу, полагая $h=0$, очень *громоздок*, когда речь идет о дифференцировании

zieren *a quantity which contains several terms. Können wir aber jeden term für sich differenzieren*, so einfachere Prozedur möglich, in folge des Theorems: *das Differential of a sum of functions ist gleich the sum of the differentials of those functions.*

количества, содержащего несколько членов. Если мы, однако, умеем дифференцировать каждый член в отдельности, то возможна более простая процедура в силу теоремы: *дифференциал суммы функций равен сумме дифференциалов этих функций.*

(Доказательство теоремы — оно имеется в конспекте — дается у Бушарла с помощью разложения значений слагаемых в «точке» $x+h$ в ряды по степеням h.)

20) **«Method of tangents (i. e. differential expressions of tangents, subtangents, normals, and subnormals of curves)» («Метод касательных, т. е. дифференциальные выражения для касательных, подкасательных, нормалей и поднормалей кривых»)** (пп. 69—72, стр. 41—45), с критическим замечанием Маркса (см. стр. 330). Лл. 63—66 (верх).

Следующие за этими разделы, посвященные другим задачам дифференциальной геометрии, способам «раскрытия» неопределенностей, задачам на максимум и минимум, а также различным методам обоснования дифференциального исчисления, здесь еще не конспектируются Марксом.

III. Лл. 66—75 (стр. 62—63, 66—73 в нумерации Маркса, «66» по ошибке вместо «64»). Выписки из гл. V курса Хайнда: раздел «III. Development of functions, etc.» («III. Разложение функций, и т. д.»), пп. 69—82, стр. 68—98, с некоторыми пропусками. Выписки относятся к теоремам Маклорена и Тейлора и идут в следующем порядке (нумерация в квадратных скобках наша):

[1] Л. 66 (стр. 62 у Маркса). Формула Маклорена, по поводу которой Маркс пишет:

Putting u statt y the *formula of Mac Laurin*:

Подставляя u вместо y, [получаем] *формулу Маклорена*:

$$u=(u)+\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{x}{1}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1\cdot 2}+\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

Hind puts for this

Хайнд пишет вместо этого

$$u=u_0+u_1\frac{x}{1}+u_2\frac{x^2}{1\cdot 2}+u_3\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

⟦wo die absurden u_1, u_2 etc. statt u', u'', u''' zu Verwechslung Anlass geben können, weil diese Zeichen ganz andre Bedeutung in der Rechnung mit endlichen Differenzen⟧.

⟦где абсурдные u_1, u_2 и т. д. вместо u', u'', u''' могут дать повод к недоразумениям, так как эти знаки имеют совсем другой смысл при оперировании с конечными разностями⟧.

Er bemerkt d'abord, dass $u = f(x)$ nur entwickelt werden

Он замечает сначала, что $u = f(x)$ можно разлагать по kann, vermittels der Formel von Mac Laurin, wenn *u represents a function of x, which can be expressed in ascending and integral powers of x*.

формуле Маклорена, только если *и представляет функцию от x, которая может быть выражена по возрастающим и целым степеням x*.

Подчеркнутые Марксом слова существенны для понимания дальнейшего текста рукописей.

[2] Лл. 67—68, стр. 63, 66 у Маркса. Примеры неприменимости формулы Маклорена ($u=\sqrt{2x-1}$, $\log x$). Способы получения разложения в некоторых случаях неприменимости теоремы Маклорена с помощью представления функции u в виде $u=x^k v$, где v—функция от x, разложимая по теореме Маклорена. Примеры: 1) $u=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$, $k={}^1/_2$, $v=\sqrt{1-x}$; 2) n—неявная функция, задаваемая уравнением $au^3-ux^3-ax^3=0$, $k=1$, v—функция, определяемая уравнением $av^3-xv-a=0$ (Hind, п. 69, пример 9; пп. 70—71, Cor. * 1-2; примеры 1—2, стр. 74—76).

[3] Л. 69, стр. 67 у Маркса. Получение разложения в степенной ряд без помощи теоремы Маклорена: дифференцированием ряда с неопределенными коэффициентами. Пример 1— разложение функции a^x «методом неопределенных коэффициентов» (Hind, п. 72, Cor. 3, стр. 76—77, остальные 4 примера этого пункта Маркс не выписывает).

Подстановка $x={}^1/_2$ для получения разложения по убывающим степеням x (там же, второй раз п. 72. Cor. 4, стр. 81—82).

[4] Лл. 69 (внизу) — 70, стр. 67—68 у Маркса. Формулировка теоремы Тейлора в курсе Хайнда.

Маркс начинает этот раздел словами (л. 69, внизу):

Hind drückt *das Theorem von Taylor* so aus:

Хайнд выражает *теорему Тейлора* так:

Таким образом ясно, что Маркс не приписывает эту формулировку самому Тейлору, хотя в дальнейшем пишет иногда так, как будто считает, если не формулировку, то во всяком случае доказательство теоремы Тейлора, приводимое в курсах Хайнда и Бушарла, принадлежащим самому Тейлору.

В связи со словами Хайнда, что «если функция не имеет рациональной алгебраической формы, то число ее дифференциальных коэффициентов [производных] бесконечно велико» (почему и ряд получается «неограниченно продолжаемый»), Маркс пишет после слов «wenn sie *nicht algebraic form besitzt*» («если она *не имеет алгебраической формы*»):

⟦also stets, wenn *transcendental functions* (*exponential*, *logarithmical*, *or trigonometrical*), da die Natur dieser functions nicht erlaubt, sie auszudrücken *by means of algebraical expressions of finite numbers of terms*⟧.

⟦т. е. всегда, когда *функции трансцендентны* (*показательные*, *логарифмические или тригонометрические*), поскольку природа этих функций не позволяет выразить их *посредством алгебраических выражений с конечным числом членов*⟧.

* «Cor.»— сокращение от «corrolarium» («корроларий»): побочное следствие из хода рассуждения.— *Ред.*

Неограниченная продолжаемость ряда иллюстрируется на примере разложения $\sin(x+h)$ в ряд Тейлора.

Другие примеры и доказательство теоремы Тейлора (аналогичное доказательству в курсе Бушарла, подробно законспектированному и критически проанализированному Марксом ранее, см. II, 18) и соответствующие замечания Маркса, содержащиеся в п. 74 курса Хайнда, Маркс не конспектирует здесь.

Раздел заканчивается словами (л. 70, стр. 68 у Маркса):

Solange nun das result der application von Taylor's theorem nur betrachtet als analytical transformation, gleichgültig, ob die *number der terms finite or infinite*; anders, wenn es sich darum handelt, zu versichern den Wert der Funktion in any particular state of the principal variable; dann wird's wichtig, zu finden die *limit der quantity, which is omitted by stopping at any assigned term of the development*, ob z. B. der Wert der omitted terms grösser oder kleiner als der der limit quantity bei der man has stopped. (Z.B. ob first term greater than the sum of all the rest.)

Пока результат применения теоремы Тейлора рассматривается только как аналитическое преобразование, безразлично, является ли *число членов конечным или бесконечным*; иначе, если требуется удостоверить значение функции при любом частном значении главной переменной; тогда становится важным найти *границу количества, которое оказывается опущенным, когда мы останавливаемся на каком-нибудь произвольном члене разложения*, будет ли, например, значение опущенных членов больше или меньше, чем значение последнего количества, на котором мы остановились. (Например, будет ли первый член больше, чем сумма всех остальных.)

В курсе Хайнда соответствующий текст непосредственно следует за приведенным выше замечанием о «неограниченной продолжаемости» ряда Тейлора (п. 75, Cor. 1, стр. 86—87). Все английские слова в этой выписке принадлежат Хайнду, да и в целом она точно передает текст учебника, хотя в последних словах (после подчеркнутых им) Маркс ограничился упоминанием задачи, которую пытается далее решить автор.

Этот раздел рукописи содержит обе формулировки теоремы Тейлора: на стр. 83 и 84 (п. 74) в курсе Хайнда, пример 3 из этого же пункта (стр. 86) и начало пункта 75 (стр. 86—87).

[5] Лл. 70 (внизу, под чертой) — 74 (верх), стр. 68—72 у Маркса.

Случаи неприменимости теоремы Тейлора к функции $f(x+h)$, рассматриваемые по Лагранжу, т. е. как возможные лишь для особых (Хайнд пишет: «particular», т. е. «частных», Маркс переводит это иногда как «besondere»— «особые») значений x. Пример:

$$u = x^2 + \sqrt{x-a}$$

при $x = a$ (Hind, п. 77, стр. 92—93, до примера 2). Лл. 70—71.

Доказательство того, что в «общем» случае разложение в ряд Тейлора не может содержать дробных и отрицательных степеней h (по Лагранжу) (Hind, п. 78, стр. 94). Лл. 71—72.

Некоторые признаки, позволяющие распознавать существование особых значений x, для которых $f(x+h)$ неразложима в ряд Тейлора (Hind, пп. 79—80, стр. 94 (внизу) — 96). Лл. 72—73.

Ряд Тейлора как дающий выражение для приращения функции через ее последовательные дифференциалы: $\Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1\cdot 2} + \frac{d^3u}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ (Hind, п. 81, стр. 96—97). Использование такого выражения для приращения (в случае, когда уже известно разложение для $f(x+dx)$ по степеням dx) с целью отыскания последовательных производных от u по x. Пример $1: u = x^m$, где разложение для $(x+dx)^m$ получается по биномиальной теореме. Лл. 73—74.

Выписав после этого заголовок (л. 74, стр. 72 у Маркса):

Development of functions of 2 or more independent variables $u = f(x, y, z$ etc.$)$ oder $f(u, x, y, z$ etc.$) = 0$.

Разложение функций от двух или большего числа независимых переменных $u = f(x, y, z$ и т. д.$)$ или $f(u, x, y, z$ и т. д.$) = 0$ (Hind, гл. XII, п. 256, стр. 370), Маркс, однако, конспектировать этот раздел не стал.

IV. Здесь Маркс возвращается назад, к основному вопросу, который его интересует: о сущности двух методов дифференцирования, с которых начинал Бушарла (см. II, 1) и 3)), и смысле символики дифференциального исчисления. Собственное замечание Маркса (лл. 74—75, стр. 72—73 у Маркса), подводящее итог «первому» методу и помещенное в рукописи (л. 74) вслед за цифрой «1)», приводится ниже (см. стр. 331).

Со «вторым», т. е. методом Лагранжа, изложенным по Пуассону, Маркс знакомится еще сначала по курсу Холла (Th. G. Hall, A treatise on the differential and integral calculus, 5-е изд. (у нас), Лондон, 1852). Законспектировав (лл. 75—79, верх, стр. 73, 76—79, «76»— описка у Маркса) пункты 6—10, 13, стр. 2—8 у Холла, содержащие примеры на разложение $f(x+h)$ в ряд по возрастающим целым положительным степеням h и Лагранжево «доказательство» такой разложимости методом неопределенных показателей степени (через представление $f(x+h+h)$ один раз как $f((x+h)+h)$, другой раз как $f(x+2h)$), Маркс подводит итог «второму» методу (л. 79, стр. 79 у Маркса). Это замечание Маркса также приводится ниже (см. стр. 334). Вся эта часть конспекта помещена под заголовком (л. 75, стр. 73 у Маркса):

2) **Statt der obigen Methode die von Poisson, etc.**

2) **Вместо вышеуказанного метода метод Пуассона и т. д.**

Переходя к правилам дифференцирования, которые должны облегчить задачу дифференцирования и «сделать ее простой алгебраической операцией» (Hall, стр. 7), Холл рассматривает еще предварительно пример на дифференцирование функции $u = \frac{a+x}{b+x}$ (п. 13), прямо пользуясь определением производной как коэффициента при первой степени h в разложении для $f(x+h)$ и уже отсюда переходя к определению ее как предела отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Этот пример Маркс выписывает полностью (со всеми выкладками), называя при этом второе определение «первым» (лл. 78—79, стр. 78—79 у Маркса). (Разложение для $\frac{1}{1+\frac{h}{b+x}}$ он получает при этом делением «углом».)

На этом Маркс прекращает конспектирование начала курса Холла (оно, очевидно, было нужно ему только для подведения итога, относящегося к сущности «второго» метода дифференцирования — метода Лагранжа). Далее (лл. 80—81, стр. 80—81 у Маркса) он конспектирует из этого курса начало главы VIII (пп. 95—96, стр. 87—88) под заголовком (л. 80, стр. 80): **«Functions of two or more variables und implicit functions»** (**«Функции от двух или большего числа переменных и неявные функции»**) с указанием **«(Cf. p. 53 sqq)»** (**«см. стр. 53 и сл.»**). (Здесь см. II, 19).) Возможно, что к этой главе Маркс обратился потому, что, пропагандируя метод Лагранжа, Холл писал в предисловии к книге (стр. V), что если для функций от одной переменной оба метода (пределов и Лагранжа) равноценны, то для функций от двух (или большего числа) переменных разложение для $f(y+k,\ x+h)$ дает особенно просто полный дифференциал. (Холл имел в виду, конечно, простоту формальных преобразований.) Существенной простоты — и особенно ясности,— однако, не получилось, и, быть может, поэтому Маркс не стал конспектировать этот раздел дальше его начала, где разложение для $f(x+h,\ y+k)$ получалось из разложения для $f(x+h,\ y)$ при обращении y в $y+k$.

V. Эта часть рукописи (лл. 81, внизу — 87, стр. 81—86 и без номера по Марксу) содержит небольшую выписку из курса Сори (Sauri) и продолжение конспекта из Бушарла (тот же английский перевод 1828 г.), заканчивающееся итоговым замечанием Маркса.

Выписки из Сори (лл. 81—82, стр. 81—82 у Маркса) относятся к третьему тому этого курса (Париж, 1778), стр. 3 и 11—12, и содержат:

a) дифференцирование произведения xy (л. 81, внизу). Здесь, говоря об отбрасывании произведения dx на dy как бесконечно малой высшего порядка по сравнению с dx и dy, Маркс добавляет к тексту Сори: **«nach Leibniz»** (**«по Лейбницу»**);

b) последовательное дифференцирование и затем, обратно, интегрирование функций $y = x^m$ и xy (в случаях, когда dx — постоянная или нет). Л. 82.

Выписки из Бушарла озаглавлены Марксом (л. 82):

«Failure[s] of Taylor's theorem (Continuation to p. 69)»

(«Случаи неприменимости теоремы Тейлора (Продолжение к стр. 69)»)

Здесь имеется в виду продолжение к III, [5], л. 71. Эти выписки подразделены Марксом на 5 пунктов, обозначенных римскими цифрами и в свою очередь подразделенных иногда на подпункты. Под этими же цифрами мы и будем говорить об их содержании; номера пунктов и страницы источника будут указываться по английскому переводу Бушарла, в заключение приводятся листы рукописи. Соответствующий текст в источнике напечатан петитом. Им заканчивается раздел «Дифференциальное исчисление» в курсе Бушарла.

I. 1)—2) Случаи, когда при каком-нибудь значении a переменной x радикал исчезает в $f(a)$, но сохраняется в $f(a+h)$ (пп. 253—254, стр. 162). Л. 82.

3) Общее доказательство того, что если в разложении для $f(a+h)$ есть дробная степень h, то все производные от $f(x)$, начиная с некоторой, обращаются в бесконечность при $x = a$ (п. 255, стр. 163). Лл. 83—84.

II. 1)—2) Способ получить в таких случаях разложение для $f(a+h)$ не по теореме Тейлора (подстановкою $x+h$ на место x в $f(x)$ и применением, например, биномиальной теоремы Ньютона).

Пример:

$$f(x) = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Найти разложение для $f(a+h)$ (пп. 256—257, стр. 164—165). Лл. 84—85.

Этот пункт конспекта заканчивается словами Маркса (л. 85):

Es kommt darauf hinaus, dass wir die nur bis zum n-ten term ⟦wenn also überhaupt⟧ ausführbare Anwendung des Taylorschen Theorems durch *Hilfsmittel der gewöhnlichen Algebra*, die nichts mit dem Differentialcalculus gemein haben, ergänzen.

Это сводится к тому, что выполнимое лишь до n-го члена ⟦если вообще выполнимое⟧ применение теоремы Тейлора мы дополняем *вспомогательными средствами обыкновенной алгебры*.

III. Лагранж доказал, что (п. 258, стр. 166; л. 85):

das development $f(x+h)$ *keine terms mit fractional powers for* h enthalten kann, solange x, wie es in dem allgemeinen development der Fall, *indeterminate* bleibt, also nicht einen partikularen Wert a erhält.

разложение $f(x+h)$ не может содержать *членов с дробными степенями* h, пока x, как это имеет место в общем разложении, остается *неопределенным*, т. е. не получает какого-нибудь частного значения a.

Как и вообще во всей этой части, доказательство конспектируется здесь полностью:

was gegen die Voraussetzung,

до получения противоречия с допущением,

как пишет Маркс. В приведенной же выписке Маркс поясняет слишком краткий текст источника, где сказано только: «когда x остается неопределенным».

IV. То же для отрицательных степеней h (п. 259, стр. 166—167). Л. 86.

V. То же для членов вида $A \log h$ (п. 260, стр. 167). Л. 86.

Подведя после этого черту, Маркс пишет дальше под номером «VI» (л. 86, стр. 86 по Марксу):

VI. *Es sind überhaupt in Lagrange's algebraischer Entwicklung von Taylor's formula, oder noch allgemeiner in der Entwicklung seiner*

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

von vornherein ausgeschlossen die Fälle, die später als «failures» in der Anwendung des Taylorschen Theorems erscheinen. (Dies abgesehn von dem *was bereits im besondren sub* III (p. 85) *und sub* IV *und* V *diese Seite mit Bezug hierauf bemerkt worden* *.)

VI. *Вообще в лагранжевом алгебраическом выведении формулы Тейлора или, еще более общо, в выведении его*

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

с самого начала исключены случаи, которые позднее выступают как «случаи неприменимости» теоремы Тейлора. (Это помимо того, *что уже было замечено по этому поводу, в особенности* sub III (стр. 85) *и* sub IV *и* V *на этой странице* *.)

* Здесь, очевидно, имеется в виду доведение доказательства до противоречия с «допущением», которое и рассматривается как исключающее особые случаи. Стр. 85 — это и лист 85.— *Ред.*

a) Bei Lagrange, der auf *algebraischem* Weg ⟦nicht durch Anwendung des Differentialcalculus⟧ erhält

a) У Лагранжа, который получает *алгебраическим* путем ⟦а не применяя дифференциальное исчисление⟧

$$f(x+h)=f(x)+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

bedeutet $\frac{dy}{dx}$ nichts als its being a symbol of the *operation, by which is obtained the coefficient of* h in the development of $f(x+h)$; and, this coefficient being once found, the expressions $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. mean only that by repetition of the same process the *coefficients* of h^2, h^3 etc. will be found, but only after, consequent upon the these successive processes, the *second term is again and again* reduced to a term *affected by the first power of h*; so that we require only to know by the rules of algebra, what $\frac{dy}{dx}$ ought to be for each function. If, for instance, it were asked, what $\frac{dy}{dx}$ is for the function x^m, we should develop $(x+h)^m$ by the binomial theory, which gives

$\frac{dy}{dx}$ не является ничем иным, как символом *операции, посредством которой получен коэффициент при* h в разложении для $f(x+h)$; а после того, как этот коэффициент уже найден, выражения $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. означают только, что повторение того же самого процесса даст *коэффициенты* при h^2, h^3 и т. д., но только после и посредством того, как через эти последовательные процессы *второй член снова и снова* будет сводиться к члену, *снабженному первой степенью h*; так что нам нужно знать только по правилам алгебры, чем должно быть $\frac{dy}{dx}$ для каждой функции. Если, например, спрашивалось бы, чем является $\frac{dy}{dx}$ для функции x^m, нам нужно было бы разложить $(x+h)^m$ по биномиальной теории, которая дает

$$x^m+mx^{m-1}h+\ldots;$$

hence, as $\frac{dy}{dx}$ must indicate the coefficient of the first power of h in the development, we should have

поэтому, так как $\frac{dy}{dx}$ должно указывать коэффициент при первой степени h в этом разложении, у нас должно быть

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}.$$

If we asked further, what $\frac{dy}{dx}$ für mx^{m-1} ⟦hence what $\frac{d^2y}{dx^2}$ für x^m⟧, we develop again by the binomial theory:

Если бы мы спросили дальше, чем будет $\frac{dy}{dx}$ для mx^{m-1} ⟦и, следовательно, чем будет $\frac{d^2y}{dx^2}$ для x^m⟧, мы разложили бы опять по биномиальной теории:

$$m(x+h)^{m-1} = mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2}h + \ldots$$

Daher $\frac{dy}{dx}$ für mx^{m-1}, oder $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x^m = m(m-1)x^{m-2}$.

Поэтому $\frac{dy}{dx}$ для mx^{m-1} или $\frac{d^2y}{dx^2}$ для $x^m = m(m-1)x^{m-2}$.

Thus the whole is reduced to the being able to find, by *analytical processes, the development of the different sorts of functions which algebra can present.*

Таким образом, все сводится к тому, чтобы уметь находить *с помощью аналитических процессов разложение различных родов функций, которое может дать алгебра.*

Фактически этим, тонко подытоживающим замечанием, говорящим о том, что Лагранж, в сущности, ничего не доказал, так как предположил то, что хотел доказать, заканчивается рукопись: последний лист 87 (страница без номера) заполнен неупорядоченными выкладками и словами и многократно (овальными кривыми) перечеркнут.

Приведем теперь упомянутые в описании рукописи собственные замечания Маркса.

Первое из них относится к самому началу курса Бушарла (см. II, 1)) и содержит критическое замечание Маркса, относящееся к способу введения понятия дифференциала в этом курсе (л. 42, стр. 38 у Маркса).

О ПОНЯТИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ПО БУШАРЛА

$$\left.\begin{aligned} y &= x^3, \\ y_1 &= (x+h)^3, \end{aligned}\right| \begin{aligned} y_1 &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3, \\ y_1 - y &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3, \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2;$$

if h diminishes to 0, dass $\frac{y_1-y}{h} = 3x^2$; *hence* $3x^2$ *limit* to which $\frac{y_1-y}{h}$ tends as h goes on diminishing; aber dann such

когда h убывает до 0, то $\frac{y_1-y}{h} = 3x^2$; *следовательно*, $3x^2$ *есть предел*, к которому стремится $\frac{y_1-y}{h}$, когда h убывает;

$\frac{y_1-y}{h}=\frac{0}{0}$, oder

$$\frac{\text{increment of function } y}{\text{increment of variable } x}=\frac{0}{0};$$

hence $\frac{0}{0}=3x^2$.

Dies noch according to common Algebra, as $\frac{0}{0}=$ jeder Quantität sein kann. Aber da in $\frac{0}{0}$ sowohl jede Spur der function wie der variable x ausgelöscht ist, so gesetzt für $\frac{0}{0}$ der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ *reminding us* that *the function was y und the variable x*; *dy* und *dx evanescent* quantities; $\frac{dy}{dx}=3x^2$; $\frac{dy}{dx}$, or rather *its value* $3x^2$ is the *differential coefficient of the function y*.

но тогда и $\frac{y_1-y}{h}=\frac{0}{0}$, или

$$\frac{\text{приращение функции } y}{\text{приращение переменной } x}=\frac{0}{0};$$

следовательно, $\frac{0}{0}=3x^2$.

Это еще в согласии с обычной алгеброй, так как $\frac{0}{0}$ может быть равно любому количеству. Но поскольку в $\frac{0}{0}$ исчез всякий след как функции, так и переменной x, то вместо $\frac{0}{0}$ подставляется выражение $\frac{dy}{dx}$, *напоминающее нам*, что *функцией была y, а переменной* [была] *x*; *dy* и *dx — исчезающие* количества; $\frac{dy}{dx}=3x^2$; $\frac{dy}{dx}$ или, вернее, *его значение* $3x^2$ есть *дифференциальный коэффициент функции y*.

Записав это, Маркс замечает (на стр. 38):

Die Einführung der *evanescent quantities* und of their ratio $\frac{dy}{dx}$ instead of $\frac{0}{0}$ gehört nicht mehr der Algebra an; aber worse: obgleich $\frac{dy}{dx}$ «be the *symbol* which represents the limit $3x^2$» und therefore «*dx ought properly to be always placed under dy*», nichts destoweniger, «in order to facilitate operations in algebra» we treat $\frac{dy}{dx}$ als eine common fraction und $\frac{dy}{dx}=3x^2$ als a common equation; und thus,

Введение *исчезающих количеств* и их отношения $\frac{dy}{dx}$ вместо $\frac{0}{0}$ уже не принадлежит алгебре; но хуже того: хотя $\frac{dy}{dx}$ — «это *символ*, который представляет предел $3x^2$», и поэтому «*dx, собственно, должно всегда находиться под dy*», тем не менее, «чтобы облегчить операции в алгебре», мы рассматриваем $\frac{dy}{dx}$ как обычную дробь, а $\frac{dy}{dx}=3x^2$ как обычное уравнение и, таким образом, освобождая by clearing the equation of its denominator — obtain $dy = 3x^2dx$, the which expression — obtained in a rather equivocous ways — then called *the differential of the function* y[116].

это уравнение от его знаменателя, получаем $dy = 3x^2\,dx$; это-то выражение — полученное довольно сомнительными путями — затем и называется *дифференциалом функции* y[116].

Следующее замечание Маркса (перечеркнутое им впоследствии вертикальной чертой) заимствовано из II, 18) и относится к лемме Бушарла, с помощью которой последний доказывает теорему Тейлора. Оно находится на л. 53 (стр. 49 у Маркса).

О ЛЕММЕ БУШАРЛА

b) ⟦Quite a new element here introduced, as compared to what precedes. Till now, if $y = f(x)$, and we got

$$y_1 = f(x + h),$$

x was not only variable, but also *its increment* h. It is true through the operations, the latter was treated so far as constant, as a given magnitude, because otherwise, f.i. $(x + h)^2$ could not be treated as a binomial, we could not have $x^2 + 2xh + h^2$; but x itself appears in this formula for the given moment as constant. It is separated as an independent magnitude von h^2 f. i. Besides x is virtually a fluent, but it becomes only a real fluent in the moment it generates a fluxion. On the other hand h, after it has performed its business as a «constant» magnitude throughout the binomial operation, is immediately treated as a variable, it becomes not only 0 in $\frac{0}{0}$ $\left(\text{as the denominator of } \frac{0}{0}\right)$, but it figures as an evanescent quanti-

b) ⟦Здесь вводится по сравнению с предшествующим совершенно новый элемент. До сих пор, если $y = f(x)$ и мы получали

$$y_1 = f(x + h),$$

то переменной была не только x, но и *ее приращение* h. Правда, в ходе операции последнее рассматривалось как постоянная, как данная величина, так как иначе $(x + h)^2$, например, не могло бы трактоваться как степень бинома и мы не могли бы получить $x^2 + 2xh + h^2$; но и сама x выступает в этой формуле для данного момента как постоянная. Она отделена, как независимая величина, от h^2, например. Кроме того, x есть потенциально флюента, но она становится настоящей флюентой только в момент, когда порождает флюксию. С другой стороны, h тотчас же после того, как оно выполнило уже в ходе биномиальной операции свои обязанности «постоянной величины», трактуется как переменная, оно не только обращается в нуль в $\frac{0}{0}$ $\left(\text{как знаменатель в } \frac{0}{0}\right)$, ty $\frac{0}{0}$ being transformed in $\frac{dy}{dx}=\frac{y_1-y}{h}$ (wenn h becomes evanescent) and it is only as a ratio of

но оно фигурирует как исчезающее количество, поскольку $\frac{0}{0}$ преобразуется в $\frac{dy}{dx}=\frac{y_1-y}{h}$ (когда h становится исчезающим), и лишь как отношение

$$\frac{\text{evanescent [increment of the] function } y}{\text{evanescent increment } h \text{ (increment of } x)};$$

$$\frac{\text{исчезающего [приращения] функции } y}{\text{к исчезающему приращению } h \text{ (приращению переменной } x)};$$

that this ratio finds its value in a *coefficient* free of all differential quantities. But in what now follows, and upon which founded the theorem of Taylor, we proceed to the till now unknown dilemma.

это отношение получает свое значение в *коэффициенте*, не содержащем никаких дифференциальных количеств. Но в том, что за этим теперь следует и на чем основана теорема Тейлора, мы переходим к до сих пор неизвестной дилемме.

Either x is considered as variable, and its increment h as constant, or x is considered as constant and its increment h as variable,— in order to prove that it is the *same whether we start from the one view or the other* [117]. The question seems rather to be, whether we had laid any foundation in the precedent development, which would allow us to put such a dilemma!⟧

Либо x рассматривается как переменная, а ее приращение h как постоянная, либо x рассматривается как постоянная, а ее приращение h как переменная,— с целью доказать, что результат не зависит от того, начинаем ли мы *с первого предположения или со второго* [117]. Вопрос скорее состоит в том, дает ли нам предшествующее изложение какие-нибудь основания для постановки такой дилеммы!⟧

СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕМ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

На лл. 55—56 (стр. 51—52 у Маркса) имеется следующее замечание Маркса, посвященное сравнению теорем Тейлора и Маклорена.

⟦The difference between it [Taylor's theorem] and Mac Laurin's theorem:

1) Mac Laurin starts from $y=f(x)$. Taylor starts von $y_1=f(x+h)$ [118].

⟦Различие между нею [теоремой Тейлора] и теоремой Маклорена:

1) Маклорен начинает с $y=f(x)$. Тейлор начинает с $y_1=f(x+h)$ [118].

2) *Mac Laurin* arranges the function, $f(x)$, according to the powers of x:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

That equation is successively differentiated in *respect* to x; the differential coefficients $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. so found $\left(\text{i.e. the values on the other side } \left(\text{as } \frac{dy}{dx} = B + 2Cx + \text{etc.}\right)\right)$ are then reduced to their expression when x becomes 0; so y becomes (y), $\frac{dy}{dx}$ becomes $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ etc., and these values, *together with the numerical coefficients* substituted for the indeterminate coefficients in the original equation. Thus for instance in the third differentiation, if x put $=0$, we get $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C$, and so $C = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ebenso

2) *Маклорен* располагает функцию, $f(x)$, по степеням x:

Это уравнение последовательно дифференцируется по x; найденные таким образом дифференциальные коэффициенты $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. (т. е. их значения на другой стороне уравнения $\left(\text{такого, как } \frac{dy}{dx} = B + 2Cx + \ldots\right)\Big)$ приводятся затем к их выражениям при x, обращающемся в нуль; так, y обращается в (y), $\frac{dy}{dx}$ в $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ и т. д., и эти значения *вместе с числовыми коэффициентами* подставляются вместо неопределенных коэффициентов в первоначальное уравнение. Так, например, при третьем дифференцировании, полагая $x = 0$, мы получаем $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C$, откуда $C = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, так же

$$D = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ldots,$$

while in the original development of y, the factors x, x^2, x^3 etc., the development of x remains unchanged and reappears with the differential coefficients.

между тем как в первоначальном разложении для y множители x, x^2, x^3 и т. д., все разложение по x остается без изменения и появляется снова, но уже с дифференциальными коэффициентами.

3) On the other side, *Taylor*[119] starts not from [the function] y, oder $y = f(x)$[120], sondern von function y_1 oder $y_1 = f(x+h)$.

3) С другой стороны, *Тейлор*[119] начинает не с [функции] y, или $y = f(x)$[120], но с функции y_1 или $y_1 = f(x+h)$.

The indeterminate coefficients A etc. (unknown functions of x) are found by differentiating the primitive development of

Неопределенные коэффициенты A и т. д. (неизвестные функции от x) находятся дифференцированием первоначального разложения

$$f(x+h) \ \overset{\text{oder}}{\underset{\text{или}}{}} \ y_1 = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots,$$

where the factor x does not appear.

In Mac Laurin the values of A, B etc. in form of differential coefficients, [are] found by *successive differentiations* of the *first equation*, arranged according to the powers of x, but *Taylor* proceeds differently; he *differentiates first* (*einmal*) *in respect of* h, and then in respect of x, so that he gets:

где множитель x не появляется.

У Маклорена значения для A, B и т. д. в форме дифференциальных коэффициентов находятся *последовательным дифференцированием первого уравнения*, расположенного по степеням x; *Тейлор* же поступает иначе; он *дифференцирует сначала* (*один раз*) *по* h, а затем по x, так что он получает:

$$1)\ \frac{dy_1}{dh} = \ldots \quad \overset{\text{and}}{\underset{\text{и}}{}} \quad 2)\ \frac{dy_1}{dx} = \ldots;$$

as these two expressions are equal, according to b) (p. 49), the *coefficients of the same power of* h, *found in the two different ways*, *are equated*, and then $A = \frac{dy}{dx}$ gives by substitution, the *differential expressions*, consisting of successive ascending differentiations *without further processes of differentiation* having been recurred to; die powers of h, h^2, h^3 etc. play the same part as x, x^2 etc. in Mac Laurins theorem; x does as little appear for itself as a coefficient wie h in Mac Laurins theorem; the numerical coefficients wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$ found by Mac Laurin durch Differentiation and

так как эти два выражения равны согласно b) (стр. 49), то *коэффициенты при одинаковых степенях* h, *найденные этими двумя разными способами*, *приравниваются*, и затем $A = \frac{dy}{dx}$ дает при подстановке *дифференциальные выражения* для последовательно возрастающих дифференцирований без повторного применения *дальнейших процессов дифференцирования*; степени h, h^2, h^3 и т. д. играют ту же роль, как x, x^2 и т. д. в теореме Маклорена; x столь же мало выступает сама по себе как коэффициент, как h в теореме Маклорена; числовые коэффициенты вроде $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$, получавшиеся у Маклорена taking the limit, are found by Taylor, through the equation of the two *different expressions found for the coefficients of the same powers of h.*]]

дифференцированием и переходом к пределу, находятся у Тейлора приравниванием двух *различных выражений для коэффициентов при одинаковых степенях h.*]]

Mac Laurin:

Маклорен:

$$y \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x)\right) = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) x^3 + \ldots$$

Taylor:

Тейлор:

$$y_1 \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x+h)\right) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Statt y könnte auf der zweiten Seite der Gleichung stehn als *erstes Glied* $f(x)$, da

На другой стороне уравнения вместо y в качестве *первого члена* могло стоять $f(x)$, так как

$$y_1 = f(x+h), \quad y = f(x).$$

Mac Laurin's theorem ableitbar aus dem von *Taylor*. Nach letzterem, wenn wir überall statt y setzen $f(x)$, erhalten:

Теорема Маклорена выводима из *теоремы Тейлора*. Согласно последней, если всюду вместо y подставим $f(x)$, то получим:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} h + \frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

If *we make* $x = 0$, *und representing wie Mac Laurin durch Klammern die different coefficients when* x *becomes* 0, *dann* die formula of Taylor becomes:

Если *мы положим* $x = 0$ *и представим, как Маклорен, с помощью скобок значения различных коэффициентов при* x, *обращающемся в нуль*, то формула Тейлора примет вид:

$$f(h) = (f(x)) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right) h + \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

h enters into $f(h)$, as x entered into $f(x)$; we can hier put x für h, because through this change nothing is altered in the differential coefficients; then

h входит в $f(h)$ так, как x входила в $f(x)$; мы можем здесь подставить x вместо h, так как это изменение ничего не меняет в дифференциальных коэффициентах; тогда

$$f(x) = (f(x)) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right) x + \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

which is Mac Laurin's theorem.

что и есть теорема Маклорена.

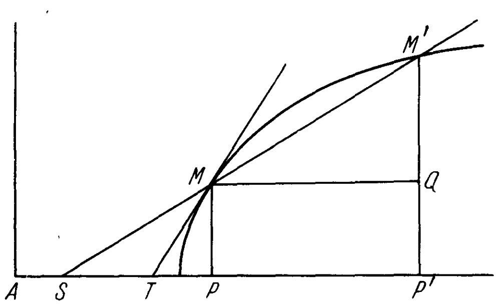
Mac Laurin's formula that of sukzessive differentiation generalised; *Taylor's*, more general, *formula for the development of different functions in the form of a series.*

Формула Маклорена—формула обобщенного последовательного дифференцирования; *формула Тейлора*, более общая,—*это формула для представления различных функций в форме рядов.*

На л. 64 (стр. 60 у Маркса) после выписки из Boucharlat (см. II, 20)), относящейся к задаче о проведении касательной к кривой, следует замечание Маркса:

ЗАДАЧА О КАСАТЕЛЬНОЙ: ДВА РАЗНЫХ МЕТОДА ЕЕ РЕШЕНИЯ

⟦Diese zweite Methode, wobei Taylor's Theorem angewandt, komplizierter und more tedious that the first one; sie umgeht scheinbar die Schwierigkeit, den arc MM' koinzidieren zu machen



mit chord MM' [sieh Figur] und daher ein Dreieck zu substituieren, wovon eine Seite in fact ein Bogen ist; während klar, dass wie das inkrement der Abszisse abnimmt, M' sich M nähert, bis die Ordinate $M'P'$ zusammenfällt mit MP, also auch die Sekante MM' *nur noch die Fortsetzung der Tangente* TM *ist*, also auch SP mit der Subtangente PT koinzidiert. Andrerseits ist diese Umgehung nur scheinbar; denn der ganze Witz kommt nur heraus durch die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke,

⟦Этот второй метод, где применяется теорема Тейлора, более сложен и утомителен, чем первый; в нем, по-видимому, обходится трудность, состоящая в том, что дуга MM' отождествляется с хордой MM' [см. рисунок] и поэтому появляется треугольник, одной из сторон которого фактически является дуга; между тем ясно, что когда приращение абсциссы убывает, то M' приближается к M, пока ордината $M'P'$ не совпадает с MP, а следовательно, и секущая MM' *окажется лишь продолжением* касательной TM, т. е. и SP совпадет с подкасательной PT. С другой стороны, этот обход лишь кажущийся, ибо вся хитрость сводится к подобию обоих und da die 2 Seiten des Hilfsdreiecks aus dx und dy bestehn, also kleiner sind als Punkte, so unter diesen Umständen auch nicht sich zu genieren, die chord mit arc oder vice versa zusammenfallen zu lassen. Ausserdem auch in der ersten Methode nur die beiden Katheten wechselseitig vergleichen und kann auch der Phantasie die Beschaffenheit der Hypothenusen überlassen werden [121].]]

треугольников, а так как двумя сторонами вспомогательного треугольника являются dx и dy, меньшие, чем точки, то при этих обстоятельствах не приходится стесняться допускать совпадение хорды с дугой и наоборот. Кроме того, и в первом методе попарное сравнение производится лишь в применении к обоим катетам, характер же гипотенуз может быть предоставлен фантазии [121].]]

ДВА РАЗНЫХ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Первый метод излагается Марксом на лл. 74—75 (стр. 72—73 у Маркса). Пояснения к нему см. стр. 319.

«ПЕРВЫЙ» МЕТОД: «ПРЕДЕЛОВ»

1) Bei Grundlage oder Ausgangspunkt, nämlich *Findung von differential coefficient*, hatten wir erst die Methode:

1) В основе, или исходном пункте, именно *при отыскании дифференциального коэффициента*, мы начинали с метода:

$$\text{I)}\ y = f(x);$$
$$\text{II)}\ y_1 = f(x + h).$$

Wenn z. B. — Если, например,

$$y = f(x) = ax^2,$$

so — то

$$y_1 = f(x + h) = a(x + h)^2;$$

hence — следовательно,

$$y_1 = ax^2 + 2ahx + ah^2$$

und — и

$$\text{III)}\ y_1 - y = 2ahx + ah^2.$$

Dividing both sides by h, we obtained:

Разделив обе стороны на h, мы получали:

$$\text{IV)}\ \frac{y_1 - y}{h} = 2ax + ah.$$

$y_1 - y$ ist gleich Differenz y_1 (das Inkrement von y_1 über y), also $= \Delta y$;

$x + h = x_1$; h ist gleich Differenz x_1, ist gleich Δx (nämlich $=$ Überschuss von x_1 über x); wir können also schreiben, statt $\frac{y_1 - y}{h} = 2ax + ah$:

$y_1 - y$ равно разности y_1 (приращению y_1 над y), следовательно, $= \Delta y$;

$x + h = x_1$; h равно разности x_1, равно Δx (т. е. $=$ излишку x_1 над x); мы можем, следовательно, вместо $\frac{y_1 - y}{h} = 2ax + ah$ написать:

$$\text{V)}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + ah.$$

Die erste Seite der Gleichung drückt *ratio der finite Differenz der function y zu finite Differenz der independent variable x aus*. Setzen wir jetzt $h = 0$, so erhalten wir:

Первая сторона этого уравнения выражает *отношение конечной разности функции y к конечной разности независимой переменной x*. Полагая теперь $h = 0$, получим:

$$\text{VI)}\ \frac{0}{0} = 2ax.$$

Dies noch innerhalb der gewöhnlichen Algebra. Haben wir z. B. $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, so dies $= \frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$. Also $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$, da auf der zweiten Seite

Это еще не выходит за пределы обычной алгебры. Если имеем, например: $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, то это равно $\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$. Значит, $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$, так как на другой стороне

$$(x + a) \cdot \frac{(x - a)}{(x - a)} = (x + a) \cdot 1.$$

Setzen wir auf beiden Seiten $x = a$, so erhalten wir $\frac{0}{0} = 2a$. Da $\Delta x = h$, so, if $h = 0$, $\Delta x = 0$; and as y becomes only y_1 in consequence of the x increasing by h, so $y_1 = y$, wenn $h = 0$, also $x + h = x$; hence $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$. In this form nothing to be done with the equation, enthält keine trace of function, noch principal variable, $\frac{0}{0}$ expresses, that both differences Δy und Δx have disappeared, but we want to fix the character

Полагая на обеих сторонах $x = a$, мы получим $\frac{0}{0} = 2a$. Так как $\Delta x = h$, то, если $h = 0$, $\Delta x = 0$; и так как y обращается в y_1 лишь вследствие того, что x возрастает на h, то $y_1 = y$, когда $h = 0$, т. е. когда $x + h = x$; следовательно, $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$. В этой форме нечего делать с уравнением, которое не содержит никакого следа ни функции, ни главной переменной, $\frac{0}{0}$ выражает, что исчезли обе разности Δy и Δx, мы же хотим of the factors that have disappeared; we want to fix them as evanescent (in der Negation des Charakters dessen, was negiert wird) und daher gesetzt statt $\frac{0}{0}$ $\frac{dy}{dx}$; statt Δ haben wir d, statt der difference ihr diminutive, the *differential*. Hence:

фиксировать характер членов, которые исчезли; мы хотим зафиксировать их как исчезающие (в отрицании зафиксировать характер того, что отрицается) и поэтому полагаем $\frac{dy}{dx}$ вместо $\frac{0}{0}$; вместо Δ мы пишем d, вместо разности — ее минимальное значение, *дифференциал*. Итак:

$$\text{VII)}\ \frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Dies shows firstly, dass die terms, which compose the ratio are evanescent, und that they have in fact disappeared oder become $= \frac{0}{0}$, as soon as we have $2ax$.

$2ax$ is therefore the limit of their variations.

This differential coefficient has therefore two expressions, the one showing the movement $\frac{dy}{dx}$, the other showing its value, its *limit*.

What, after the operations are performed, disappears, is $\left.\begin{matrix}dy\\dx\end{matrix}\right\} = 0$; and there would be only an error in the calculus, if they were not removed.

The only difficulty is therefore the dialectic notion of fixing a ratio between evanescent quantities, and when this *has done its duty, the ratio* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *disappears also in the result of the calculus.*

Это показывает, во-первых, что члены, которые образуют отношение, являются исчезающими и что они действительно исчезли или обратились в $\frac{0}{0}$, как только мы получили $2ax$.

$2ax$ есть поэтому предел их изменений.

Этот дифференциальный коэффициент имеет, таким образом, два выражения: одно, показывающее движение, $\frac{dy}{dx}$, другое — его значение, его *предел*.

Тем, что исчезает после того, как операции выполнены, являются $\left.\begin{matrix}dy\\dx\end{matrix}\right\} = 0$; и получилась бы только ошибка в исчислении, если бы эти нули не были удалены.

Единственной трудностью поэтому является диалектическое понятие фиксирования отношения между исчезающими количествами, и когда последнее *выполнило свои обязанности, отношение* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *исчезает также из результата исчисления.*

«ВТОРОЙ» МЕТОД: ЛАГРАНЖА

Об этом замечании Маркса см. описание, стр. 319. Оно находится на л. 79, тот же номер и страницы у Маркса.

Das Wichtige dieser Methode ist für die späteren analytischen Operationen, nicht für die Grundoperationen. Denn nachdem man hat

Важность этого метода проявляется в дальнейших аналитических операциях, а не в исходных, ибо, после того как мы имеем

$$u_1 = f(x+h) = u + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots,$$

so die Operation wird vorhin $\frac{u_1 - u}{h} = \frac{du}{dx} = A$, wenn $h = 0$ gesetzt; setzt man es nicht $= 0$, so wird $Bh^2 + Ch^3 +$ etc. als verschwindend klein gegen A angenommen, um es loszuwerden und dies hier ganz überflüssige Vorstellung. Aber es ist wichtig dass, wenn gegeben $u = f(x)$ und x becomes $x + h$ [u becomes] $= u_1$, so

дальнейшая операция состоит сначала в $\frac{u_1 - u}{h} = \frac{du}{dx} = A$, если положить $h = 0$; если же не полагать $h = 0$, то, чтобы избавиться от $Bh^2 + Ch^3 + \ldots$, его принимают за исчезающе малое по отношению к A, между тем как здесь такое представление абсолютно излишне. Но важно, что когда дано $u = f(x)$ и x обращается в $x + h$, u обращается в u_1, то

$$u_1 - u = f(x+h) - f(x).$$

und diese *Differenz zwischen den functions von* $x+h$ *und* x, *die abhängen muss von* h, *dem Inkrement von* x, also $u_1 - u$, darstellbar in Reihe von der Form $Ah + Bh^2 + Ch^3 +$ etc., also

и эта *разность между функциями от* $x + h$ *и от* x, *которая должна зависеть от* h, *приращения* x, т. е. разность $u_1 - u$, представима рядом вида $Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$, т. е.

$$u_1 = u + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots,$$

oder

или

$$u_1 = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots,$$

wo die *powers von h ascend*; dass diese *powers nur mit positive indices* (und integrals, nicht fractions); dass the first term must be $u = f(x)$; dass A, *the coefficient of the first power of* h, *is the first differential coefficient*

где *степени* h *возрастают*; что эти *степени только с положительными показателями* (и целыми, не дробями); что первым членом должен быть $u = f(x)$; что A, *коэффициент первой степени* h, *есть первый дифферен-*

und Ah ($= A\,dx$) *the first term of the difference between* u_1 und u oder *between* $f(x+h)$ und $f(x)$.

Das Hauptobjekt des *Differentialcalculs den Wert der coefficients* A, B, C *usw. zu finden*; *a differential* daher ist the *second term of the expansion* $f(x+h)$.

циальный коэффициент, *а* Ah ($= A\,dx$) — *первый член разности между* u_1 и u или *между* $f(x+h)$ и $f(x)$.

Основной задачей *дифференциального исчисления является отыскание значений коэффициентов* A, B, C *и т. д.*; *дифференциал* поэтому есть *второй член разложения* $f(x+h)$.

Лл. 80—81. Выписки из той же книги *Hall*, §§ 95—96, стр. 87—88; относятся к разложению функций нескольких переменных в ряд Тейлора.

Лл. 81—82. Выписки из *Sauri*, т. III, стр. 3, 11—12 о дифференцировании произведения и о повторном дифференцировании.

Лл. 82—87. Выписки из *Boucharlat*, §§ 255—260, стр. 176—180; относятся к случаям неприменимости формулы Тейлора. Этот раздел в курсе Бушарла завершает дифференциальное исчисление.

ТЕТРАДЬ «ALGEBRA I» («АЛГЕБРА I»)

Ед. хр. 3932

Тетрадь представляет собою конспект по алгебре (общей теории уравнений высших степеней) преимущественно по книге Лакруа «Элементы алгебры». (У нас имеется 11-е французское издание «Éléments d'algèbre» à l'usage de l'école centrale des quatre-nations; par S. F. Lacroix, Paris, 1815.) Возможно, что в распоряжении Маркса был достаточно точный английский перевод этой книги. Конспект составлен Марксом на немецком языке, местами встречаются английские и французские слова и фразы. В тетради — 93 листа. Конспект содержит ряд больших собственных замечаний Маркса, из которых ясно, что Маркс подбирал в нем материал, посвященный поиску алгебраических источников дифференциального исчисления. Поэтому приходится думать, что рукопись относится ко второй половине 70-х годов, когда у Маркса уже начало складываться характерное для него понимание сущности символического дифференциального исчисления.

Структура конспекта довольно сложная. Он подразделен Марксом на пять частей, занумерованных римскими цифрами и снабженных заголовками. В соответствии с этим описание рукописи также подразделяется нами на пять частей, озаглавленных так, как это сделано в рукописи.

Первый лист рукописи — заглавный. У Маркса он не имеет номера, и на нем написано только **«Algebra I»** (**«Алгебра I»**).

Далее следует часть тетради, озаглавленная Марксом:

«I. General theory of equation[s]».

(«I. Общая теория уравнений».)

Эта часть занимает листы 2—18 (в нумерации Маркса стр. 1—17). Маркс начинает непосредственно с конспектирования § 178 (стр. 246—247) книги Лакруа, с которого в этой книге начинается раздел «Общая теория уравнений». Уже через несколько строк, однако, в связи со ссылкой на § 108, имеющейся у Лакруа, Маркс делает в свой конспект вставку из § 109 книги Лакруа, содержащую краткое изложение способа решения квадратного уравнения с помощью дополнения его левой части до полного квадрата, а закончив конспект § 178, Маркс обращается вообще к разделу о квадратных уравнениях в книге Лакруа. Пункт 2) конспекта Маркса (лл. 2—4, стр. 1—3 по Марксу) озаглавлен им: **«Wurzeln von Gleichungen zweiten Grads»** (**«Корни уравнений второй степени»**). Здесь рассматриваются вопросы: о числе корней квадратного уравнения и знаках корня (§ 106, стр. 156, со ссылкой на «Алгебру» Эмиля

Девелея, которую приводит Лакруа в этом параграфе); о том, «*in welchem Fall kann die Wurzel in Gleichungen zweiten Grads imaginär werden*» («*в каком случае корень уравнений второй степени может стать мнимым*») (§ 114, стр. 166—167 книги Лакруа); о том, что если $x = a$ есть корень уравнения $x^2 + px = q$, то другим корнем будет $x = -a - p$ (§ 116, стр. 168—169). Вслед за квадратными уравнениями Маркс переходит (лл. 4—8, стр. 3—7) к разделу о двучленных уравнениях в книге Лакруа (§§ 156—159, стр. 222—228). Здесь он особенно подробно конспектирует § 159 (стр. 225—228), посвященный корням m-й степени из единицы.

Следуя Лакруа, Маркс переходит затем (лл. 8—9, стр. 7—8) к «уравнениям, которые могут решаться как уравнения второй степени» (§§ 160—162, стр. 228—231), т. е. к уравнениям вида $x^{2m} + px^m = q$.

Раздел «Об исчислении радикалов» (§§ 163—171, стр. 231—239) Маркс опускает, но специально останавливается на разделе «Замечания о некоторых особых случаях исчисления радикалов» (§§ 172—174, стр. 239—243). Здесь (лл. 9—10, стр. 8—9) его внимание привлекают замечания Лакруа о так называемых «парадоксах», связанных с формальным переносом на корни из мнимых чисел правил оперирования с корнями из действительных чисел, в частности преобразование

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{1}=\pm 1,$$

в связи с которым, приводя ссылку Лакруа на Безу, согласно которой, «когда мы не знаем, как был образован квадрат a^2, и ищем корень, то должны рассматривать оба $+a$ и $-a$, но когда мы знаем заранее, какое из этих двух количеств было помножено само на себя, чтобы образовать a^2, то должны брать именно его» (стр. 239—240), Маркс замечает (л. 9):

Nach *Lacroix*, genügt diese Erklarung von *Bèzout*, um in solchen *partikulären* Fällen die Schwierigkeit aus dem Weg zu räumen; in andern Fällen dagegen, sagt er, dass nur die *Eigenschaften der Gleichungen von nur 2 Gliedern...* genügende Erklärung liefern.

По *Лакруа*, этого объяснения *Безу* достаточно для того, чтобы в таких *частных* случаях устранить трудность; что же касается других случаев, то, говорит он, достаточное разъяснение дают только *свойства двучленных... уравнений*.

Тут же приводится пример преобразования

$$\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{+1}=\sqrt[4]{a},$$

заведомо неверного, поскольку если $\sqrt[4]{a}$ есть действительное число, то мнимое число $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1}$ оказывается равным действительному числу $\sqrt[4]{a}$. В связи с этим «преобразованием» Маркс приводит объяснение Лакруа, состоящее в указании на то, что такие преобразования в общем случае вводят лишние корни: квадратных корней из единицы есть только два, корней же четвертой степени — четыре.

Следующий раздел конспекта (лл. 10—11, стр. 9—10) посвящен оперированию с дробными показателями (это §§ 175—177, стр. 243—246 книги Лакруа).

Тут Маркс особо выделяет замечание Лакруа о значении введенного Декартом обозначения радикалов с помощью дробных показателей степени. Маркс пишет здесь (л. 11, стр. 10 у Маркса):

Die Rechnung mit Wurzelzeichen erfordert besondre Analysis und ist clumsy, da *das Zeichen* $\sqrt{}$, das die Radikalen ausdrückt, keinen Zusammenhang hat mit der Operation, wodurch sie produziert werden. Das Ersetzen dieser Notation durch die von *fractional Exponents* — grosses Verdienst von Descartes — erleichtert alles durch ihre *Analogie mit ganzen Exponenten* und macht auf sie anwendbar die in den Berechnung der letztern angewandten Regeln.

Вычисление со знаками корня требует особого анализа и является неуклюжим, так как *знак* $\sqrt{}$, выражающий радикалы, не имеет связи с операцией, посредством которой они получаются. Замена этого обозначения обозначением для *дробных показателей степени* — большая заслуга Декарта — облегчает все оперирование *своею аналогией с целыми показателями степени* и делает применимыми к ним правила, применяемые при вычислении последних.

Только после всего этого длинного отступления (лл. 2—11, стр. 1—10) Маркс возвращается (л. 12, стр. 11) к общей теории уравнений, с которой он начал свою тетрадь. Здесь он конспектирует (лл. 12—18, стр. 11—17) раздел об общей теории уравнений (§§ 179—184, стр. 248—256 по книге Лакруа), где идет речь о числе делителей первой степени, которые может иметь уравнение, об образовании уравнения перемножением его простых делителей, о связи между корнями и коэффициентами уравнения (основная теорема алгебры о существовании корня только упоминается, но не доказывается). На этом заканчивается первая часть тетради Маркса.

Следующий раздел книги Лакруа, посвященный исключению неизвестных из уравнений степени выше первой, конспектируется Марксом только в пятой части его тетради, здесь же (лл. 18—27, стр. 17—26) Маркс переходит к части, озаглавленной им:

«II. Erstes elementarisches Auftauchen von $\frac{a}{0}=\infty$ und von $\frac{0}{0}$ in der gewöhnlicher Algebra.»

(«II. Первое элементарное появление $\frac{a}{0}=\infty$ и $\frac{0}{0}$ в обычной алгебре.»)

Эта часть содержит подборку выдержек из «Элементов алгебры» Лакруа, в которых на примерах задачи о двух курьерах (стр. 97—104 цит. изд. курса Лакруа) и задачи Клеро о точке, одинаково освещаемой двумя разными источниками света (там же, стр. 174—180), исследуются особые случаи уравнений первой и второй степени, приводящие к выражениям вида $\frac{a}{0}$ и $\frac{0}{0}$. В связи с появлением знака ∞ приводится место из «Элементов алгебры» Эйлера (по лионскому изд. 1795 г. это § 293, стр. 227), где равенство $\frac{1}{0}=\infty$ «обосновывается» Эйлером с помощью разложения дроби $\frac{1}{1-a}$ в бесконечный ряд при $a=1$. Выдержки сопровождаются следующими замечаниями Маркса.

Ниже приводится первое замечание (л. 21, стр. 20), которое Маркс заключил в рамку.

Es ist zu bemerken, dass in diesem Beispiel der elementarischen Algebra die *Differenz im Nenner $b-c$ dadurch beständig abnimmt*, dass *b konstant bleibt*, *während c beständig wächst*[122]. Es verhält sich ganz anders in $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oder $\frac{y_1-y}{x_1-x}$. Nämlich $x+h=x_1$; also $x_1-x=h$; x bleibt hier konstant und h nimmt beständig ab, also x_1.

$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, welches wird in seinem Minimalausdruck $\frac{dy}{dx}$; aber diese Verwandlung von Δx in dx, und daher von Δy in dy, geht vor während x konstant bleibt.

Es ist daher auch ganz gleichgültig, ob wir haben:

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=a$, wo die variable x auf der zweiten Seite ganz ausgelöscht ($=x^0$), oder

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)\,h+$etc.

Im zweiten Fall, sobald $h=0$ gesetzt, erhalten wir

Нужно заметить, что в этом примере из самой элементарной алгебры *разность $b-c$ в знаменателе все время убывает*, поскольку *b остается постоянной*, *между тем как c все время возрастает*[122]. Совсем по-иному обстоит дело в $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ или в $\frac{y_1-y}{x_1-x}$. Действительно, $x+h=x_1$; следовательно, $x_1-x=h$; x остается здесь постоянной, а h все время убывает, поэтому убывает и x_1.

$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, что в своем минимальном выражении дает $\frac{dy}{dx}$; но это превращение Δx в dx, и поэтому Δy в dy, происходит при x, остающейся постоянной.

Совершенно безразлично поэтому и то, имеем ли мы:

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=a$, где переменная x на второй стороне полностью исчезла ($=x^0$), или

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)\,h+\ldots$

Во втором случае, полагая $h=0$, мы получаем

$$\frac{dy}{dx}=f'(x);$$

z. B. $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$. Denn auf beiden Seiten nur change in h, während x unaffiziert und daher konstant bleibt innerhalb dieser

например, $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$. Ибо на обеих сторонах изменяется лишь h, между тем как x не затрагивается и поэтому остается

Operation. $\frac{1}{2} f''(x) h +$ etc. verschwindet, weil sein Factor $h=0$ wird, und $f'(x)$ bleibt unverändert, weil es kein h enthält; andrerseits in

постоянной в ходе этой операции. $\frac{1}{2} f''(x) h +$ и т. д. исчезает, так как его множитель h обращается в нуль, а $f'(x)$ не меняется потому, что не содержит h; с другой стороны, в

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

bleibt x *ebenfalls unverändert*; die Differenz $x_1 - x$ wird $=0$, weil $x_1 = x$ wird, i. e. weil $h=0$ wird. Deshalb im 1) Fall, z. B. $f(x) = ax$,

x *также* остается *неизменной*; разности $x_1 - x$ становятся $=0$, так как x_1 обращается в x, т. е. так как $h=0$. Поэтому в случае 1, например, $f(x) = ax$,

$$f(x+h) = a(x+h) = ax + ah,$$

also

следовательно,

$$f(x+h) - f(x) \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \ y_1 - y = ax + ah - ax = ah,$$

also

откуда

$$\frac{y_1 - y}{h} = a \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \ \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Auf der zweiten Seite keine Funktion von x, sondern nur die Konstante a; dies hindert durchaus nicht zuzusehn, was aus $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ wird, sobald die Differenz $x_1 - x$ beständig dadurch abnimmt, dass h abnimmt, also x_1 sich beständig x nähert. x bleibt dabei konstant; und schliesslich erhalten wir für Δx dx, *daher* auch für Δy dy, also $\frac{dy}{dx} = a$, statt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$. Auf der 2ten Seite geht keine Änderung vor, weil a konstante Grösse, also kein x enthält; aber dasselbe fand statt,

На второй стороне нет функции от x, есть только постоянная a; это ни в коей мере не мешает усмотреть, что происходит с $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, когда разность $x_1 - x$ постоянно убывает в силу того, что убывает h, т. е. x_1 постоянно приближается к x. x остается при этом постоянной; мы получаем окончательно dx вместо Δx, *а поэтому* и dy вместо Δy, откуда $\frac{dy}{dx} = a$ вместо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$. На второй стороне не происходит никакого изменения, так как a — постоянная величина и, значит, не содержит x; но то als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ wurde, obgleich hier auf der zweiten Seite eine Funktion von x; aber die Verwandlung von Δx in dx, setzt nur change in x_1, d. h. in dem Element h von x_1 voraus, während x konstant bleibt[123].

же самое имело место, когда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ обращалось в $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, хотя здесь на второй стороне — функция от x; превращение Δx в dx предполагает, однако, лишь изменение в x_1, т. е. в элементе h из x_1, между тем как x остается постоянной[123].

Второе замечание Маркса (л. 23, стр. 22) относится к такому случаю задачи о двух курьерах, когда они отправляются из одного пункта ($a = 0$) и движутся в одном направлении с одинаковыми скоростями ($b = c$). В применении к получающейся в этом случае неопределенности $\frac{0}{0}$ Маркс пишет:

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ für den Wert von x und dem ihm gleichen y ist also *hier nur das Symbol einer unbestimmten Grösse* (*indeterminate quantity*; *quantité indéterminée*). In andern Fällen, wo der Ausdruck $\frac{0}{0}$ einen *verschiednen Ursprung* hat, hat dies Symbol auch eine andre Bedeutung.

Выражение $\frac{0}{0}$ для значения x и равного ему y является *здесь*, таким образом, *только символом неопределенной величины*. В других случаях, когда выражение $\frac{0}{0}$ имеет *иное происхождение*, этот символ также приобретает другое значение.

Следующее замечание Маркса (л. 23, стр. 22) относится к работе Эйлера.

⟦*Euler* in seinen «Elementen der Algebra» sagt mit Bezug auf Ausdrücke $\frac{m}{0} = \infty$: es sei ein Irrtum zu meinen, dass eine unendlich grosse Zahl nicht anwachsen könne[124]. (Er hat vorher gesagt, dass ∞ entspringe aus der Division von 1 durch 0, da

⟦*Эйлер* в своих «Элементах алгебры» говорит относительно выражений $\frac{m}{0} = \infty$: было бы ошибкой думать, что бесконечно большое число не может возрастать[124]. (Раньше он говорил, что ∞ получается от деления 1 на 0, так как

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots$$ *in infinitum.*) / *до бесконечности.*)

Da $\frac{1}{0}$ eine unendlich grosse Zahl bedeutet und $\frac{2}{0}$ unzweifelhaft das Doppelte von $\frac{1}{0}$,

Так как $\frac{1}{0}$ означает бесконечно большое число, а $\frac{2}{0}$ есть, без сомнения, удвоенное $\frac{1}{0}$, nämlich $=\frac{2\cdot 1}{0}$, so sei es evident, dass eine Zahl, *obgleich unendlich gross*, dennoch 2-, 3-, oder x-mal grösser werden könne.

Nun ist erstens zu bemerken, dass $\frac{2}{0}$ (oder irgendein andrer Zähler mit 0 für Nenner), wenn in Reihe entwickelt, genau dasselbe ist als $\frac{1}{0}$, denn

именно $=\frac{2\cdot 1}{0}$, то очевидно, что число, *даже бесконечно большое*, тем не менее может стать больше в 2, 3 или x раз.

Здесь, прежде всего, нужно заметить, что $\frac{2}{0}$ (или любой другой числитель с 0 в качестве знаменателя), разложенное в ряд, есть в точности то же, что и $\frac{1}{0}$, потому что

$$\frac{2}{0}=\frac{2}{2-2}=1+1+1+1+\ \ldots$$ *in infinitum.* / *до бесконечности.*

Also, da die zweiten Glieder gleich,

Следовательно, так как вторые члены равны, то

$$\frac{2}{0}=\frac{1}{0}.$$

Ausserdem, da

Кроме того, так как

$$\frac{1}{0}=\frac{1}{1-1}\quad \text{und / и}\quad \frac{1}{1-1}=\frac{2\cdot 1}{2\cdot(1-1)}=\frac{2}{2-2},$$

so wiederum

то опять-таки

$$\frac{2}{0}=\frac{1}{0}.$$

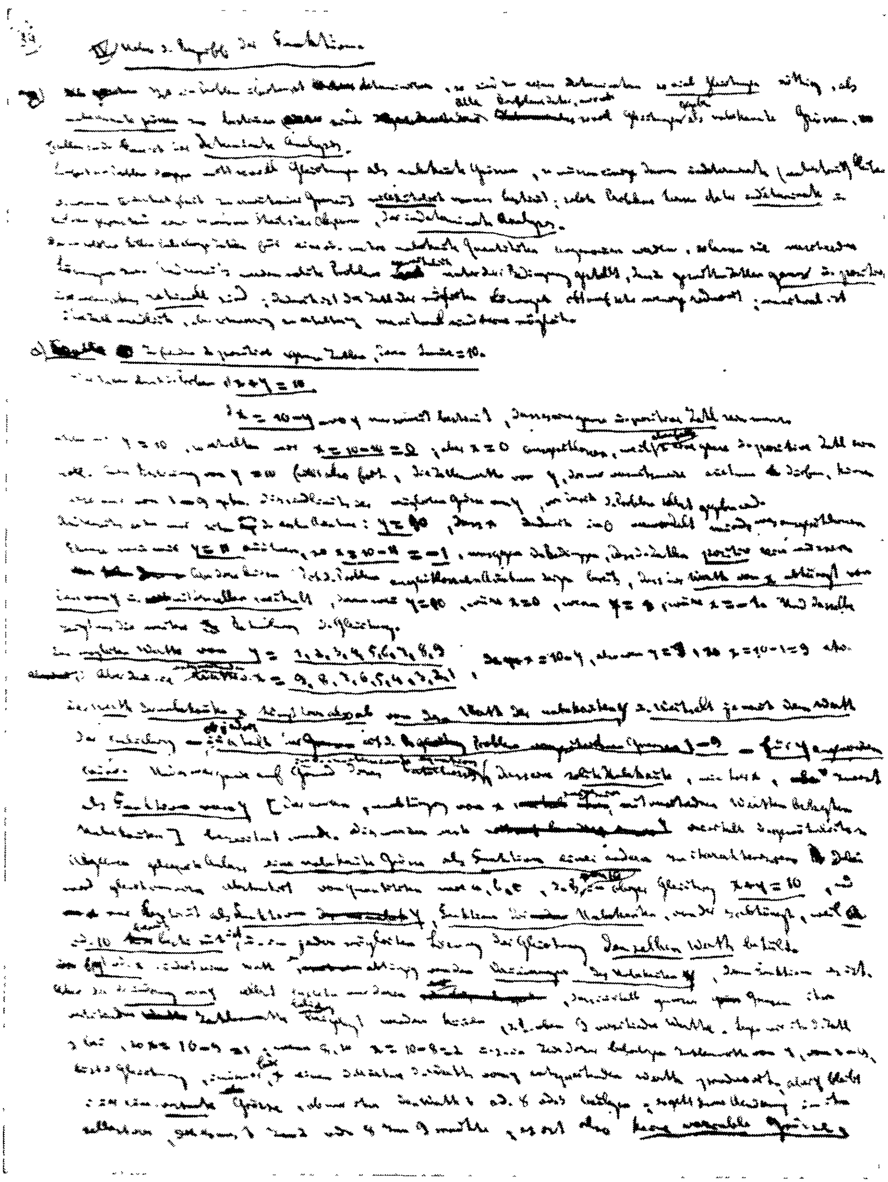
Ebensogut, wie durch eine Series von Einheiten, wie

С таким же успехом, как с помощью ряда из единиц вроде

$$\frac{1}{0}=\frac{1}{1-1}=1+1+1+\ldots,$$

kann ∞ dargestellt [werden] durch eine endlose Serie von Zahlen, die in irgendeinem gegebnen Verhältnis anwachsen. Obgleich nun ein bestimmter Teil einer unendlichen Reihe $=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ usw. eines bestimmten Teils einer andern endlosen Reihe sein kann, so hat weder der eine noch der andere bestimmte Teil *eine Pro-*

можно представить ∞ посредством бесконечного ряда чисел, растущих в любом заданном отношении. Хотя при этом определенная часть одного бесконечного ряда может быть равна $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и т. д. определенной части другого бесконечного ряда, но ни первая, ни вторая определенная часть не находится *в какой-*



«О понятии функции», страница из тетради «Алгебра I».

portion zur ganzen endlosen Serie, und man kann in dem Fall nur sagen, dass die Serien in verschied nen ratios in infinitum marschieren.]]

нибудь пропорции ко всему бесконечному ряду, и в этом случае можно сказать только, что ряды по-разному шагают в бесконечность.]]

Третья часть тетради (лл. 27—34, стр. 26—33) озаглавлена Марксом:

«III. Elementarisches über endlose Reihen.»
(«III. Элементарное о бесконечных рядах.»)

Она в свою очередь подразделяется на две части.

Первая часть: **«A) Als Vorbereitung dazu anzufangen mit approximativer Wurzelausziehung»** (**«А. В качестве подготовки к этому начать с приближенного вычисления корней»**) (лл. 27—30, стр. 26—29). Подбор выдержек из «Элементов алгебры» Лакруа, §§ 98—104, стр. 145—152. Это — часть главы «Об уравнениях второй степени с одним неизвестным», в которой доказывается теорема: «Целые числа, не являющиеся квадратами, не имеют ни целых, ни дробных корней»— и излагаются вопросы: «Что такое несоизмеримость или иррациональность», «Как обозначают зна́ком радикала корни, которые надлежит извлечь», «Метод приближенного вычисления корней», «Метод сокращенного извлечения корней с помощью деления», «Метод неограниченного продолжения его (процесса извлечения корня) обыкновенными дробями», «Способ получения по возможности более простого приближенного значения корня из дроби, члены которой не являются квадратами».

Вторая часть: **«B) Endlose Reihen»** (**«В. Бесконечные ряды»**) (стр. 31—34). Подбор выдержек из той же книги Лакруа, §§ 235—237, стр. 326—331. Заключительные абзацы из главы «Des proportions et des progressions» («О пропорциях и прогрессиях»), в которых рассматриваются: «Деление m на $m-1$, неограниченно продолжаемое», «В каких случаях это частное *сходится* и может быть принято за приближенное значение дроби $\frac{m}{m-1}$». Тут же приводятся краткие выписки из большого «Трактата» Лакруа, Введение стр. 3—6.

На стр. 30 тетради имеются два кратких замечания Маркса.

Wir finden so $\sqrt{2}$ durch fortwährende Division ausgedrückt in endlos fortzusetzenden *approximativen Wurzeln*, [die] alle gewöhnliche Brüche. Die Ausziehung von irrationellen Wurzeln, durch Wurzelausziehung der sukzessiven Reste, führt also zu endloser Reihe.

$\sqrt{2}$, находимый так с помощью последовательного деления, оказывается выраженным через бесконечно продолжаемые *приближения корня*, [которые] все являются обыкновенными дробями. Извлечение иррациональных корней с помощью извлечения корней из последовательных остатков ведет, таким образом, к бесконечному ряду.

Wie bei den *irrationellen Wurzeln*, erhalten wir bei den bloss

Уже в случае простого *приближения обыкновенной дроби* *annähernden Dezimalbrüchen* für den *gegebenen Bruch* einen endlosen Ausdruck.

десятичными мы получаем, как и для *иррациональных корней*, бесконечное выражение.

Четвертая часть тетради (лл. 35—38, стр. 34—37) содержит приводимую ниже заметку Маркса (впервые опубликована на русском языке в журнале «Вопросы философии», 1958, № 11, 89—95).

В основу заметки положены сведения, содержащиеся в книгах: А) «Трактат по дифференциальному и интегральному исчислению» Лакруа (Париж, 1810, т. I, стр. 2—4), Б) «Элементы алгебры» Эйлера (часть вторая, главы I и II).

«IV. Über den Begriff der Funktion.»
(«IV. О понятии функции.»)

A) Ist ein Problem überhaupt determinierbar [125], so sind zu seiner Determination *so viel Gleichungen* nötig, als *unbekannte Grössen* zu bestimmen sind. Alle Probleme daher, wo so viel Gleichungen gegeben als unbekannte Grössen [126], fallen in den Bereich der *determinate Analysis.*

Liefert ein Problem dagegen nicht so viel Gleichungen als unbekannte Grössen [vorhanden sind], so müssen einige davon indeterminate (unbestimmt) bleiben und werden ⟦innerhalb gleich zu erwähnender Grenzen⟧ *willkürlich* von uns bestimmt; solche Probleme heissen daher *indeterminate* und bilden Gegenstand eines besondren Teils der Algebra, der *indeterminate Analysis.*

Da in solchen Fällen beliebige Zahlen für eine oder mehre unbekannte Quantitäten angenommen werden, so lassen sie verschiedne Lösungen zu. Andrerseits werden solche Probleme gewöhnlich unter der Bedingung gestellt, dass die gesuchten

А) Если задача вообще определима [125], то для ее определенности требуется *столько уравнений*, сколько *неизвестных величин* подлежит отысканию. Поэтому все задачи, в которых дано столько же уравнений, сколько имеется неизвестных величин [126] относятся к области *определенного анализа.*

Если же задача не доставляет стольких уравнений, сколько неизвестных величин [имеется], то некоторые из последних должны остаться неопределенными и ⟦в границах, о которых сейчас будет идти речь⟧, *произвольно* определяются нами. Поэтому такие задачи называются *неопределенными* и составляют предмет особой части алгебры, *неопределенного анализа.*

Так как в подобных случаях вместо одного или нескольких неизвестных количеств принимаются произвольные числа, то задача допускает различные решения. С другой стороны, на такие задачи обычно налагаются условия, чтобы искомые числа

Zahlen *ganz und positiv* oder wenigstens *rationell* sind; dadurch ist die Zahl der möglichen Lösungen oft auf sehr wenige reduziert; manchmal ist ihre Zahl unendlich, aber [sie sind] schwierig zu erhalten; manchmal sind keine möglich.

a) *Zu finden zwei positive ganze Zahlen, deren Summe* = 10.

Wir haben damit das Problem:

были *целыми и положительными* или по меньшей мере *рациональными*; тем самым число возможных решений часто приводится лишь к очень немногим; иногда их число бесконечно, но [их] трудно найти; иногда же решение вообще невозможно.

a) *Найти два положительных целых числа, сумма которых* = 10.

Перед нами задача:

$$1)\ x+y=10,\qquad 2)\ x=10-y,$$

wo y nur soweit bestimmt, dass es eine *ganze und positive Zahl* sein muss.

Setzten wir $y=10$, so erhielten wir $x=10-10=0$; aber $x=0$ ausgeschlossen, weil ebenfalls x eine ganze und positive Zahl sein soll. Diese Bestimmung von $y=10$ fällt also fort; die Zahlenwerte von y, die wir versuchsweise annehmen dürfen, können also nur von 1—9 gehn. Dies sind limits der möglichen Grösse von y, die durch das Problem selbst gegeben sind.

Andrerseits sehn wir schon aus der ersten Annahme: $y=10$, dass x dadurch in 0 verwandelt wird, was ausgeschlossen.

Ebenso wenn wir $y=11$ annähmen, so

где y ограничено лишь тем, что оно должно быть *целым и положительным числом*.

Если бы мы положили $y=10$, то получили бы $x=10—10=0$; но $x=0$ исключено, ибо x также должно быть целым и положительным числом. Итак, значение $y=10$ отпадает; значения y, которые мы вправе перепробовать, возможны лишь в пределах от 1 до 9. Таковы пределы возможной величины y, данные условиями самой задачи.

С другой стороны, мы видим уже из первого допущения: $y=10$, что x тем самым превращается в 0, что исключено.

Точно так же, если бы положили $y=11$, то

$$x=10-11=-1,$$

was gegen die Bedingung, dass die Zahlen *positiv* sein müssen.

Aber diese beiden durch das Problem ausgeschlossnen Annahmen zeigen bereits, dass der *Wert*

что противоречит условию, что числа должны быть *положительными*.

Но уже оба эти исключаемые задачей допущения показывают, что *значение x зависит от* *von x abhängt von dem von y und mit demselben wechselt*; denn wenn $y = 10$, wäre $x = 0$, wenn $y = 11$, wäre $x = -1$. Und dasselbe zeigt uns die weitere Behandlung der Gleichung.

Die *möglichen Werte von* $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Aber dann die entsprechenden Werte von $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$, da $x = 10 - y$, also wenn $y = 1$, so $x = 10 - 1 = 9$ etc.

Der *Wert der unbekannten x hängt hier also ab von dem Wert der unbekannten y und wechselt je nach dem Wert, der beliebig jedoch innerhalb der durch das Problem vorgeschriebnen Grenzen* 1—9 *für y angenommen wird*. Und es war grade auf Grund dieses Verhältnisses in den indeterminate equations, dass eine *solche Unbekannte*, wie hier x, zuerst *als Funktion von y* ⟦der andern, unabhängig von x sukzessive mit verschiednen Werten belegten Unbekannten⟧ bezeichnet wurde. Dies war der erste, innerhalb der gewöhnlichen Algebra gelieferte Anlass, *eine unbekannte Grösse als Funktion einer andern* zu charakterisieren. Dabei wird gleich von vorn[herein] abstrahiert von Quantitäten wie a, b, c, z. B. von 10 in obiger Gleichung $x + y = 10$, und x nur bestimmt *als Funktion* [von] y, *Funktion der Unbekannten*, von der es abhängt, weil a oder 10 *bereits bestimmt* ist und in jeder möglichen Lösung der Gleichung *denselben Wert* behält.

значения y и меняется вместе с последним; ибо при $y = 10$ было бы $x = 0$, при $y = 11$ было бы $x = -1$. К тому же самому приводит и дальнейшее оперирование с уравнением.

Возможные значения $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; но в таком случае соответствующие значения $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$, так как $x = 10 - y$, в силу чего, когда $y = 1$, то $x = 10 - 1 = 9$ и т. д.

Значение неизвестной x зависит здесь, следовательно, от значения неизвестной y и меняется всякий раз в зависимости от значения, придаваемого y произвольно, однако, не выходя за предписанные задачею границы 1 — 9. И именно на основе этого соотношения в неопределенных уравнениях одна из *таких неизвестных*, как здесь x, была названа впервые *функцией от y* ⟦от другой неизвестной, независимо от x получающей последовательно различные значения⟧. Это был первый возникший в обыкновенной алгебре повод характеризовать *одну неизвестную как функцию другой*. При этом мы с самого начала абстрагируемся от таких количеств, как a, b, c, например, от 10 в приведенном выше уравнении $x + y = 10$, и определяем x только как *функцию* [от] y, *функцию той неизвестной*, от которой оно зависит, ибо a или 10 *уже определено* и сохраняет в каждом возможном решении этого уравнения *одно и то же значение*.

$f(y)$ oder x ändert seinen Wert abhängig von den *Veränderungen der Unbekannten* y, deren Funktion es ist.

Aber die *Veränderungen von* y selbst bestehn nur darin, dass innerhalb gewisser Grenzen ihm verschiedne Zahlenwerte *beliebig* beigelegt werden können, z. B. oben 9 verschiedne Werte. Legen wir ihm die Zahl 9 bei, so $x = 10 - 9 = 1$; wenn 8, so $x = 10 - 8 = 2$ usw. Jeder dieser beliebigen Zahlenwerte von y, von 1 — 9, löst die Gleichung, indem er für x einen der Annahme des Werts von y entsprechenden Wert produziert; aber y bleibt immer eine *konstante* Grösse, ob wir ihm den Wert 1, oder 8, oder 3 beilegen; es geht keine Änderung in ihm selbst vor, die es aus 1 zu 2 oder aus 8 zu 9 machte; es ist also *keine variable Grösse*, obgleich sein Wert von uns nach Belieben — innerhalb gewisser Grenzen — veränderbar ist. So ist auch im Ausdruck $\frac{m}{m-1}$, wo m *nicht wie* y *eine Unbekannte* ist, der Wert von m von uns beliebig *veränderbar*, weswegen m keineswegs eine *variable* Grösse wird; es ist nur eine *indeterminierte konstante Grösse*, die eben deswegen beliebige und jeden beliebigen Zahlenwert erhalten kann. Setzen wir $m = 1$, so $\frac{m}{m-1} = \frac{1}{0} = \infty$; setzen wir für m den Zahlenwert 3, so $\frac{m}{m-1} = \frac{3}{2}$ etc. Ebenso ist hier die

$f(y)$ или x меняет свое значение в зависимости от *изменений неизвестной* y, функцией которого она является.

Но *изменения* самой y состоят лишь в том, что, в известных границах, ей могут быть приписаны *по произволу* различные числовые значения, например, выше 9 различных значений. Если припишем ей значение 9, то $x = 10 - 9 = 1$; если 8, то $x = 10 - 8 = 2$, и т. д. Каждое из этих произвольных числовых значений для y, от 1 до 9, решает уравнение, доставляя для x значение, соответствующее допущенному для y; но, придаем ли мы y значения 1, или 8, или 3, y всегда остается при этом *постоянной*; в самой y не происходит никакого изменения, которое обращало бы ее из 1 в 2 или из 8 в 9; это, следовательно, *не переменная величина*, хотя ее значение может быть по произволу — в определенных границах — нами изменено. Так же и в выражении $\frac{m}{m-1}$, где m, *в отличие от* y, не есть *неизвестная*, значение m по произволу *изменяемо* нами, в силу чего m отнюдь не становится, однако, *переменной*; это лишь *неопределенная постоянная*, которая именно в силу этого может получать произвольное, и [притом] любое произвольное, числовое значение. Если положим $m = 1$, то $\frac{m}{m-1} = \frac{1}{0} = \infty$; если мы придадим m числовое значение

Unbekannte y in der Gleichung $x = 10 - y$, nicht dadurch von 10 unterschieden, dass 10 konstant und y variable wäre, sondern dadurch, dass 10 ein *determinierter* konstanter Grössenwert, der in jeder möglichen Lösung der Gleichung determiniert bleibt, während y ein *indeterminierter*, aber ebenfalls jedesmal *konstanter Grössenwert* ist und daher in der Lösung der Gleichung abwechselnd als 1, 2, etc. determiniert werden kann.

Die *unabhängige Unbekannte* y ist hier daher ebensowenig eine *variable Grösse* wie m im Ausdruck $\frac{m}{m-1}$; es ist *indeterminiert*, wie m es ist verglichen mit arithmetischen Zahlenwerten; es unterscheidet sich von m dadurch, dass m im algebraischen Ausdruck 1) keine *Unbekannte* ist, wie y; 2) dass nicht die Wertbestimmung einer andern *Unbekannten* x von der Wertbestimmung von m abhängt. Hätten wir dagegen die Gleichung

3, то $\frac{m}{m-1} = \frac{3}{2}$, и т. д. Точно так же и *неизвестная* y в уравнении $x = 10 - y$ отличается от 10 не тем, что 10 постоянная, а y переменная, а тем, что 10 есть *определенное* постоянное значение величины, остающееся определенным в каждом возможном решении этого уравнения, между тем как y есть *неопределенное*, но также всякий раз *постоянное значение величины*, а потому в решении уравнения может быть попеременно определено как 1, 2 и т. д.

Независимая неизвестная y здесь поэтому в той же мере не является *переменной величиной*, как и m в выражении $\frac{m}{m-1}$; она так же *не определена*, как не определена m по отношению к арифметическим числовым значениям; она отличается от m тем, 1) что m в алгебраическом выражении, в отличие от y, не есть *неизвестная*; 2) что от определения значения m не зависит определение значения некоторой другой *неизвестной* x. Но если бы мы имели уравнение

$$x = \frac{m}{m-1},$$

so würde der Wert von x abhängen von den verschiednen Zahlenwerten, die wir m beilegten.

Man sieht also, dass der *Begriff der Funktion*, wie er ursprünglich in der *indeterminate analysis* entstand, noch einen sehr be-

то значение x зависело бы от различных числовых значений, которые мы приписывали бы m.

Таким образом, мы видим, что *понятие функции*, как оно возникло первоначально в *неопределенном анализе*, имело schränkten, für gewisse Sorte von Gleichungen ausschliesslich geltenden Sinn hatte.

Kehren wir nun zu der Lösung der Gleichung $x = 10 - y$ zurück, so

еще очень ограниченный, применимый только к определенным видам уравнений, смысл.

Если мы вернемся теперь к решению уравнения $x = 10-y$, то

$$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$
$$x=9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Die 4 letzten Werte von $y = 6, 7, 8, 9$ liefern uns für x seine entsprechenden ersten Werte: 4, 3, 2, 1.

Also die Gleichungen

Четыре последних значения для $y = 6, 7, 8, 9$ дают нам для x его соответствующие первые значения: 4, 3, 2, 1.

Отсюда равенства:

$$6+4=10, \quad 7+3=10, \quad 8+2=10, \quad 9+1=10.$$

Dieselben 4 Gleichungen werden uns aber geliefert durch $y = 1, 2, 3, 4$ und $x = 9, 8, 7, 6$.

Das Problem lässt also in der Tat nur 5 *verschiedne* Lösungen zu:

Но те же 4 равенства мы получим при $y = 1, 2, 3, 4$, а $x = 9, 8, 7, 6$.

Задача допускает, таким образом, на самом деле лишь 5 *различных* решений:

$$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \quad x=9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5.$$

Hätten wir z. B. $x=\frac{y}{y-1}$, so würde die Lösung nicht anders sein als die für $[x=]\frac{m}{m-1}$; die Bedingung etwa, dass x eine ganze und positive Zahl sein müsse, würde die Aufgabe erschweren aber nichts am Charakter der Gleichung ändern.

b) Haben wir statt wie oben 2 *Gleichungen statt einer*, so kann das Problem nur *indeterminate* sein, wenn die 2 Gleichungen mehr als 2 *Unbekannte* enthalten. *Probleme dieser Art* ⟦wo Gleichungen ersten Grads unterstellt⟧ kommen in den ordinären *Elementarbüchern der Arithmetik* vor

Если бы мы имели, например, $x=\frac{y}{y-1}$, то решение не отличалось бы от такового для $[x=]\frac{m}{m-1}$; условие, чтобы x было целым и положительным числом, затруднило бы задачу, но в характере уравнения ничего не изменило бы.

b) Если *вместо одного*, как выше, даны два *уравнения*, то задача может быть *неопределенной*, только если эти два уравнения содержат больше двух *неизвестных*. *Задачи такого рода* ⟦где предполагаются лишь уравнения первой степени⟧ встречаются в обычных *элементарных* und werden gelöst durch die sogenannte *Regula Coeci* (*the Rule or Position of False*).

Z. B. 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, geben 50 sh. in einer Kneipe aus; ein Mann 3 sh., eine Frau 2 sh., ein Kind 1 sh.; *wieviele Personen waren da von jeder Klasse*?

Zahl der Männer sei $= p$, der *Weiber* $= q$, der *Kinder* $= r$; so haben wir:

учебниках арифметики и решаются при помощи так называемого *Regula Coeci* (*правила ложного положения*).

Например, 30 человек, мужчин, женщин и детей, потратили в трактире 50 шилл., причем каждый мужчина тратил 3 шилл., женщина — 2 шилл., а ребенок — 1 шилл. *Сколько было мужчин, женщин и детей*?

Пусть *число мужчин* $= p$, *женщин* $= q$ и *детей* $= r$; тогда получим:

$$1)\ p+q+r=30; \qquad 2)\ 3p+2q+r=50;$$

daraus p, q und r zu finden in *ganzen und positiven* Zahlen.

Gleichung 1) gibt $r = 30 - p - q$; also

отсюда требуется найти p, q и r в *целых и положительных* числах.

Уравнение 1) дает $r = 30 - p - q$; следовательно,

$$p+q<30;$$

setzen wir den Wert von r in 2-te Gleichung, so

подставив значение r во 2-е уравнение, получим

$$3p+2q+30-p-q=50;$$

also

значит

$$2p+q+30=50;$$

also:

отсюда

$$q=20-2p, \quad p+q=20-p<30.$$

Aus der Gleichung $q = 20 - 2p$ folgt, dass wenn $p = 10$, $q = 20 - 20 = 0$; wird daher grössere Zahl als 10 für p genommen, so würde q negativ; z. B. wenn $p = 11$, wird $p + q = 20 - p$ zu $11 + q = 20 - 11$, oder $q = 20 - 22 = -2$. Dies ausgeschlossen. Für p können wir also alle Zahlen nehmen, die nicht > 10. Wir erhalten dann 11 Antworten, erinnernd,

Из уравнения $q = 20 - 2p$ следует, что если $p = 10$, то $q = 20 - 20 = 0$; поэтому, если бы вместо p мы взяли число большее 10, то q стало бы отрицательным. Например, если $p = 11$, то $p + q = 20 - p$ превращается в $11 + q = 20 - 11$, или $q = 20 - 22 = -2$. Это исключено. Вместо p мы можем, следовательно, брать все числа, которые не > 10.

dass $p+q<30$, und $q=20-2p$ ⟦*ist daher* $p=0$, *so* $q=20$⟧:

Помня, что $p+q<30$, а $q=20-2p$ ⟦и что *поэтому* при $p=0$ $q=20$⟧, мы получаем тогда 11 ответов:

$$\begin{aligned} p&=\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\\ q&=20,\ 18,\ 16,\ 14,\ 12,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\\ r&=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20.\end{aligned}$$

Schliessen wir aus

Если мы исключим

$$\text{I)}\ p=0,\ q=20,\ r=10,$$

und

и

$$\text{II)}\ p=10,\ q=0,\ r=20,$$

d. h. erste und letzte Lösung, wo sub I) $p=0$ und sub II) $q=0$, so bleiben 9 Lösungen.

т. е. первое и последнее решения, где sub I) $p=0$, a sub II) $q=0$, то останется 9 решений.

B) 1) der Begriff der *Funktion* war also ursprünglich beschränkt auf die *Unbekannten* in *indeterminierten Gleichungen* (i. e. in Gleichungen, deren Zahl geringer ist als die der in ihnen vorkommenden Unbekannten), deren *Wert abhängt und daher wechselt* mit den *verschiednen* ⟦entweder ganz beliebigen oder durch das Problem selbst *innerhalb gewisser Grenzen beliebigen*⟧ *Werten*, die andern Unbekannten zugeschrieben werden.

B) 1) Таким образом, понятие *функции* первоначально ограничивалось теми *неизвестными* в *неопределенных уравнениях* (т. е. в уравнениях, число которых меньше числа входящих в них неизвестных), *значение которых зависит* от значений других неизвестных и *поэтому меняется с различными* ⟦либо совершенно произвольными, либо произвольными *в некоторых границах*, определяемых самой задачей⟧ *значениями*, приписываемыми другим неизвестным.

Z. B.

Например,

$$y=ax^2+bx+c;$$

hier y Funktion von x; in $y=axz+bx^2+cz^2$ ist y Funktion von x und z. In den Gleichungen:

здесь y есть функция от x; в $y=axz+bx^2+cz^2$ y есть функция от x и z. В уравнениях:

$$\text{a)}\ x^3+y^3=axy,\quad \text{b)}\ x^3+y^3+z^3=axz+byz+cxy$$

sind 1) mit Bezug auf b) x, y, z reziproke Funktionen von einander;

1) x, y и z суть, относительно b), взаимные функции одна от

2) mit Bezug auf y, das [in den ersten zwei Gleichungen] eine *explizite Funktion* von x oder [von] x und z, weil sein Wert gegeben, wenn der von x und z bestimmt ist, ist in b) eine *implizite Funktion* von x und z, weil, selbst wenn sie bekannt, noch algebraische Gleichung mit Bezug auf y zu lösen bleibt.

Also der Begriff der *Funktion*, wie er aus den indeterminierten Gleichungen sich ergab, war der: wollte man ausdrücken, dass eine *Grösse nicht bestimmbar*, ohne *andern Grössen vorher bestimmte Werte zu geben*, die eine unbestimmte Anzahl davon in einem und demselben Problem erhalten konnten, so bediente man sich des Worts *Funktion*, um die *Abhängigkeit* zu bezeichnen.

2) Der Begriff der *Funktion* ward später *generalisiert*; sie wurde auf *jede algebraische Unbekannte* ausgedehnt, deren Verhältnis zu den unbestimmten Grössen wovon sie abhängt, durch eine *algebraische Gleichung* ausdrückbar ist. Diese hiessen *algebraische Funktionen*. Die algebraischen Funktionen schliessen stets nur bestimmte Anzahl Glieder ein, wenn sie in der ihnen eignen Form ausgedrückt werden; *eigentliche Brüche* [127] aber, wie wir gesehn, nur entwickelbar in endlosen Reihen; auch auf sie der Begriff der *Funktion* übertragen und damit Weg gebahnt zu den *fonctions transcendentales*, wie *Logarithmen*,

других; 2) что же касается y, которая [в первых двух уравнениях] есть *явная функция* от x или от x и z, так как ее значение дано, когда определены значения x и z, то в b) y есть *неявная функция* от x и z, так как, даже когда они известны, остается еще решить для определения y алгебраическое уравнение.

Итак, понятие *функции*, как оно получилось из неопределенных уравнений, состояло в следующем: если хотели выразить, что *какая-либо величина неопределима*, без того чтобы *не придать предварительно определенных значений другим величинам*, которые могли получать неопределенное число таких значений в одной и той же задаче, то пользовались словом *функция* для обозначения *зависимости*.

2) В дальнейшем понятие *функции* было *обобщено*; оно было распространено на *всякую алгебраическую неизвестную*, зависимость которой от неопределенных величин может быть выражена *алгебраическим уравнением*. Такие функции назывались *алгебраическими*. Алгебраические функции содержат всегда лишь определенное число членов, когда эти функции выражаются в присущей им форме. Но *собственные дроби* [127], как мы видели, разложимы лишь в бесконечные ряды; на последние также было перенесено понятие *функции*, и тем самым был проложен путь к *трансцендентным функциям*, каковы

nur ausdruckbar durch eine unendliche Zahl von Wurzeln [128]; so *sinus* und *cosinus*, um sie durch ihre Bogen auszudrücken.

C) *Weitere Generalisation*, dass *nicht Gleichung nötig* zwischen mehren Grössen, damit eine [von ihnen] *implizite Funktion* der andern sei; es genügt, dass ihr Wert von deren Werten abhängt. Z. B. im Kreis der Sinus eine implizite Funktion des Bogens, obgleich keine algebraische Gleichung dies ausdrücken kann, weil eine von beiden bestimmt, wenn andre bestimmt und vice versa. (Vom Radius hier abgesehn, weil es sich nicht um einen bestimmten Bogen handelt [129].)

D) Der Begriff der *Funktion* enthält neue Fortbildung und Wichtigkeit durch die Descartes' Anwendung der Algebra auf die Geometrie, also durch die analytische oder höhere Geometrie. Die Unbekannten x, y etc. verwandeln sich in *variable Grössen* und die bekannten Grössen in *Konstante*.

Funktion einer Variablen ist eine andre Variable, deren Wert mit dem der ersten wechselt, also von ihm *abhängt*. Sie hat das gemein mit der Funktion in den unbestimmten Gleichungen, dass wenn ein partikulärer Wert der Variablen gegeben wird, deren Funktion sie ist, sie einen *bestimmten korrespondierenden* Wert erhält.

логарифмы, которые могут быть выражены лишь бесконечным числом корней [128]; также *синус* и *косинус*, если их нужно выразить через их дуги.

C) *Дальнейшее обобщение* [состоит в том, что] *не требуется уравнения* между несколькими величинами для того, чтобы одна [из них] была *неявной функцией* других; достаточно, чтобы ее значение зависело от их значений. Например, в круге синус — неявная функция дуги, хотя никакое алгебраическое уравнение не может выразить этого, так как одна из обеих определена, если определена другая, и наоборот. (От радиуса здесь отвлекаются, потому что речь не идет о какой-либо определенной дуге [129].)

D) Понятие *функции* получает дальнейшее развитие и важность благодаря Декартову применению алгебры к геометрии, т. е. благодаря аналитической или высшей геометрии. Неизвестные x, y и т. д. превращаются в *переменные величины*, а известные — в *постоянные* [величины].

Функция некоторой переменной есть другая переменная, значение которой меняется вместе со значением первой, т. е. *зависит* от него. Она имеет с функцией в неопределенных уравнениях то общее, что когда придается частное значение той переменной, функцией от которой она является, то она принимает некоторое *определенное соответствующее* значение.

Последняя, пятая часть рукописи (лл. 39—93, стр. 38—76, 74 (вместо 77—89) озаглавлена Марксом:

«V. Elimination zwischen Gleichungen von höheren Grad als dem ersten».

(«V. Исключение неизвестных из уравнений степени выше первой».)

По содержанию она относится прежде всего к главе под тем же названием из учебника Лакруа «Элементы алгебры» (§§ 185—196, стр. 257—271). Поскольку, однако, в тексте этой главы имеются ссылки на предыдущие главы, ранее не законспектированные Марксом, здесь конспект начинается с этих более ранних глав. И так как, далее, Маркс не ограничивается главой об исключении неизвестных, но включает в свой конспект и две следующие главы из курса Лакруа, то весь текст делится им в свою очередь на пять частей, занумерованных латинскими буквами от А до Е и озаглавленных:

«A. Bei den Gleichungen ersten Grades» («А. Для уравнений первой степени»), «B. Auffindung des grössten gemeinschaftlichen Masses» («В. Отыскание наибольшего общего делителя»), «C. Elimination zwischen Gleichungen von höheren Grad als dem ersten» (т. е. так же, как и весь раздел V тетради), «D. Untersuchung kommensurabler Wurzeln und gleicher Wurzeln numerischer Gleichungen» («D. Отыскание рациональных и кратных корней числовых уравнений»), «E. Lösung numerischer Gleichungen durch Approximation» («Е. Приближенное решение числовых уравнений»).

В части «А» (лл. 39—47, стр. 38—46) конспектируются две более ранние главы книги Лакруа, посвященные: 1) решению системы линейных уравнений путем последовательного исключения неизвестных (§§ 78—82, стр. 114—123) и 2) общим формулам для решений систем линейных уравнений (§§ 83—89, стр. 123—134).

В части «В» (лл. 47—52, стр. 46—51) содержатся выписки из главы «Об алгебраических дробях» (§§ 48—50, стр. 67—76) той же книги Лакруа, относящиеся к алгорифму Евклида для отыскания общего наибольшего делителя двух многочленов.

В части «С», законспектировав в пунктах 1)—6) (лл. 52—56, стр. 51—55) начало (§§ 185—190, стр. 257—262) той главы учебника Лакруа, которой должен был быть посвящен весь раздел V и которая содержит общий способ отыскания резольвенты двух уравнений

$$f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad g(x, y) = 0$$

методом нахождения наибольшего общего делителя многочленов $f(x, y)$ и $g(x, y)$, вплоть до частного примера, анализ которого Лакруа предпосылает изложению общего способа. Маркс пишет (л. 57):

7) Die Methode sub 6), *angewandt auf particular equations, kann auch auf allgemeine Gleichungen* angewandt werden.

7) Метод sub 6), *примененный к частным уравнениям*, может быть применен *также к общим уравнениям.*

За этим обобщением следует (лл. 57—58, стр. 56—57) приводимая ниже вставка, посвященная краткому изложению общей теории уравнений, трактуемой и средствами дифференциального исчисления. Источником для этой вставки Маркса послужил уже, по-видимому, «Трактат по алгебре» Маклорена.

ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ

⟦Wir bemerken vorher:

α) Eine allgemeine Gleichung wie

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + Tx + U = 0,$$

ist $f(x) = 0$.

Betrachten wir solchen Polynomial nicht als Gleichung, sondern es, d. h. die erste Seite, als Funktion von x, so, sobald x bestimmte Werte enthält, z. B. a, [erhalten wir] $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$; *mit den verschiednen Werten von x variiert Funktion x* [130]. Sobald x einen partikularen Wert a [annimmt] und dieser particular Wert a die $f(x)$ gleich 0 macht, also $f(a) = 0$, ... dann genügt der Wert a der Gleichung, löst sie, oder ist eine Wurzel derselben.

Die Untersuchung der Würzeln von $f(x) = 0$ ist identisch mit der Auflösung des Polynomial $f(x)$ in seine Faktoren. Denn wenn eine Wurzel a der Gleichung gefunden ist, ist der *entsprechende Faktor* $(x - a)$ *des Polynomials* bestimmt und *umgekehrt*. Dies dadurch bewiesen, dass Taylor's Reihe nie versagen kann für ein solches Polynomial.

Wir haben

$$f(x) = f(a + (x - a)) = f(a) + (x - a) f'(a) + \ldots + (x - a)^n.$$

Daher, wenn $f(a) = 0$, d. h. wenn a *eine Wurzel* ist, ist $x - a$ *ein Faktor*; und umgekehrt, wenn $x - a$ *ein Faktor ist*, ist $f(a) = 0$ und a *eine Wurzel*.

⟦Заметим сначала:

α) Общее уравнение, такое, как

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + Tx + U = 0,$$

имеет вид $f(x) = 0$.

Если мы рассматриваем такое полиномиальное выражение не как уравнение, но как — его первую сторону — функцию от x, то, когда x принимает определенные значения, например a, [мы получаем] $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$; *при различных значениях x изменяется функция x* [130]. Когда x [принимает] частное значение a и это частное значение a обращает $f(x)$ в 0, т. е. $f(a) = 0$, ... то значение a удовлетворяет уравнению, решает его или есть его корень.

Отыскание корней уравнения $f(x) = 0$ совпадает с разложением многочлена $f(x)$ на его множители, ибо отысканием какого-нибудь корня a уравнения определяется *соответствующий множитель* $(x - a)$ *многочлена*, и *наоборот*. Это доказывается тем, что ряд Тейлора всегда применим к такому многочлену.

Мы имеем

$$f(x) = f(a + (x - a)) = f(a) + (x - a) f'(a) + \ldots + (x - a)^n.$$

Поэтому, когда $f(a) = 0$, т. е. когда *a — корень*, то $x - a$ *— множитель*; и наоборот, когда $x - a$ *— множитель*, то $f(a) = 0$ и *a — корень*.

β) *Jede Gleichung hat soviel Wurzeln als sie Grade hat.*

$f(x)=0$ hat stets eine Wurzel[131], also stets einen Faktor von der *Form* $(x-a)$, *welcher sie genau dividiert.*

Der Quotient $\frac{f(x)}{x-a}$ ist eine Quantität von derselben Form wie $f(x)$, nur einen Grad niedriger. Er muss also einen Faktor haben von der Form $\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}$ und der Quotient von diesem ein Polynomial von $n-2$ *Dimension.* Weiter operierend in derselben Weise finden wir schliesslich einen Quotient, wo x keinen Grad hat $(x^0=1)$, also:

β) *Всякое уравнение имеет столько корней, какова его степень.*

$f(x)=0$ всегда имеет один корень[131], т. е. всегда имеет множитель *вида* $(x-a)$, *который делит* $f(x)$ *без остатка.*

Частное $\frac{f(x)}{x-a}$ имеет ту же форму, как и $f(x)$, но только в степени на единицу ниже. Оно должно, следовательно, иметь множитель вида $\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}$, и частное этого деления есть многочлен *степени* $n-2$. Оперируя дальше тем же способом, мы получим, наконец, частное, где x уже не имеет степени $(x^0=1)$, следовательно,

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}=1,$$

i.e. / т. е.

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, und keine andre Grösse kann Wurzel davon sein; denn substituieren wir andre Grösse Q für x, so

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ — корни уравнения $f(x)=0$, и никакая другая величина не может быть его корнем; в самом деле, если мы подставим какую-нибудь другую величину Q вместо x, то

$$f(Q)=(Q-a_1)(Q-a_2)\ldots(Q-a_n),$$

welches nicht $=0$; also kann Q keine Wurzel sein.

γ) *Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer Gleichung und ihren Wurzeln.* Die Wurzeln seien $a, b, c, \ldots, l$; dann, wenn wir allgemeine Gleichung haben of n-tem Grad, so

что не равно нулю; т. е. Q не может быть корнем.

γ) *Связь между коэффициентами уравнения и его корнями.* Пусть корнями будут $a, b, c, \ldots, l$; тогда, если мы имеем общее уравнение n-й степени, то

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)=$$
$$=x^n-x^{n-1}(a+b+c+d+\ldots)+x^{n-2}(ab+ac+\ldots+bc+\ldots)-$$
$$-x^{n-3}(abc+acd+\ldots)+\ldots+x(-1)^n abc\ldots l.$$

Bezeichnen wir durch Σ die Summe aller Quantitäten ähnlich der einen, der es vorgesetzt ist, so

Если мы обозначим через Σ сумму всех выражений, аналогичных тому, перед которым поставлен этот знак, то

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=$$
$$=x^n-x^{n-1}\sum(a)+x^{n-2}\sum(ab)-x^{n-3}\sum(abc)+\ldots+(-1)^n\,abc\,\ldots\,l.$$

Also allgemein: $(-1)^r p_r$ = *Summe aller Produkte von r Wurzeln.*]]

Итак, вообще $(-1)^r p_r$ = *сумме всех произведений из r корней.*]]

Закончив вставку, Маркс продолжает (лл. 58—65, стр. 57—64) конспект главы об исключении неизвестных из книги Лакруа (§§ 191—196, стр. 262—271), после чего переходит к части V своего конспекта (лл. 66—82, стр. 65—76, 74—78), относящейся к отысканию рациональных и кратных корней числовых уравнений. Эта часть содержит конспект главы под тем же названием из учебника Лакруа (§§ 197—210, стр. 271—288).

На листах 74—78 (стр. 73—76, 74) содержится следующее собственное замечание Маркса, относящееся к связи алгебры с дифференциальным исчислением:

О СВЯЗИ АЛГЕБРЫ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ИСЧИСЛЕНИЕМ

[[1) Wir bemerken zunächst, dass die allgemeine Gleichung, von der ausgegangen wird, ist

[[1) Заметим сначала, что общим уравнением, из которого исходят, является

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

oder $f(x)$ oder y = etc.

или $f(x)$ или y = и т. д.

Drehen wir die Gleichung um [132], so

Написав уравнение [132] в обратном порядке, получим

$$f(x)\ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y=U+Tx+\ldots+Qx^{m-2}+Px^{m-1}+x^m,$$

die wir auch schreiben könnten:

что можно было бы записать:

$$y=A+Bx+Cx^2+\ldots+Px^{m-2}+Qx^{m-1}+\ldots,$$

so dies nur als allgemeiner term.

так что это $[Qx^{m-1}]$ здесь лишь в качестве общего члена.

Also die letztere Gleichung, von der *Mac Laurin* ausgeht [133], nur die allgemeine Gleichung der Algebra für *eine Unbekannte* umgedreht, weil wir hier ascending line brauchen. Sonst der Unterschied nur, dass die Reihe für Gleichung vom Grad m $(m+1)$ Glieder

Таким образом, последнее уравнение, из которого исходит *Маклорен* [133], есть не что иное, как общее уравнение алгебры с *одной неизвестной*, написанное в обратном порядке потому, что нам нужен здесь возрастающий порядок степеней. В остальном отличие состоит лишь в том, что enthält, während hier *endlose Reihe* [134].

ряд для уравнения степени m содержит $(m+1)$ членов, между тем как здесь *бесконечный ряд* [134].

2) Was die Ableitung der Gleichungen aus der équation proposée oder ursprünglichen betrifft [135], so ist die Prozedur absolut dieselbe wie im Differentialcalculus und wie in der Tat *Mac Laurin sukzessiv die ursprüngliche Gleichung* $y =$ etc. differenziert. Also auch dies Verfahren aus der algebraischen in die Sprache des Differentialcalculus übersetzt.

2) Что касается выведения уравнений из предложенного, или первоначального, уравнения [135], то процедура в точности та же, что и в дифференциальном исчислении, как и поступает на самом деле *Маклорен, последовательно дифференцирующий первоначальное уравнение* $y = \ldots$ Таким образом, и этот способ представляет перевод с алгебраического языка на язык дифференциального исчисления.

3) *Lacroix* sagt, dass die Gleichung 2) oder (A) ⟦die erste Abgeleitete gefunden, indem in

3) *Лакруа* говорит, что уравнение 2) или (A) ⟦первая производная получается подстановкой x вместо a в

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}+\ldots+T=0,$$

gesetzt x statt a, was erlaubt, da a ein Wert von x⟧, dass also:

что допустимо, так как a есть одно из значений x⟧, так что

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}+\ldots+T=0 \text{ [136]}$$

direkt ableitbar aus der ursprünglichen:

непосредственно выводимо из первоначального:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

und zwar so: multipliziere jedes Glied mit dem Exponent der Potenz von x, die es enthält, und vermindre dann diesen Exponenten um 1. Wie $A=0$ direkt abgeleitet aus $V=0$, so $B=0$ durch Wiederholung desselben Verfahrens aus $A=0$, ditto $C=0$ aus $B=0$ etc. [137].

и притом так: помножь каждый член на показатель той степени x, которую он содержит, и уменьши затем этот показатель на единицу. Как равенство $A=0$ непосредственно выводится из $V=0$, так и равенство $B=0$ выводится из $A=0$ повторением того же приема. Аналогично $C=0$ из $B=0$ и т. д. [137].

Ist nicht einzusehen, was *auf Grundlage der gewöhnlichen*

Не видно, что позволяет *на основе обыкновенной алгебры*

Algebra berechtigt, jedes einzelne Glied, unabhängig von den andern Gliedern der Gleichung, individualiter, zu *verändern* durch beliebige Division oder Multiplikation. Aus x^m z. B. mache ich mx^{m-1}, indem ich multipliziere x^m mit m und es dividiere durch x, da $mx^{m-1} = m\frac{x^m}{x}$, wodurch ich also den Grössenwert dieses einen Glieds verändere, was ich nach der Algebra doch nur dürfte, wenn ich *alle Glieder mit m multiplizierte und durch x dividierte*; ich erhielte dann für Px^{m-1}, das 2-te Glied,

изменять с помощью произвольного деления или умножения каждый отдельный член уравнения независимо от других его членов, индивидуально. Из x^m, например, я делаю mx^{m-1}, умножая x^m на m и деля его на x; в самом деле, $mx^{m-1} = m\frac{x^m}{x}$; тем самым я изменяю, следовательно, численное значение этого члена, что мне, согласно алгебре, было бы позволено лишь при условии, что я *все члены помножил бы на m и поделил бы на x*; я получил бы тогда вместо Px^{m-1}, второго члена,

$$\frac{mPx^{m-1}}{x} = mPx^{m-2},$$

aber keineswegs $(m-1)\,Px^{m-2}$ etc.

Dies Verfahren erscheint also als Hysteron Proteron [138], indem das Differentialverfahren im geheimen unterstellt ist. ⟦Diese Bemerkung sofern falsch, als Lacroix nicht behauptet durch das Verfahren eine identische Gleichung zu erhalten, sondern nur, dass auf diesem Weg die Gleichung um einen Grad herabgesetzt wird. Er wusste dies allerdings nur aus dem Differentialcalculs.⟧

Der Beweis ist grade umgekehrt zu liefern, so dass die Differentialoperation aus der algebraischen hergeleitet wird.

но никак не $(m-1)\,Px^{m-2}$ и т. д.

Этот способ выступает, таким образом, как ги́стерон-про́терон [138], поскольку дифференциальный способ молча предполагается. ⟦Это замечание постольку неверно, поскольку утверждение Лакруа состоит не в том, что с помощью этого способа он получает равносильное уравнение, а только в том, что таким путем степень уравнения понижается на единицу. Он знал это, однако, лишь из дифференциального исчисления.⟧

Доказывать следовало бы противоположным путем, так, чтобы дифференциальная операция получалась из алгебраической.

$$\text{I)} \;\therefore\; x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots + Tx + U = 0;$$

setze ich $x = a + y$, so erhalte ich

полагая $x = a + y$, получим

$$(a+y)^m + P\,(a+y)^{m-1} + Q\,(a+y)^{m-2} + \ldots,$$

also:

$$
(\mathrm{Ia})\left\{\begin{array}{l}
1)\quad a^m + ma^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}y^2 + \ldots + y^m + \\
2)\ + Pa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2}y + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}Pa^{m-3}y^2 + \ldots + \\
3)\ + Qa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}y + \frac{(m-2)(m-3)}{1\cdot 2}Qa^{m-4}y^2 + \ldots + \\
4)\ + Ra^{m-3} + (m-3)Ra^{m-4}y + \frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}Ra^{m-5}y^2 + \ldots + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad + Ta + Ty + \\
\quad + U = 0.
\end{array}\right.
$$

Lese ich die Gleichung *horizontal*, so ist:

1) $a^m + ma^{m-1}y +$ etc. die Entwicklung von dem für x^m gesetzten $(a+y)^m$ nach dem binomischen Lehrsatz;

2) die binomische Entwicklung von $P(a+y)^{m-1}$;

3) die vom Binom $Q(a+y)^{m-2}$;

4) die von $R(a+y)^{m-3}$;

. . . .

5) die von $T(a+y)$ für den term Tx in der ursprünglichen Gleichung. Ich habe ferner das Recht, U an das Ende der ersten vertikalen Reihe zu setzen, da es mit den andern Gliedern derselbe Koeffizient *von* y^0 $(=1)$ *ist*.

Diese Resultate also erhalten durch *einfache Anwendung des binomischen Lehrsatzes*, indem ich das Monom $x =$ Binom $(y+a)$ gesetzt. Und diese Resultate liefern, *vertikal* gelesen, als erste Reihe:

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + Ra^{m-3} + \ldots + Ta + U,$$

die in fact identisch mit der ersten Gleichung 1), nur dass

следовательно,

При *горизонтальном* чтении этих выражений имеем:

1) $a^m + ma^{m-1}y +$ и т. д. есть разложение по биномиальной теореме для $(a+y)^m$, подставленного вместо x^m;

2) биномиальное разложение для $P(a+y)^{m-1}$;

3) то же для $Q(a+y)^{m-2}$;

4) то же для $R(a+y)^{m-3}$;

. . . .

5) то же для $T(a+y)$ вместо члена Tx в первоначальном уравнении. Я имею, далее, право поместить U в конце первого вертикального ряда, так как по аналогии с другими членами U *есть* тот же коэффициент *при* y^0 $(=1)$.

Эти результаты получены, следовательно, *простым применением биномиальной теоремы* при замене одночлена x двучленом $(y+a)$. И эти результаты, прочитанные *вертикально*, дают в качестве первого ряда

что фактически совпадает с уравнением 1), только при für x einer seiner Werte $= a$ gesetzt.

Da a — Wert von x [für welchen $f(x) = 0$], verschwindet diese Reihe von selbst oder ist $=0$. Es bleibt also übrig:

подстановке вместо x одного из его значений, равного a.

Так как a — значение x [при котором $f(x) = 0$], то этот ряд сам по себе исчезает или $=0$. Остается, следовательно,

$$\text{II)}\left\{\begin{array}{lllll} 1) & ma^{m-1}y & +\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2+\ldots+y^m+ \\ 2) & +(m-1)Pa^{m-2}y & +\frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2+\ldots+ \\ 3) & +(m-2)Qa^{m-3}y & +\frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2+\ldots+ \\ 4) & +(m-3)Ra^{m-4}y & +\frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2+\ldots+ \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +Ty=0. & \end{array}\right.$$

Dividiere ich sämtliche Glieder durch y [139], so erhalte ich:

Если я разделю все эти члены на y [139], то получу:

$$\text{IIa)}\left\{\begin{array}{lllll} 1) & ma^{m-1} & +\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y+\ldots+y^{m-1}+ \\ 2) & +(m-1)Pa^{m-2} & +\frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y+\ldots+ \\ 3) & +(m-2)Qa^{m-3} & +\frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y+\ldots+ \\ 4) & +(m-3)Ra^{m-4} & +\frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y+\ldots+ \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +T=0. & \end{array}\right.$$

Da hier die erste vertikale Reihe

Так как здесь первый вертикальный ряд

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}+(m-3)Ra^{m-4}+\ldots+T$$

kein y enthält, so muss sie $= 0$ sein, da sie $+$ andern vertikalen Reihen $= 0$ ist [140]. Sie ist also $= 0$, unabhängig von Werth von y.

Ich habe also:

не содержит y, то он должен быть равен 0, поскольку сумма его с другими вертикальными рядами равна 0 [140], т. е. она $=0$ независимо от значения y.

Я имею, следовательно,

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}+(m-3)Ra^{m-4}+\ldots+T=0.$$

Vergleiche ich nun die erste aus 1) abgeleitete Gleichung mit dieser, so finde ich:

Сравнивая теперь первое производное от 1) уравнение с этим, я нахожу:

I) oder $(V) =$

$$= a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + Ra^{m-3} + \ldots + Ta + U = 0,$$

II) oder $(A) =$

$$= ma^{m-1} + (m-1)\,Pa^{m-2} + (m-2)\,Qa^{m-3} + (m-3)\,Ra^{m-4} + \ldots + T = 0.$$

Setze ich hier in I) und II) wieder x, was ich kann, da a ein Wert von x, so werden sie:

I) oder $(V) =$

$$= x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots + Tx + U = 0,$$

II) oder $(A) =$

$$= mx^{m-1} + (m-1)\,Px^{m-2} + (m-2)\,Qx^{m-3} + (m-3)\,Rx^{m-4} + \ldots + T = 0.$$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen zeigt, dass (A) aus (V) erhalten ist, indem ich x^m mit seinem Exponenten m multipliziere und von selben Exponenten 1 abziehe; x^m wird dann mx^{m-1}. Ebenso verfahre ich mit den andern Gliedern; so multipliziere ich Px^{m-1} mit dem Exponenten von $x = m - 1$; es wird dann $(m-1)\,Px^{m-1}$; ich ziehe dann 1 von seinem Exponenten ab, und es wird schliesslich $(m-1)\,Px^{m-1-1} = (m-1)\,Px^{m-2}$ usf. Ebenso wird Tx zu T, indem ich es multipliziere mit dem Exponenten von $x = 1$ und 1 von seinem Exponenten abziehe, also $1 \cdot Tx^{1-1} = Tx^0 = T$. Endlich verschwindet $U = U \cdot x^0$, indem ich es mit dem Exponenten von $x = 0$ multipliziere.

I) или $(V) =$

II) или $(A) =$

Заменяя здесь снова в I) и II) a на x, что можно сделать, так как a есть одно из значений x, мы получим:

I) или $(V) =$

II) или $(A) =$

Сравнение этих двух уравнений показывает, что при получении (A) из (V) x^m умножается на его показатель степени m и из самого этого показателя вычитается 1; x^m обращается при этом в mx^{m-1}. Так же я поступаю с остальными членами; я умножаю, например, Px^{m-1} на показатель степени x, равный $m - 1$; получится $(m-1)\,Px^{m-1}$; вычитая затем 1 из показателя, получим окончательно $(m-1)\,Px^{m-1-1} = (m-1)Px^{m-2}$ и т. д. Так же Tx обращается в T, когда я умножаю его на показатель степени x, равный 1, и вычитаю 1 из его показателя степени, получая таким образом $1 \cdot Tx^{1-1} = Tx^0 = T$. Наконец, $U = U \cdot x^0$ исчезает, когда я помножаю его на показатель степени x, равный 0.

Ich gehe, um dies Resultat zu erhalten, nicht davon aus, dass ich so verfahren kann, sondern, die auf strikt algebraischer Basis aus $V = 0$ abgeleitete $A = 0$ zeigt, dass ich direkt so hätte verfahren können [141].

При получении этого результата я исхожу не из того, что могу так поступать, а из того, что $A = 0$, выведенное из $V = 0$ на строго алгебраической основе, показывает, что я мог бы и непосредственно поступать так [141].

Was nun die Ableitung von $B = 0$ aus $A = 0$ betrifft, so ist als Rest, da $A = 0$, also verschwunden ist, geblieben:

Что касается теперь вывода $B = 0$ из $A = 0$, то, поскольку $A = 0$, т. е. A исчезло, мы в качестве остатка получаем:

$$\text{III)}\left\{\begin{array}{ll} 1) & \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} y + \ldots + y^{m-1} + \\ 2) & + \frac{(m-1)(m-2)}{2} P a^{m-3} y + \ldots + \\ 3) & + \frac{(m-2)(m-3)}{2} Q a^{m-4} y + \ldots + \\ 4) & + \frac{(m-3)(m-4)}{2} R a^{m-5} y + \ldots + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\frac{2S}{2} y\right] = 0. \end{array}\right.$$

Da alle Glieder der ersten Seite [,welche] = 0, durch 2 dividiert sind, kann ich die ganze Gleichung mit 2 multiplizieren und beseitige damit diesen Nenner. Da ferner alle Glieder y als gemeinschaftlichen Koeffizienten haben, kann ich die ganze Gleichung durch y dividieren und beseitige damit y [in der ersten Reihe]. Ich erhalte dann III) oder (B):

III) oder $(B) =$

Так как все члены [первого столбца] первой стороны, равной 0, имеют знаменатель 2, то я могу все уравнение помножить на 2 и таким образом устранить этот знаменатель. Так как, далее, все члены содержат y в качестве общего коэффициента, то я могу разделить все уравнение на y и устранить таким образом y [в первом столбце]. Я получаю тогда III) или (B):

III) или $(B) =$

$$= m(m-1) a^{m-2} + (m-1)(m-2) P a^{m-3} + (m-2)(m-3) Q a^{m-4} + \\ + (m-3)(m-4) R a^{m-5} + \ldots + [2 \cdot 1 \cdot S].$$

Setze ich in dieser Gleichung wieder x für a und vergleiche

Заменяя в этом уравнении снова a на x и сравнивая его sie mit Gleichung II) oder (A), so:

с уравнением II) или (A), получим:

$$(A) = mx^{m-1} + (m-1)\,Px^{m-2} + (m-2)\,Qx^{m-3} + \\ + (m-3)\,Rx^{m-4} + \ldots + T,$$

$$(B) = m\,(m-1)\,x^{m-2} + (m-1)(m-2)\,Px^{m-3} + \\ + (m-2)\,(m-3)Qx^{m-4} + (m-3)(m-4)\,Rx^{m-5} + \ldots\ [+2\cdot 1\cdot S].$$

Die Vergleichung zeigt, dass $B = 0$ aus $A = 0$ abgeleitet, wie $A=0$ aus $V=0$ [142]. mx^{m-1} wird verwandelt in $m\,(m-1)x^{m-2}$, also mx^{m-1} multipliziert mit seinem Exponenten $m-1$, und dieser Exponent selbst um 1 vermindert oder x^{m-1} durch x dividiert; wir erhalten:

Это сравнение показывает, что $B = 0$ так же выводится из $A = 0$, как $A = 0$ из $V = 0$ [142]. mx^{m-1} преобразуется в $m\,(m-1)\,x^{m-2}$, т. е. mx^{m-1} помножается на его показатель степени $m-1$, а сам этот показатель степени уменьшается на 1, т. е. x^{m-1} делится на x; мы получаем:

$$m\,(m-1)\,\frac{x^{m-1}}{x} \quad \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \quad m\,(m-1)\,x^{m-1-1} = m\,(m-1)\,x^{m-2},$$

und so mit jedem folgenden Glied. $[2S]$ verschwindet, denn sein Koeffizient x^0; es verschwindet durch die Multiplikation mit 0, also mit dem Exponenten 0 von x usw.

и так с каждым следующим членом. $[2S]$ исчезает, поскольку его коэффициентом является x^0; он исчезает при умножении на 0, т. е. на показатель 0 при x, и т. д.

Das Verfahren der *sukzessiven Differentiation*, wie im *Mac Laurinschen* Theorem angewandt, ist also ebenso aus der gewöhnlichen Algebra entlehnt, wie die *allgemeine* Form der Funktion x, von der er entgeht, die *allgemeine algebraische Gleichung mit einer Unbekannten* ist, nur dass statt einer bestimmten Gleichung der polynomische Ausdruck der allgemeinen Funktion von x als *endlose Reihe* erscheint. ⟦Ob ich den Ausdruck

Способ *последовательного дифференцирования*, примененный в теореме *Маклорена*, также, следовательно, заимствован из обычной алгебры, как и *общая* форма функции x, из которой он исходит и которая представляет собою *общее алгебраическое уравнение с одной неизвестной*, отличающееся только тем, что вместо некоторого определенного уравнения появляется полиномиальное выражение общей функции от x в виде *бесконечного ряда*. ⟦Рассматриваю ли я выражение

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U,$$

als Gleichung $= 0$ oder ob ich

приравненное 0, или только как

ihn nur als Funktion von x betrachte, ohne Rücksicht auf seine Gleichheit mit 0, tut nichts zur Sache. Es bleibt stets der allgemeine *polynomial Ausdruck* der Gleichung [143].]]

Dass Mac Laurin *die Reihe umkehrt*, i. e. statt von vorn von hinten anfangend schreibt, ist wieder kein willkürliches Kunststück, sondern beruht einfach auf dem binomischen Lehrsatz.

Nehme ich ein Binom mit einer Unbekannten in der einfachsten Form, also $x + a$, in einer unbestimmten Potenz — wo sowohl x wie a wieder so vielgliedrige Ausdrücken präsentieren können, wie man will — so wenn ich x zum ersten Glied mache und a zum 2-ten, erhalte ich $(x + a)^m$, und hier wird x entwickelt, während a nur als Faktor a, a^2 etc. der verschiednen abgeleiteten Funktionen von x^m auftritt; und *umgekehrt*, wenn ich a zum ersten Glied und x zum letzten mache, also $(a + x)^m$ schreibe, dann entwickle ich a^m mit seinen abgeleiteten Ausdrücken ma^{m-1} ...

Im Differentialcalculus können überhaupt, ausgehend von dem ersten Polynomialausdruck, der die Funktion von x ist, alle weiteren Ableitungen nur als abgeleitete Funktionen der Variablen x figurieren.

Statt dass also in der Algebra $x = a + y$ gesetzt wird,

функцию от x независимо от ее равенства 0, существо дела от этого не меняется. В обоих случаях речь идет лишь об общем *полиномиальном выражении* этого уравнения [143].]]

То, что Маклорен *оборачивает этот ряд*, т. е. пишет его, начиная не с первого члена, а с последнего, также не является произвольным искусственным приемом, но просто основано на биномиальной теореме.

Если я представлю бином с одной неизвестной в его простейшей форме, т. е. $x + a$ в неопределенной степени,— где как x, так и a в свою очередь могут представлять какие угодно многочленные выражения,— то, если я делаю x первым членом, а a вторым, я получаю $(x + a)^m$, и здесь разложение происходит по x, между тем как a фигурирует только как множитель a, a^2 и т. д. при различных произведенных функциях от x^m; и, *наоборот*, если я делаю a первым членом, а x последним, т. е. пишу $(a + x)^m$, то я разлагаю a^m с его произведенными выражениями ma^{m-1} и др.

Когда мы в дифференциальном исчислении исходим из первого полиномиального выражения, являющегося функцией от x, то все дальнейшие производные могут фигурировать вообще только как произведенные функции переменной x.

Вместо того, чтобы полагать, как в алгебре, $x = a + y$, здесь wird hier erst $(x+a)$ entwickelt, und dann $a=0$ [144] gesetzt, was zu selbem Resultat führt, da das y auch in der algebraischen Ableitung auf algebraischen Weg wieder entfernt wird durch sukzessive Division beider Seiten der Gleichung durch y [145].

Die einzelnen Glieder der algebraischen Gleichungen liefern uns zugleich den allgemeinen Beweis, dass die nächst abgeleitete Funktion von x^m ist gleich mx^{m-1}, von mx^{m-1} ist gleich $m(m-1)x^{m-2}$ etc., und so dem Grund nach [den Beweis] der sukzessiven Differentiation.

Mac Laurins Ausgangsgleichung ist:

сначала развертывается $(x+a)$ и затем полагается $a=0$ [144], что ведет к тому же результату, так как и в алгебраическом выводе y удаляется затем алгебраическим путем посредством последовательного деления обеих сторон уравнения на y [145].

Отдельные члены алгебраических уравнений дают нам в то же время общее доказательство того, что ближайшая произведенная функция от x^m равна mx^{m-1}, от mx^{m-1} равна $m(m-1)x^{m-2}$ и т. д., т.е., по существу, [доказательство] последовательного дифференцирования.

Исходное уравнение Маклорена:

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots,$$

Taylors:

Тейлора:

$$y_1=y+Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4+\ldots$$

In beiden Fällen handelt es sich darum, die unbestimmten Koeffizienten A, B, C etc. zu bestimmen; im ersten Fall sind sie *Konstante*, wie $a^m+Pa^{m-1}+$ + etc., $ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+$ + etc. in der algebraischen Ableitung der Gleichungen V, A etc. sind, Entwicklungen des gegebnen Werts a von x; im 2-ten Fall sind A, B, C etc. unbestimmte *Funktionen der Variablen* x; aber hier ist wieder die Analogie der Algebra. Zur Lösung der allgemeinen Gleichungen mit 2 Unbekannten nehmen wir:

В обоих случаях речь идет о том, чтобы определить неопределенные коэффициенты A, B, C и т. д.; в первом случае они — *постоянные*, какими в алгебраическом выводе выражений V, A и т. д. являются $a^m+Pa^{m-1}+$ $+\ldots, ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+\ldots$, представляющие собой ряды по степеням данного значения a переменной x; во втором случае A, B, C и т. д.— неопределенные *функции переменной* x; но и здесь снова аналогия с алгеброй. Для решения общих уравнений с двумя неизвестными мы приводим их к виду:

$$1)\quad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

$$2)\quad x^n+P_1x^{n-1}+Q_1x^{n-2}+\ldots+Y_1x+Z_1=0;$$

was hier eliminiert wird, ist x, und was zu finden, sind die Koeffizienten p, q [etc.], p_1, q_1 etc., welche Funktionen der 2-ten Unbekannten y enthalten, welche die Finalgleichung liefert [146]; man hat bloss h für x zu setzen, so wird die erste Gleichung statt $x^m +$ etc.

из них исключается x, и [для этого] требуется найти коэффициенты p, q [и т. д.], p_1, q_1 и т. д., содержащие функции второй неизвестной y, входящие в заключительное уравнение [146]; нужно только заменить x на h, чтобы первое уравнение вместо $x^m +$ и т. д. обратилось в

$$f(x) \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y\right) + Px + Qx^2 + \ldots \text{ [147].]}$$

Помещенная на листах 83—93 (стр. 79—89) последняя часть тетради «Е» представляет собою конспект главы о приближенном решении числовых уравнений из «Элементов алгебры» Лакруа (§§ 211—222, стр. 289—312). Этой главой в книге Лакруа завершается изложение общей теории алгебраических уравнений. Следующая глава книги называется: «О пропорциях и прогрессиях», и с ее рассмотрения Маркс начинает тетрадь «Алгебра II» (см. рукопись 3933).

ТЕТРАДЬ «АЛГЕБРА II»

Ед. хр. 3933

Тетрадь, озаглавленная Марксом «Алгебра II» и состоящая из 92 листов (стр. 1—67, 48—72 в нумерации Маркса), представляет собою продолжение тетради «Алгебра I» (рукопись 3932) и по содержанию естественно подразделяется на три части: первую, в которой завершается конспект «Элементов алгебры» Лакруа; вторую, посвященную специально теореме о биноме Ньютона и вопросам комбинаторики, знакомство с которыми предполагается в ее доказательстве; третью, где конспектируется «Трактат по алгебре» Маклорена.

Коротко, содержание этих частей состоит в следующем:

I. Лл. 1—25. Разделы VI — VII содержат конспект глав: «О пропорциях и прогрессиях», «Теория показательных величин и логарифмов», «Вопросы, относящиеся к денежным интересам» из книги Лакруа, с вставками из других источников.

II. Лл. 26—67. Эта часть рукописи после первых двух страниц (раздел VIII), посвященных «варьированию» (линейной зависимости одной величины от другой, ее квадрата, корня, произведения других и т. д.), представляет уже собою не просто конспект, а систематизацию большого материала из самых разнообразных источников. Сначала (лл. 27—38)— в порядке подготовки аппарата, нужного для теоремы о биноме Ньютона,— рассматриваются вопросы комбинаторики: конечные множества объектов («комбинации»), различные способы образования комбинаций (составления полных списков комбинаций определенного вида) и подсчет числа комбинаций разных видов без предварительного составления их списков.

Затем (лл. 38—68) следует раздел под заголовком **«C) Das binomische Theorem» («С. Биномиальная теорема»)**. Здесь сначала (подраздел I, лл. 38—40) приводится материал, свидетельствующий об эмпирическом происхождении теоремы. Затем (подраздел II, лл. 41—51) дается ее доказательство для целого положительного показателя n степени бинома (средствами комбинаторики). Наконец (подраздел III, лл. 51—68), под заголовком **«Allgemeines binomisches Theorem» («Общая биномиальная теорема»)** подбирается материал, относящийся к обобщениям теоремы на случай дробного и отрицательного показателя n степени бинома, к применениям обобщенной теоремы для вычисления корней и разложения в ряды.

Среди источников здесь имеются и классические труды Эйлера и Маклорена (конспектируя которые Маркс всегда называет имя автора), и большое число разных учебников алгебры — английских и немецких (фамилии авторов которых Маркс, очевидно, не считал нужным запоминать). Среди этих источников есть и такие, авторы которых еще не установлены.

III. Лл. 68—92. Конспект «Трактата по алгебре» Маклорена, главы XIV первой части и первых пяти глав второй части (продолжение конспекта см. в рукописи 3934). Здесь рассматриваются вопросы соизмеримости и несоизмеримости (алгорифм Евклида), «о числе корней, которые может иметь уравнение любой степени», о симметрических функциях, о числе положительных (соответственно отрицательных) корней уравнения (правило знаков Декарта); особое внимание уделяется вопросу о кратных корнях уравнения, поскольку с ним связано появление производных функций в алгебре. Этот конспект содержит большое число замечаний Маркса.

Дадим теперь подробное описание рукописи.

Л. 1 (у Маркса без номера). На заглавной странице написано: «**Algebra II**».

Лл. 2—9 (у Маркса 1—8). «**VI. Proportionen und Progressionen**» («**VI. Пропорции и прогрессии**»). Конспект главы под тем же названием из той же книги Лакруа (§§ 223—236, стр. 312—317).

Подводя итог рассмотрению различных видов производных пропорций, Маркс (л. 3) кратко формулирует заключение, к которому приходит Лакруа, следующим образом:

4) Das unter 1), 2), 3) gegebne enthält in fact die Grundsuppe der Theorie of proportion; die *ganze Doktrin überflüssig*, da *für jede Proportion ihre entsprechende Gleichung gesetzt werden kann*. Die besondere Behandlung der *Proportion* nur insofern noch nützlich, als sie leichten Übergang zur *Progression* bildet.

4) Изложенное в пунктах 1), 2), 3) содержит фактически экстракт теории пропорций; *вся доктрина излишня*, так как *вместо всякой пропорции может быть подставлено соответствующее ей уравнение*. Особое рассмотрение *пропорции* лишь постольку еще полезно, поскольку оно дает легкий переход к *прогрессии*.

Конспектируя раздел о прогрессиях, Маркс подчеркивает те места из Лакруа, где речь идет о «бесконечном продолжении ряда» (стр. 326), о том, что «разложение

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\text{ и т. д.}$$

может рассматриваться как значение дроби $\frac{m}{m-1}$ всякий раз, когда оно сходится» (стр. 327—328)[148], и что сходимость имеет место, только когда m превосходит единицу. «Во всех других случаях [при делении углом m на $m-1$] нельзя пренебрегать остатками, так как своим постоянным возрастанием они доказывают, что частные все более и более удаляются от истинного значения» (стр. 328).

Лл. 9—25 (у Маркса 8—24). «**VII. Exponentielle Grössen und Logarithmen**» («**VII. Показательные величины и логарифмы**»). Этот раздел тетради начинается с конспекта главы на ту же тему из книги Лакруа. Конспектируя §§ 238—250 (стр. 331—346), Маркс нумерует их (в том числе и большое примечание на стр. 337—341) цифрами 1—13. Посвященный арифметическому дополнению к логарифму § 248 (стр. 342—345; § 12, лл. 13—14 в рукописи

Маркса) законспектирован Марксом не полностью. Конспект заканчивается следующей выпиской (л. 14) из Лакруа (стр. 344):

Durch diese Operation verwandeln wir also Subtraktion in Addition, indem wir statt der abzuziehenden Zahl ihr *arithmetisches Komplement* gebrauchen.

Посредством этой операции мы превращаем, таким образом, вычитание в сложение, употребляя вместо числа, которое нужно вычесть, его *арифметическое дополнение*.

Вслед за ней Маркс пишет: «⟦**Weiteres hierüber in späterem §**⟧» ⟦«**Дальнейшее об этом в более позднем §**»⟧. В связи с этим замечанием см. ниже «Л. 25, внизу» (стр. 373).

В § 13 (лл. 14—16), посвященном способу перехода от одной системы логарифмов к любой другой, Маркс перемежает конспект соответствующего параграфа (§ 250) из Лакруа с конспектом из книги: J. Hind, «The Elements of Plane and Spherical Trigonometry», 3rd ed., Cambridge, 1837, гл. VII «The Calculation of Logarithms and the Construction of Mathematical Tables» (Дж. Хайнд, «Элементы плоской и сферической тригонометрии», изд. 3-е, Кембридж, 1837, гл. VII «Вычисление логарифмов и построение математических таблиц»), §§ 162—177. Здесь записи Маркса не следуют строго за текстом Хайнда. Речь в этих записях идет о различных системах логарифмов: десятичной (которая называется «common system of logarithms oder das von Briggs» — «обычная система логарифмов или система Бригса») и натуральной, которая, как это было еще обычно в большинстве руководств XIX века, отождествляется с Неперовой.

§ 14 (лл. 16—19) под заголовком «**Kalkulation der Basis des Napierschen Systems**» («**Вычисление основания Неперовой системы**») начинается со следующего замечания Маркса:

a) *Ausgangspunkt* ist die exponentielle Gleichung $y = a^x$; und das, worauf es zunächst ankommt, ist a^x auszudrücken in terms [,i. e. positiven ganzen Potenzen] von a (der Basis) und x, i. e. der Basis und ihrem Exponenten, welcher der Logarithmus von y ist. Um dies Kunststück fertigzubringen — *auf Basis gewöhnlicher Algebra* —, ist zunächst das Monom a^x zu verwandeln in ein *Binom*; und da jede *Grösse* = *ihr selbst* + 1 — 1, so steht nichts im Weg zu schreiben statt des Monoms a^x — das Binom $(a + 1 - 1)^x$ oder, was dasselbe, $\{1 + (a-1)\}^x$, wo 1 — erstes Glied des

a) *Исходным пунктом* является показательное уравнение $y = a^x$, и задача состоит прежде всего в том, чтобы выразить a^x в членах [т. е. положительных целых степенях] a (основания) и x, т. е. основания и его показателя степени, который есть логарифм от y. Чтобы осуществить этот трюк — *на основе обыкновенной алгебры*,— нужно прежде всего превратить моном a^x в *бином*; и так как всякая *величина равна ей самой* + 1 — — 1, то ничто не мешает написать вместо монома a^x бином $(a + 1 - 1)^x$ или, что то же самое, $\{1 + (a - 1)\}^x$, где 1 — это первый член бинома, а

Binoms und $(a-1)$ — zweites. Wir erhalten so für a^x *eine Reihe aufsteigend in positiven ganzen Potenzen von* x, durch Anwendung des binomischen Theorems. Die Methode unbestimmter Koeffizienten und deren Bestimmung durch Anwendung zweier verschiedner Entwicklungsausdrücke für dieselbe Funktion löst die Sache; letzteres selbst beruht hier darauf, dass $f(x)\cdot f(z) = f(x+z)$ [149].

$(a-1)$ — второй. Так мы получаем для a^x *ряд по возрастающим положительным целым степеням* x, применяя биномиальную теорему. Вопрос решается методом неопределенных коэффициентов и их определением с помощью двух различных выражений для разложения в ряд одной и той же функции; последнее само основано здесь на том, что $f(x)\cdot f(z) = f(x+z)$ [149].

Вслед за этим Маркс подробно конспектирует ту же главу из книги Хайнда, теперь уже с самого ее начала, т. е. §§ 160—165, стр. 154—158. Весь этот § 14 рукописи подразделяется на три пункта: a), b), c).

В пункте a), вслед за приведенной здесь выдержкой из него, содержится обычный для большинства курсов анализа и алгебры первой половины XIX века вывод «экспоненциальной теоремы»:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{A^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{A^px^p}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\, p} + \ldots$$

$\left(\text{где } A = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots\right)$ методом неопределенных коэффициентов (см. Примечание [149]).

Пункт b) (л. 18) озаглавлен Марксом: «**b) Aus der Gleichung $y = a^x$ abzuleiten Ausdruck von x (der Logarithmus) in terms of a und y**» («**b) Из уравнения $y = a^x$ вывести выражение для x (для логарифма) в членах a и y**»).

Это выражение получается в виде частного двух логарифмических рядов:

$$\frac{L}{A} = \frac{(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots}\,.$$

Вслед за этим говорится:

Dieser Ausdruck von x ohne praktischen Wert für die arithmetische Berechnung von x, *ausser sofern beide Reihen*, die des Zählers und die des Nenners, *konvergieren*.

Это выражение для x не имеет практического значения для арифметического вычисления x, *за исключением того случая, когда оба ряда* — в числителе и в знаменателе — *сходятся*.

Пункт c) (лл. 18—19) носит заголовок: «**c) Berechnung des numerischen Werts der Basis des Napierschen Systems der Logarithmen**» («**c) Вычисление численного значения основания неперовой системы логарифмов**»). Этот пункт содержит определение основания e натуральных логарифмов как такого значения a, при котором $A = 1$, и, далее, вычисление e с помощью суммирования десяти членов полученного таким образом из «экспоненциальной теоремы» ряда для e. Это вычисление — с ошибкой в 6-м знаке после запятой: $e = 2{,}71828276$ — приводится Марксом в его конспекте полностью. Наличие той же ошибки в цитированной выше книге Хайнда окончательно решает вопрос об остававшемся долгое время неизвестным источнике листов 14—19 рукописи 3933.

В § 15 (л. 19) речь идет об отрицательных логарифмах, логарифмах нуля и отрицательных чисел. Начало этого параграфа представляет собой конспект § 251 «Элементов алгебры» Лакруа (стр. 346). В этом параграфе Лакруа объясняет (обычным и теперь образом) смысл слов «логарифм нуля равен отрицательной бесконечности», которые «встречаются во многих таблицах». Записав это объяснение, Маркс пишет далее:

Gewöhnlich dies so argumentiert:

Обычно это аргументируется так:

$$0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = a^{-\infty}.$$

После этого Маркс продолжает:

Die Gleichung

Уравнение

$$-y = a^x \quad \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \quad y = -a^x$$

kann weder durch positiven noch negativen Wert von x erfüllt werden; daher *Logarithmen negativer Grössen* können keine Existenz haben in einem System, dessen *Basis eine reale Grösse* ist; sie sind deshalb *imaginär.*

не может быть удовлетворено ни положительным, ни отрицательным значением x; поэтому *логарифмы отрицательных величин* не могут существовать в системе, *основание* которой — *действительная величина*; они в силу этого *мнимые.*

Источником обоих этих мест (их нет у Лакруа) является тот же, цитированный выше, учебник тригонометрии Хайнда, теперь уже глава IV, «The Nature and Properties of Logarithms» («Природа и свойства логарифмов»), самое ее начало: §§ 89—90, стр. 67—68. Впрочем, по содержанию к этим параграфам очень близко и начало главы XI (стр. 239—240) другой книги того же автора, «The Elements of Algebra» («Элементы алгебры»), изд. 4-е, Кембридж, 1839.

Вслед за этим, на лл. 19—20 (18—19 по Марксу), заканчивается конспект главы VII, «Показательные величины и логарифмы» книги Лакруа.

Лл. 20—25 (у Маркса 19—24). Под заголовком «**16) Die Theorie der Progressionen by Quotient und die der Logarithmen sind anwendbar auf Geldzinsprobleme**» («**16) Теория геометрических прогрессий и теория логарифмов применимы к задачам на проценты с капитала**») конспектируется следующая, последняя глава книги Лакруа (§§ 256—262, стр. 349—358), посвященная этим применениям.

Конспект заканчивается следующим замечанием [150] (л. 25):

Wird n *infinite*, dann $a = Ar$ und $A = \frac{a}{r}$; a wird dann eine *perpetuity*; A ist the *present*

Если n становится *бесконечным*, то $a = Ar$ и $A = \frac{a}{r}$; a становится тогда «*вечным*»; A есть *value* der *perpetuity*. Setzt man den allgemeinen Ausdruck von A unter der Form:

наличная стоимость этой *«вечности»*. Если мы представим общее выражение для A в виде

$$A = \frac{a}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\} = \frac{a}{r} - \frac{a}{r(1+r)^n},$$

so gesehn die *Differenz* zwischen $\frac{a}{r}$, der *present value einer perpetuity a* und der *value einer annuity vom selben Betrag* [während $n < \infty$ Jahre on Raten $= a$].

Leases häufig genommen auf termin *von* 99 *Jahren*; setzen wir diese Zahl herein und unterstellen Zinsrate $= 5\%$ oder $r = \frac{1}{20}$, so $A = 20a\left(1 - \frac{1}{125}\right)$ für die *present value einer lease von* 99 *Jahren*; ihr Preis differiert nur um $\frac{1}{125}$ von der present value einer perpetuity vom selben Betrag[151].

то увидим *разность* между $\frac{a}{r}$, *наличной стоимостью некоторой вечности a* и [наличной] *стоимостью ссуды, погашаемой ежегодно* [в течение $n < \infty$ лет взносами] той же величины [$= a$].

Аренды часто заключаются на срок *в* 99 *лет*; если мы подставим это число и положим прирост $= 5\%$, т. е. $r = \frac{1}{20}$, то [получим] $A = 20a\left(1 - \frac{1}{125}\right)$ для *наличной стоимости аренды на* 99 *лет*; ее цена отличается лишь на $\frac{1}{125}$ от наличной стоимости «вечности» [при ежегодных взносах] того же размера[151].

Л. 25 (у Маркса 24), внизу. **«17) (Nachtrag zu § 12, p. 12 u. 13 über arithmetisches Complement)» («17) (Добавление к § 12, стр. 12 и 13 об арифметическом дополнении)»).** Это, намеченное Марксом ранее (см. стр. 370), добавление и здесь, однако, осталось ненаписанным.

Маркс все же не отказался, по-видимому, от своего намерения вернуться к этому вопросу, поскольку часть страницы под этим заголовком и вся следующая страница тетради остались пустыми: в фотокопиях нет страницы с Марксовым номером 25.

Лл. 26—68 (у Маркса 26—67, 48). Во всей этой части рукописи (за исключением л. 68) нумерации Маркса и архива совпадают. Дальше поэтому, вплоть до л. 67, будет приводиться только нумерация архива. Раздел VIII содержит материал, относящийся к комбинаторике и теореме о биноме Ньютона. Вверху л. 26 написано: **«VIII. (Fortsetzung zur Theorie der Gleichungen siehe Heft I, Algebra)» («VIII. (Продолжение теории уравнений смотри в тетради I, Алгебра)»).**

Лл. 26—27. **«A) Variation» («A. Варьирование»).** Под «варьированием» здесь имеется в виду изменение одних величин пропорционально другим, их произведению, частному, корню квадратному из их произведения и т. п. Для обозначения того, что y изменяется пропорционально x, вводится символ $\propto$, и выражение $y \propto x$ предлагается читать: «y variiert wie x» («y варьирует, как x»).

Доказываются свойства варьирования, такие, как:

$$\text{если } y \propto x \text{ и } x \propto z, \text{ то } y \propto z;$$

$$\text{если } y \propto x \text{ и } x \propto z, \text{ то } x \propto \sqrt{yz}, \text{ и др.}$$

Приводятся примеры из геометрии, коммерческой арифметики (проценты на капитал) и др. Одним из наиболее вероятных источников является книга: H. Goodwin, «An Elementary Course of Mathematics» (Г. Гудвин, «Элементарный курс математики»), Кембридж, изд. 4, 1853[152].

Действительно, начало раздела о «варьировании» в рукописи гласит:

A) *Variation.* Wenn irgendeine *Grösse y abhängt von einer andern x* so, dass, wenn x seinen Wert wechselt, ein entsprechender proportionierter Wertwechsel in y vorgeht, dann gesagt, dass *y variiert wie x* und dafür angewandt das Symbol $\propto$; also $y \propto x$.

Z. B. bei Euklid VI, 1: «*Dreiecke und Parallelogramme von derselben Höhe verhalten sich zueinander wie ihre Basen*». Verdoppeln wir die Base von $\triangle$ oder Parallelogramm, deren Höhe dieselbe bleibt, so verdoppeln wir ihren Flächenraum, und im Verhältnis, worin wir die Base verändern, im selben Verhältnis ändert sich der Flächenraum. Die Höhe gegeben, *variiert daher der Flächenraum wie die Basis* (*Grundlinie*).

A) *Варьирование.* Если какая-нибудь *величина y зависит от другой x* так, что, когда x меняет свое значение, в y происходит соответствующее пропорциональное изменение значения, то говорят, что *y варьирует, как x*, и для этого применяют символ $\propto$, т. е. $y \propto x$.

Например, у Евклида VI,1: «*Треугольники и параллелограммы одинаковой высоты соотносятся между собою, как их основания*». Если мы удвоим основание треугольника или параллелограмма, высота которых остается тою же, то мы удвоим их площадь, и в отношении, в котором мы изменяем основание, в этом же отношении меняется и площадь. При данной высоте *площадь поэтому варьирует, как основание.*

У Гудвина же мы читаем (§ 93, стр. 59): «*Варьирование*, § 93. Если одна величина y зависит от другой x так, что, когда x меняет значение, значение y изменяется в той же пропорции, то говорят, что *y варьирует прямо* как x или, коротко, *варьирует*, как x.

Например, мы знаем из Евклида, VI, 1, что, если мы удвоим основание треугольника, оставляя вершину тою же, мы удвоим площадь, и что, в какой бы пропорции мы ни изменили основание, площадь изменится в той же пропорции, следовательно, мы должны сказать, что (при данной высоте) площадь треугольника *варьирует, как его основание.*

Фразу «y варьирует, как x» записывают так: $y \propto x$».

Близки по содержанию и теоремы, имеющиеся в курсе Гудвина. Есть, однако, и расхождения между текстом рукописи и книгой Гудвина. Можно думать поэтому, что либо не книга Гудвина была фактически источником Маркса, либо что, наряду с нею, у Маркса были еще и другие источники. Согласно поискам в английских библиотеках, наиболее вероятной в этой связи можно считать книгу: Th. Gr. Hall, «The Elements of Algebra» (Т. Холл, «Элементы алгебры»), изд. 3-е, Кембридж, 1850, §§ 125—127, стр. 149—152 из главы IX Ratio, «Proportion, Variation, and Inequalities» («Отношение, пропорция, варьирование и неравенства»).

Лл. 27—38. «**B) Permutations, Combinations and Variations**» («**B. Перестановки, сочетания и размещения**»).

Конспект материала по комбинаторике, по меньшей мере по двум источникам, установить которые с полной достоверностью пока еще не удалось. В основу конспекта положен, судя по употребляемой Марксом терминологии, английский источник. Совпадения в последовательности изложения, способах доказательств, в терминологии и обозначениях дают большие основания полагать, что этим источником является та же книга Холла, глава XIII «Permutations and Combinations» («Перестановки и сочетания»), стр. 209—214. В этот конспект Маркс делает, однако, большую вставку (на лл. 31—38) из какого-то другого, по-видимому немецкого, источника, догадки о котором см. ниже (стр. 377—378).

Конспект начинается с эмпирического рассмотрения перестановок из двух, трех, четырех и пяти букв. Затем следует (пункт 2)) определение понятия размещений (Variations) из n элементов по r, а в пункте 3) индуктивно подсчитывается их число, для которого вводится символ nVr (у Холла ${}^nV_r$). Число перестановок из n элементов получается теперь как nVn. Вслед за этим (пункт 4)) рассматриваются перестановки с повторениями. Показывается, что число таких перестановок из n элементов, среди которых встречаются α величин «одного рода», β — другого, γ — третьего, есть

$$\frac{n \ldots 2\cdot 1}{\alpha \ldots 2\cdot 1 \times \beta \ldots 2\cdot 1 \times \gamma \ldots 2\cdot 1}$$

(знака «факториал» у Маркса еще нет, как, впрочем, нет его даже в учебнике Потса издания 1880 г.).

В пункте 5) рассматриваются сочетания из n элементов по r, для числа которых вводится знак nCr и показывается, что

$$nCr = \frac{nVr}{rVr} = nC\,(n-r).$$

В следующей за этим вставке, содержащей новые пункты 1) — 5), сначала вводятся понятия *элемента*, *формы* или *комплекса* и *класса форм*. Здесь в рукописи мы читаем (л. 31):

1) Die Dinge, die in gewisser Ordnung auf verschiedne Arten zusammenzustellen, heissen *Elemente*, weil es nicht auf ihre Grösse und Beschaffenheit, sondern nur auf die *Ordnung* ankommen soll, in der sie auftreten. Jede Zusammenstellung gewisser Elemente heisst eine *Form* oder *Complexion*. Die *Klasse der Formen* hängt von der *Anzahl ihrer Elemente* ab, also z. B.

1) Вещи, которые в определенном порядке подлежат объединению в группы тем или иным способом, называются *элементами*, так как существен только *порядок*, в котором они выступают, а не их величина или особенности. Всякое такое объединение каких-нибудь элементов называется *формой* или *комплексом*. *Класс формы* определяется *числом ее элементов*,

2 3 1 4 5 *höhere* Klasse als 2 3 5 4.

так, например, [форма] 2 3 1 4 5 — *более высокого* класса, чем 2 3 5 4.

Так как свойства элементов несущественны, то любые элементы обозначаются цифрами или буквами алфавита, и задача ставится так:

Bei Permutation, Kombination und Variation die Untersuchung darauf gerichtet:

a) feste *Regeln für die Bildung der Formen* zu bestimmen;

b) *die Anzahl der Formen zu bestimmen*, ohne sie sämtlich darzustellen.

Исследование перестановок, сочетаний и размещений имеет целью:

a) установить *твердые правила образования форм*;

b) *определить число этих форм*, не выписывая всю их совокупность.

Для решения первой из этих задач формы упорядочиваются *лексикографически* (т. е. в алфавитном порядке, алфавит цифр при этом 0, 1, 2, . . ., 9), если не учитываются различия их классов, и *арифмографически* — в противном случае. (Под «арифмографическим» имеется в виду расположение форм в порядке возрастания их классов, т. е. числа элементов в форме; внутри каждого класса входящие в него формы располагаются при этом лексикографически.)

Пункт 2) посвящен решению обеих указанных выше задач для обычных перестановок и перестановок с повторениями. Здесь употребляются символы вроде P (1; 2; 3) и P (a, b, c, c) и говорится о некотором расширении понятия перестановки, по поводу которого Маркс пишет:

Begriff des *Permutierens* erweitert — dies fällt jedoch mit einem *gewissen Fall des Variierens* zusammen—, wenn man aus gegebnen Elementen auf alle mögliche Art eine *bestimmte Menge* nehmen und solche in allen ihren Versetzungen hinstellen will, z. B. *aus n Elementen* alle möglichen Versetzungen *zu zwei* ableiten.

Понятие *перестановки* расширяется—это совпадает, однако, с *известным случаем варьирования*,—когда из данных элементов всеми возможными способами нужно выбрать какое-нибудь *определенное множество* их и разместить последние во всех возможных порядках, например, получить *из n элементов* все возможные размещения *по два*.

В пункте 3) рассматриваются сочетания. Употребляются символы вроде следующих:

$$\overset{3}{C}(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\quad \overset{3}{C}(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)^{3},\quad \overset{4}{C}(1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4),$$

из которых первый обозначает сочетания из пяти элементов 1, 2, 3, 4, 5 по три, второй — сочетания из тех же пяти элементов по три со всеми возможными повторениями (например, 1 1 1, 1 2 2, 1 2 4 и др.), третий — сочетания из четырех элементов 1, 2, 3, 4 по 4, причем цифру 2 разрешается повторять не более чем дважды, а цифру 3 — не более чем трижды.

В конспекте приводятся: примеры на составление полных списков всех возможных сочетаний того или иного вида; формула для числа сочетаний из n элементов по m; формула для числа сочетаний с повторениями из n элементов по m при условии, что каждый элемент можно повторять любое число раз, не превосходящее m; замечание о том, что число таких сочетаний с повторениями равно C^m_{n+m-1} (в наших обозначениях).

В пункте 4) рассматриваются размещения, опять-таки с повторениями или без таковых. Символика аналогична употреблявшейся для сочетаний. Встречаются знаки:

$$\overset{3}{V}(1,\ 2,\ 3,\ 4),\quad \overset{4}{V}(1,\ 2,\ 3)^{4}.$$

Выписываются все формы, соответствующие первому знаку. Доказывается, что число всех возможных размещений с повторениями из n элементов по m равно n^m. Специально рассматривается вопрос об образовании, говоря на современном языке, прямого произведения нескольких (конечных) множеств элементов, и полностью выписывается прямое произведение множеств («рядов»): (1, 2, 3), (1, 2), (1, 2, 3, 4). Доказывается, что число элементов прямого произведения равно произведению чисел элементов «сомножителей». Отмечается, в частности, что если все m «сомножителей» имеют одинаковое число (n) элементов, то число элементов их прямого произведения, т. е. n^m, совпадает с полученным ранее числом размещений с повторениями из n элементов по m.

Пункт 5) (последний) посвящается различным способам образования заданной суммы путем выбора некоторых (из заданных же) «слагаемых», которые при этом могут или не могут повторяться, и составлению списков соответствующих сочетаний и размещений «слагаемых». Приводится алгорифм, отвечающий на вопрос о разрешимости или неразрешимости задачи и позволяющий легко выписывать в определенном порядке все возможные ее решения. Встречаются следующие символические обозначения:

$$9\overset{3}{C}(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\quad 9\overset{3}{C}(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)^{3},\quad 9\overset{3}{V}(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\quad 9\overset{3}{V}(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)^{3}.$$

Здесь 9 — заданная сумма, 1, 2, 3, 4, 5 — допустимые слагаемые, число которых должно быть не больше трех и которые (в случаях, когда 3 стоит над правой скобкой) могут повторяться не более трех раз.

Английских слов в этой вставке нет; по содержанию же она примыкает к идеям, распространенным в немецкой школе комбинаторного анализа (Гинденбург, Эшенбах, Роте, Крамп и др.) первой половины XIX века. Это и дает основания предполагать, что источник вставки, по-видимому, немецкий. Маркс, однако, мог располагать только такими немецкими источниками, которые имелись в Англии. Соответствующий поиск в Британском музее и других библиотеках Англии пока еще не дал окончательного результата. Наибольшая близость к тексту вставки в рукопись 3933 обнаружена, однако, в книгах:

1. B. Thibaut, «Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen» («Очерк общей арифметики, или Анализ для употребления в академических лекциях»), Геттинген, 1809. Глава 2 этой книги: «Первые основы учения о комбинациях»— трактует об *элементах, формах, классах форм*, об их лексикографическом и арифмологическом упорядочении, содержит обозначения

$$\overset{4}{C}(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3),\quad \overset{3}{C}(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5),$$

а также сходные с приведенными в рукописи алгорифмы получения всех возможных комбинаций того или иного вида и подсчета их числа (без предварительного составления самих этих комбинаций).

2. Fr. W. Spehr, «Vollständiger Lehrbegriff der reinen Kombinationslehre, mit Anwendungen derselben auf Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung» («Полное учебное понятие чистого учения о комбинациях, с применениями его к анализу и исчислению вероятностей»), Брауншвейг, 1824, изд. 2-е, 1840.

Книга написана на основе идей Тибо. Автор специально оговаривает достоинства символики Тибо и рассматривает, по существу, те же понятия (и в том же порядке), о которых шла речь в связи с книгой Тибо.

Несмотря на довольно значительную общность материала и символики, обе книги, однако, как по стилю изложения, так и в примерах отличаются от текста Маркса. Вопрос об источнике последнего нельзя еще поэтому считать решенным.

Закончив вставку, Маркс подводит итог законспектированному им материалу по комбинаторике, замечая прежде всего, что (л. 37):

Um die 3, *Permutationen*, *Kombinationen*, *Variationen*, nicht zu vermengen, ist es nötig, *Permutation zu beschränken auf die Variationen aller Elemente einer gegebnen Complexion von Elementen*; und am besten mit der *Permutation* die *Variation* zu behandeln und zuletzt die *Kombination* [153].

Для того чтобы не путать эти три вида [комбинаций]: *перестановки*, *сочетания*, *размещения*, нужно *перестановки ограничить размещениями всех элементов из некоторого данного их комплекса*; и лучше всего вместе с *перестановкой* рассматривать и *размещение*, а затем уже *сочетание* [153].

Вслед за этим Маркс кратко выписывает еще раз все приведенные ранее результаты, относящиеся к числам перестановок, размещений и сочетаний (без повторений или с повторениями). После формулы для числа перестановок с повторениями: a раз — элементов одного рода, b раз — другого и c раз — третьего, имеющей вид

$$\frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a\ldots 2\cdot 1\times b\ldots 2\cdot 1\times c\ldots 2\cdot 1},$$

Маркс делает вставку:

⟦In der Darstellung p. 31 (Schluss) und 32 wird der *Begriff des Permutierens* «erweitert», um für gewisse Kasus des Variierens «Beweis» vorzubereiten. Dies Blödsinn [154].⟧

⟦В изложении на стр. 31 (конец) и 32 *понятие перестановки* «расширяется», чтобы подготовить «доказательство» для определенных случаев варьирования. Это — нелепость [154].⟧

Лл. 38—68. «**C) Das binomische Theorem**» («**С. Биномиальная теорема**»)

Конспекты материала о биномиальной теореме по нескольким источникам, один из которых (по-видимому, тот же, к которому относится вставка на стр. 31—38 по комбинаторике) не установлен. Эта часть тетради состоит из трех разделов, обозначенных Марксом римскими цифрами I), II), III).

Раздел I (лл. 38—41), не имеющий заглавия, содержит конспект по книге «Трактат по алгебре» Маклорена, §§ 42—47, стр. 38—42. В данном случае Маркс точно указывает, что он пользуется шестым изданием (Лондон, 1796), которое, однако, полностью совпадает с имеющимся у нас первым. Конспект начинается словами Маркса:

I) 1) Der empirische Ursprung des Theorems zeigt sich offen in *Mac Laurin's* Algebra; die in der Tat der erste Kommentar (raisonné) zu Newtons «*Arithmetika Uniwersalis*», von den schwierigsten Sachen die Resultate ohne Erklärung, oft in kaum verständlicher Form, ohne Entwicklung und Beweis gegeben werden.

I) 1) Эмпирическое происхождение этой теоремы явно обнаруживается в «Алгебре» *Маклорена*; последняя есть на самом деле первый комментарий (подкрепленный доказательствами) к ньютоновской «*Всеобщей арифметике*», где в применении к самым трудным вещам результаты приводятся без объяснений, часто в малодоступной форме, не развернуто и без доказательства.

Весь этот раздел конспекта представляет собой не выписки из Маклорена, а собственное изложение конспектируемого материала, в котором Маркс специально отмечает то обстоятельство, что общие заключения делаются Маклореном не на основе доказательства, а только с помощью индуктивного обобщения наблюдений, относящихся к разложению

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

Эвристический характер этих наблюдений Маркс подчеркивает, замечая (по поводу способа отыскания коэффициента последующего члена по коэффициенту предыдущего) (л. 39):

Das zweite Glied hat als Koeffizient $=6$. Diese blosse Vergleichung des zweiten mit dem ersten Glied würde bloss zeigen, dass der Koeffizient des 2-ten Glieds = *der Potenz des ersten ist, da wir haben* a^6, *und* $6\,(a^5b)$ *für 2-tes Glied*. Vergleichen wir aber das 3-te Glied mit dem 2-ten, so 2-tes Glied $= 6\,(a^5b)$; 3-tes Glied $= 15\,(a^4b^2)$.

У второго члена коэффициент равен 6. Это простое сравнение второго члена с первым показало бы только, что коэффициент второго члена равен *степени первого, так как мы имеем* a^6, *а для второго члена* $6\,(a^5b)$. Но если мы сравним третий член со вторым, то второй член $= 6\,(a^5b)$; третий же $= 15\,(a^4b^2)$.

Приводя далее, как уже согласующееся с наблюдениями, правило Маклорена, предлагающее, с целью найти коэффициент любого члена по коэффициенту предшествующего, «разделить коэффициент предшествующего члена на показатель степени в данном члене и помножить полученное частное на показатель степени a в том же члене, увеличенный на единицу», Маркс по этому поводу замечает, что было бы проще умножить полученное частное на показатель степени a в предшествующем члене. (Взятые в кавычки слова заимствованы нами из «Алгебры» Маклорена, стр. 40, в которой они также приводятся в кавычках. Видимо, это дает основание Марксу считать их принадлежащими не Маклорену, а самому Ньютону, поскольку как здесь, так и в других случаях, где текст у Маклорена заключен в кавычки, в своем конспекте Маркс упоминает Ньютона. Он пишет в таких случаях: **«nach Newton»** (**«по Ньютону»**), **«bei Newton»** (**«у Ньютона»**), **«id est Newton»** (**«т. е. Ньютон»**).)

По поводу того, что в следующем параграфе Маклорен получает общую теорему о биноме Ньютона простым распространением правила, проверенного для разложения шестой степени бинома, на случай произвольного показателя степени m, Маркс замечает:

Nun wird dies empirisch Gefundne generalisiert.

Теперь это эмпирически найденное обобщается.

Аналогичное замечание Маркс делает в связи с тем, что число членов разложения для $(a+b)^m$ оказывается при этом равным $m+1$. Он пишет:

Dies letztere ergibt sich nämlich auch nur durch Generalisierung des Beispiels $(a+b)^6$.

И это последнее также получается на самом деле только обобщением примера $(a+b)^6$.

Ниже Маркс подчеркивает это в итоговом замечании еще раз (л. 40):

2) Wir sahen oben, dass bei *Mac Laurin* (id est Newton), bei Gelegenheit der Untersuchung der Koeffizienten, die Expansion eines Binoms zur 2-ten, 3-ten, n-ten Potenz liefert $2+1, 3+1$, generally $n+1$ Glieder; dies blosse Generalisation liefert:

2) Мы видели выше, что у *Маклорена* (т. е. у Ньютона) в связи с исследованием коэффициентов возведение бинома во вторую, третью, n-ю степень дает $2+1$, $3+1$, вообще $n+1$ членов; это простое обобщение дает:

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2; \quad (x+a)^3 = x^3+3ax^2+3a^2x+a^3;$$

$(x+a)^2$ liefert 3 Glieder, $(x+a)^3$ 4, und *daher* $(x+a)^n$ $n+1$ Glieder.

$(x+a)^2$ дает 3 члена, $(x+a)^3$ 4, и *поэтому* $(x+a)^n$ $n+1$ членов.

Приводя по Маклорену общую формулировку теоремы о биноме Ньютона, Маркс замечает, что в ней не выписан общий член:

... so wie gegeben bei Mac Laurin *ohne allgemeinen term.*

... как дано у Маклорена, *без общего члена.*

Переходя к обобщенному правилу возведения в степень многочленов, Маркс пишет:

Newton machte sofort Anwendung des *binomischen Theorems* ⟦das, soweit wir bis hier gekommen, nur verallgemeinerter empirischer Ausdruck, indem statt 6 z. B. m gesetzt⟧ auf *Polynome.*

Биномиальную теорему ⟦которая пока еще — только обобщенное эмпирическое выражение, получаемое, когда вместо 6, например, ставится m⟧ *Ньютон* тотчас же применил к *полиномам.*

В связи с пояснением этого правила на примере возведения в квадрат трехчлена $a+b+c$ как бинома $([a+b]+c)$, Маркс замечает:

Könnte auch entwickelt werden als $(a+[b+c])^2$.

Можно было бы разложить так же, как $(a+[b+c])^2$.

Вслед за этим Маркс делает вставку (л. 40), источником которой уже не является «Трактат по алгебре» Маклорена. Маркс пишет здесь:

Soweit die *erste elementarische Darstellung* bei Newton. Zu dieser, so weit sie *wieder elementarisch* unter der Rubrik involution * oder Potenzierung erscheint, ist in fact nichts hinzugekommen; seitdem nur zusammengefasster; z. B. sei zu finden expansion von $(x+y)$ zur 6-ten Potenz; dann:

Это, в общем, *первое элементарное изложение* по Ньютону. К нему, по существу, когда оно *снова* выступает в *элементарной форме* под рубрикой инволюции * или возведения в степень, ничего не добавилось; [оно] с тех пор только несколько обобщено; пусть, например, нужно найти разложение для $(x+y)^6$; тогда:

$$\begin{array}{l}
x^6 \ldots x^5 \ldots x^4 \ldots x^3 \ldots x^2 \ldots x^1 \ldots x^0 \left(\begin{matrix}\textit{Potenzen von}\\ \textit{степени}\end{matrix}\; x\right), \\
y^0 \ldots y^1 \ldots y^2 \ldots y^3 \ldots y^4 \ldots y^5 \ldots y^6 \left(\begin{matrix}\textit{Potenzen von}\\ \textit{степени}\end{matrix}\; y\right), \\
1 \ldots 6 \ldots 15 \ldots 20 \ldots 15 \ldots 6 \ldots 1 \left(\begin{matrix}\textit{Koeffizienten}\\ \textit{коэффициенты}\end{matrix}\right) \\
\hline
x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6
\end{array}$$

Im allgemeinen die n-te Potenz von $(a \pm b)$ oder $(a \pm b)^n$

Вообще n-я степень $(a \pm b)$ или $(a \pm b)^n$

$$= a^n \pm \frac{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 \pm \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \ldots \pm b^n.$$

Haben die Glieder des Binoms *Koeffizienten*, wie z. B. $(2a+3b)^4$, so können diese sofort zu der Potenz erhoben werden, die dem Glied zukommt, wozu sie gehören.

Если члены бинома имеют *коэффициенты*, как, например, $(2a+3b)^4$, то их тут же можно возводить в степень, в которую возводится член, содержащий данный коэффициент.

Also:

Следовательно,

$$\begin{array}{l}
16a^4 \ldots 8a^3 \ldots 4a^2 \ldots 2a^1 \ldots (2a)^0 \\
(3b)^0 \ldots 3b^1 \ldots 9b^2 \ldots 27b^3 \ldots 81b^4 \\
1 \ldots 4 \ldots 6 \ldots 4 \ldots 1 \\
\hline
16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4
\end{array}$$

* Здесь в рукописи описка: вместо «involution» («инволюция») написано «evolution» («эволюция»). Возведение в степень называется у Маклорена «инволюцией», обратная же операция — извлечение корней — «эволюцией».— *Ред.*

Тут ясно, что, законспектировав старый «Трактат» Маклорена, Маркс должен был обратиться к близкому ему по времени источнику, чтобы сделать вывод, что с тех пор мало что изменилось в элементарном изложении вопроса. Этим источником была, по-видимому, книга: Hall, «The Elements of Algebra» (Холл, «Элементы алгебры»), Лондон, 1840, где в конце раздела об инволюции есть и приведенный Марксом алгорифм возведения бинома в степень, и его применение к примеру $(2a + 3b)^4$.

Раздел II (лл. 41—51), озаглавленный Марксом: **«II. Das binomische Theorem für positive ganze Exponenten» («II. Биномиальная теорема для положительных целых показателей степени»)**, представляет собой конспект по второму из тех двух источников (немецкому, по-видимому), к которым относился конспект по комбинаторике. Бо́льшая часть этого раздела посвящена *доказательству* биномиальной теоремы, в котором используются а) понятия: «форма», «класс форм», «порядок формы», сочетания и размещения «с определенной суммой»— и б) обозначения:

$$\overset{n}{V}(1,\ 2)^n, \qquad \overset{n}{C}(1,\ 2)^n,$$

встречавшиеся уже — те и другие — в конспекте по комбинаторике (см. стр. 375—377). Вводятся также новые обозначения: $\overset{1}{C}$, $\overset{2}{C}$, . . ., $\overset{n}{C}$ для сумм всевозможных произведений, соответствующих всем возможным сочетаниям из n элементов по одному, по два, . . ., по n соответственно. Элементами при этом являются числа или буквенные выражения обычной алгебры, комбинации же элементов рассматриваются как произведения.

Доказательство начинается с рассмотрения произведений двух, трех и т. д. сомножителей, представляющих собой суммы произвольного числа слагаемых. Эти слагаемые обозначаются (в каждом сомножителе) цифрами 1, 2, 3, . . . С помощью образования «вариационных форм»— прямых произведений тех множеств цифр, которыми нумеруются слагаемые в сомножителях,— упорядочиваются определенным образом члены произведения. Пример такого упорядочения и соответствующая таблица всех «вариационных форм» и «реализующих» их членов произведения

$$(a+bx+cx^2)\,(d+x)\,(fx-gx^2+hx^3)$$

приводятся Марксом полностью.

Далее рассматриваются произведения более специальных видов. Выясняется сначала (с помощью построения «вариационных форм» из цифр 1, 2 и их «реализаций»), что всякое произведение вида

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,\ldots\,(x+k)\,(x+l)$$

равно (если n — число сомножителей)

$$x^n+\overset{1}{C}x^{n-1}+\overset{2}{C}x^{n-2}+\ldots+\overset{n-2}{C}x^{n-2}+\ldots+\overset{n-1}{C}x+\overset{n}{C}.$$

Полагание всех вторых членов в сомножителях равными между собой и дает затем теорему о биноме.

Обычный способ построения таблицы биномиальных коэффициентов получается далее с помощью умножения обеих сторон равенства

$$(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots+Mx^n$$

на $(1+x)$.

Переходя к дальнейшей части конспекта, в которой встречаются уже новые обозначения $n\overset{r}{B}$ ($r = 0, 1, \ldots, n$) для числа сочетаний на n по r *, т. е. для биномиальных коэффициентов, Маркс (л. 48) пишет:

c) In der weiteren «geschäftlichen» Ausarbeitung figurieren die *Potenzen der beiden Teile des Binoms*, wie a^n, b^n, als *Dignitäten* und ihre *Koeffizienten*, wie $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ etc., als *Binomialkoeffizienten*.

c) В дальнейшей «деловой» разработке *степени обоих членов бинома*, таких, как a^n, b^n, фигурируют как *чины*, а их *коэффициенты*, такие, как $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ и т. д., — как *биномиальные коэффициенты*.

В этой связи Маркс делает следующее замечание:

[[Es ist hier zu bemerken, dass die *Funktionen mit* x^n, mit den davon *abgeleiteten Funktionen* oder *Differentialkoeffizienten*, im Differentialcalculus nur ein *Stück dieser Binomialkoeffizienten* einschliesst, z. B.

[[Заметим здесь, что *функции с* x^n, вместе с выведенными из них *производными* или *дифференциальными коэффициентами*, в дифференциальном исчислении включают в себя только *часть этих биномиальных коэффициентов*, например,

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1};$$

hier schliesst der Differentialkoeffizient oder die erste abgeleitete Funktion den *Binomialkoeffizienten* $\frac{n}{1}$ ein, weil dieser $= n$; also der numerische Bruchkoeffizient $= \frac{1}{1}$; wo letzterer aber selbständig erscheint, wie schon in f'' oder dem 2-ten Differentialkoeffizient, ist nur der von dem Exponenten der Funktion abgeleitete Koeffizient eingeschlossen, aber nicht der ihn begleitende numerische

здесь дифференциальный коэффициент или первая производная включает в себя весь *биномиальный коэффициент* $\frac{n}{1}$, так как последний $= n$, т. е. числовое значение дробного коэффициента $= \frac{1}{1}$; там же, где последний выступает самостоятельно, как уже в f'', т. е. во 2-м дифференциальном коэффициенте, в производную входит только коэффициент, произведенный из показателя степени функции, но не

* Такие обозначения и весь запас связанных с ними формул, содержащийся в этом разделе рукописи, имеются в книге: B. Thibaut, «Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen» («Очерк общей арифметики, или Анализ для употребления в академических лекциях»), Геттинген, 1809, стр. 44 и сл. — *Ред.*

Bruchkoeffizient. So

сопровождающий его числовой дробный коэффициент. Так,

$$\frac{d^2(x^n)}{dx^2} \text{ oder } \text{ или } \frac{d(nx^{n-1})}{dx} = n(n-1)\,x^{n-2} = f''(x^n)$$

schliesst nicht ein $\frac{1}{1\cdot 2}$; vielmehr wäre dies* $\frac{1}{1\cdot 2}\cdot f''$, wie Lagrange es ursprünglich schreibt, also nicht in f'' eingeschlossen oder $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{h}{1\cdot 2}\right)$, wo der Bruchkoeffizient als Nenner des 2-ten Glieds [mit] h erscheint, wie in Taylor's Theorem.⟧

не включает в себя $\frac{1}{1\cdot 2}$; скорее это* было бы $\frac{1}{1\cdot 2}\cdot f''$, как и пишет первоначально Лагранж, не включая, таким образом, $\frac{1}{1\cdot 2}$ в f'' или $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{h}{1\cdot 2}\right)$, где дробный коэффициент выступает в качестве знаменателя второго члена [с] h, как в теореме Тейлора.⟧

В этой (последней) части раздела II) содержатся обычные теоремы о свойствах биномиальных разложений (о том, что $n\overset{r}{B} = n\overset{n-r}{B}$, что $n\overset{r}{B} + n\overset{r+1}{B} = (n+1)\overset{r+1}{B}$; о том, что сумма биномиальных коэффициентов для бинома степени n равна 2^n; о возведении в степень комплексных чисел по теореме о биноме и др.).

Раздел III (лл. 51—68), озаглавленный Марксом: **«Allgemeines binomisches Theorem»** (**«Общая биномиальная теорема»**), состоит из трех частей: A), B) и Ad B).

Часть A) (лл. 51—57) начинается следующими словами, относящимися к ее содержанию.

Was für *Binome mit ganzen positiven Exponenten* entwickelt, gilt auch für die *mit negativen und Bruchexponenten* ⟦und mit *imaginären*, wovon *hier zunächst abgesehn*⟧. Nur wird die *Serie in diesen Fällen endlos*.

Полученное для *биномов с целыми положительными показателями* верно также для биномов *с отрицательными и дробными показателями* ⟦и с *мнимыми*, от которых *здесь первоначально отвлекаются*⟧. Но *ряд становится в этих случаях бесконечным*.

Источник этой части окончательно не установлен еще. По-видимому, здесь опять используется какой-нибудь английский учебник алгебры.

Распространение биномиальной теоремы на случай дробных и отрицательных показателей степени осуществляется с помощью метода неопределенных коэффициентов, который и освещается сначала в пункте 2) Марксова конспекта. Доказательство однозначности представления функции в виде степенного ряда почти дословно (вплоть до полного тождества обозначений) совпадает здесь с имеющимся в книге: Hall, «The elements of Algebra» (Холл, «Элементы

* То есть выражение $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}$.— *Ред.*

алгебры»), Лондон, 1850, гл. VIII «The binomial theorem» («Биномиальная теорема»), стр. 211.

Пункт 3а) посвящен применению этого метода к случаю $n = \frac{1}{2}$. (В книге Холла этот пример находится на стр. 223.)

Именно, полагается, что

$$\sqrt{1+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

Возведение обеих сторон этого равенства в квадрат и дает затем возможность получить систему уравнений, определяющую коэффициенты A, B, C, ..., и обнаружить, таким образом, что они в точности совпадают с теми, которые были бы получены при распространении биномиальной теоремы на случай $n = \frac{1}{2}$.

Заметив, что (л. 52)

in derselben Weise kann diese Methode angewandt werden auf Binome mit *negativen Exponenten*,	таким же образом этот метод может быть применен к биномам с *отрицательными показателями*,

Маркс переходит в своем конспекте (пункт 3b)) к доказательству теоремы в общем случае дробного или отрицательного (целого и дробного) n. При этом предполагается сначала, что

$$(1+x)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{и т. д.}, \tag{1}$$

где коэффициенты зависят лишь от n, но не зависят от x; затем вместо x в это равенство подставляется $x + y$, что дает

$$[1+(x+y)]^n = \\ = A + B(x+y) + C(x+y)^2 + D(x+y)^3 + E(x+y)^4 + F(x+y)^5 + \text{и т. д.} \tag{2}$$

В правой части бином $(x + y)$ встречается только в целых положительных степенях, для которых биномиальная теорема уже доказана. Пользуясь этим, автор конспектируемого Марксом руководства разрешает себе (хотя при этом коэффициенты имеют вид бесконечных рядов) расположить правую сторону равенства (2) по степеням y. Представив затем левую сторону в виде $[(1 + x) + y]^n$, он получает возможность воспользоваться методом неопределенных коэффициентов для того, чтобы показать, что все неопределенные коэффициенты A, B, C, D, ... выражаются через второй коэффициент (через B) в точности так же, как это происходит в биномиальной теореме для целого положительного показателя n. С помощью того же метода неопределенных коэффициентов доказывается, наконец, что как для дробного, так и для отрицательного показателя n имеет место равенство $B = n$.

Часть A) заканчивается применением биномиальной теоремы к извлечению корней из чисел и способами ускорения сходимости получающихся при этом рядов. Так, $\sqrt{2}$ представляется с этой целью как $\frac{1}{5}\sqrt{50}$, т. е. как $\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2}$.

Поскольку при этом все обыкновенные дроби заменяются десятичными, Маркс делает в своем конспекте вставку (выделенную рамкой на лл. 56—57), посвященную теории десятичных дробей и по содержанию и обозначениям очень сходную с §§ 38—43 (стр. 27—29) и, далее, с § 107 (стр. 72—73) книги: H. Goodwin, «An Elementary Course of Mathematics» (Гудвин, «Элементарный курс математики»), Кембридж, изд. 4-е, 1853.

В связи с вопросом об источниках описываемого раздела III необходимо заметить, что этот раздел, посвященный теореме о биноме Ньютона, представляет собою вообще систематизацию большого материала из разных книг. Ясно, что не случайно Маркс 1) начинает с нестрогого вывода этой теоремы (из «Алгебры» Маклорена), сводящего к простому эмпирическому обобщению наблюдений, относящихся к случаям $n = 2, 3, \ldots, 6$ (где n — показатель степени бинома); 2) помещает вслед за тем такое доказательство, в котором она получается, наоборот, как частный случай более общей теоремы (о произведении двучленов вида $(x + a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$) и которое убедительно раскрывает таким образом причины ее правильности; 3) переходит далее к разным способам распространения теоремы на случаи дробных и отрицательных n, встречаясь при этом с проблематикой, связанной с бесконечными степенными рядами и способами вычисления их «сумм»; 4) несмотря на нелюбовь к арифметике,— которая, как говорил Маркс, «никогда не давалась мне»,— встретившись с вопросами вычислительной математики, не жалеет труда на поиск материала, относящегося к алгорифмам оперирования с десятичными дробями, и делает специальную вставку в свой конспект, посвященную этим алгорифмам.

Само собою разумеется, что вопросы сходимости и ускорения сходимости бесконечного числового ряда также встречаются в конспекте Маркса в связи с обобщением биномиальной теоремы.

Так, на л. 55 мы читаем:

Durch dies Theorem können Wurzeln jeder Art ausgezogen werden annährungsweise. Aber die Serie muss so arrangiert werden, dass sie *konvergiert*, das heisst, dass die Serie, die die binomische Theorie für die gesuchte Wurzel gibt, konvergiert, d. h., dass das erste Glied + dem 2-ten, 3-ten etc. sukzessiven Gliedern der Serie sich beständig der gesuchten Wurzel annähert und so nahe dieser Quantität gebracht werden kann, als man will, so dass der Irrtum, absolut betrachtet, kleiner als irgendeine gegebne positive Quantität wird, wenn hinreichende Anzahl Glieder der Serie genommen wird.

С помощью этой теоремы можно извлекать приближенно корни любого рода. Но ряд должен быть устроен так, чтобы он *сходился*. Это значит, что ряд, который дает для искомого корня теория бинома, сходится, т. е. что [сумма] первого члена + 2-й, 3-й и т. д. последовательные члены ряда постоянно приближается к искомому корню и может быть сделана сколь угодно близкой к этому количеству, так что взятая по абсолютной величине ошибка становится меньше любого данного положительного количества, когда берется достаточное число членов ряда.

Никаких критериев сходимости в конспекте Маркса, однако, нет. Несмотря на то, что он просмотрел очень большое число различных учебников алгебры и «полных» курсов математики: английских, немецких, французских, которые можно было найти в Англии в 60—70-х годах прошлого века,— учебник, где вопросы этого рода уже обсуждались бы, ему не встретился. А между тем Маркс пользовался и такими руководствами, как весьма специальное «Дополнение» Лакруа к его курсу алгебры. Именно это руководство и используется Марксом в следующем пункте его рукописи.

Часть B) (лл. 57—63) состоит из пяти пунктов. Первый из них посвящен Эйлерову обобщению теоремы о биноме на случай дробного и отрицательного показателя степени. Источником его является книга Lacroix, «Complément des éléments d'algèbre» (Лакруа, «Дополнение к элементам алгебры»), 4-е изд., Париж, 1817, § 79, стр. 159—163.

Он начинается словами (л. 57):

«1) *Euler* hat folgenden *allgemeinen Beweis für den binomischen Lehrsatz gegeben*».

«1) *Эйлер дал* следующее *общее доказательство биномиальной теоремы*».

Как известно, это доказательство основано на том, что если рассматривать ряд

$$1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+ \text{ и т. д.}$$

как некоторую новую функцию от m, то ее характеристическим свойством будет равенство

$$f(m)\,f(n)=f(m+n).$$

Доказательство этого свойства у Эйлера ограничивается словами: «Образование членов этого произведения [ряда для $f(m)$ на ряд для $f(n)$] должно оставаться тем же самым, независимо от того, какие числа представляются буквами m и n: целые или какие угодно». Лакруа по этому поводу замечает, что такое доказательство не удовлетворило многих математиков. В 7-м (посмертном) издании 1863 г. вслед за этим приводится (стр. 151—153) индуктивное доказательство того, что коэффициенты произведения рядов для $f(m)$ и $f(n)$ действительно равны коэффициентам ряда для $f(m+n)$. В 4-м издании, которым пользовался Маркс, на стр. 160 вместо этого доказательства дается краткое объяснение мысли Эйлера, которое в конспекте Маркса выглядит так.

Обозначив через P произведение рядов

$$f(m)=1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ \ldots,\qquad f(n)=1+nz+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^2+\ \ldots,$$

Маркс пишет (л. 57):

Dies Produkt $= P$. Nach Potenzen von z geordnet, kann es dargestellt werden durch die Reihe

Это произведение $= P$. Расположенное по степеням z, оно может быть представлено рядом

$$P=1+Az+Bz^2+Cz^3+\ \ldots$$

Der Koeffizient A, B etc. irgendeines Glieds dieser Reihe hängt von der Art ab, wie *die Glieder in beiden Faktoren zusammengesetzt*, vom ersten an bis zu dem, das eine gleich hohe Potenz von z enthält, da dies die einzigen Glieder sind, die zur Formation des im Produkt betrachteten beitragen. Die *Zusammensetzung*

Коэффициент A, B и т. д. любого члена этого ряда зависит от способа, каким *соединяются члены обоих сомножителей*, от первого до того, который содержит ту же степень z, так как это единственные члены, которые участвуют в образовании рассматриваемого члена произведения. *Способ соединения* *dieser Glieder ändert sich nicht*, welches auch die *besondren Werte von m und n*; sind sie daher bekannt in einem Fall, wo *m und n bestimmte Zahlen*, so ebenso in *allen andern Fällen*.

этих членов не изменяется, независимо от *тех или иных значений m и n*; если поэтому [члены произведения] известны в одном случае, где *m и n — определенные числа*, то они известны и во *всех остальных*.

Заметив, что из этого следует нужное совпадение коэффициентов ряда для произведения $f(m)$ на $f(n)$ с коэффициентами ряда для $f(m+n)$, Маркс завершает изложение доказательства Эйлера по Лакруа. Весь этот материал Маркс резюмирует затем, излагая его в более краткой форме еще раз (лл. 58—60). Это резюме он заключает в квадратные скобки.

Следующие пункты 2) и 3) (л. 60) конспекта посвящены случаям иррациональных и мнимых показателей степени. Источник этих пунктов не установлен (у Лакруа эти случаи не рассматриваются). Этот источник, однако, находится еще всецело на уровне математики XVIII века. Так, доказательство того, что и в случае, когда m — мнимое число, $(1+z)^m = f(m)$ (где $f(m)$ — биномиальный ряд $1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots$), основывается в нем на следующем рассуждении.

При m целом и положительном мы имеем

$$f(m)^m = \underbrace{f(m)\cdot f(m)\,\ldots\, f(m)}_{m \text{ раз}} = f(\underbrace{m+m+\ldots+m}_{m \text{ раз}}) = f(m^2),$$

т. е.

$$f(m)^m = f(m^2).$$

Мнимые числа — это, по мнению автора, только воображаемые объекты. Поэтому-де ничто не может воспрепятствовать нам вообразить, что такой закон верен и для них. Но тогда мы будем иметь (поскольку для отрицательных m теорема уже доказана)

$$f(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = f(\sqrt{-1}^{\,2}) = f(-1) = (1+z)^{-1} = (1+z)^{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}},$$

т. е.

$$f(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = (1+z)^{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}.$$

Столь же формально возводя далее обе части этого равенства в степень $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, получим

$$f(\sqrt{-1})^{\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}} = (1+z)^{\frac{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}} = (1+z)^{\sqrt{-1}},$$

или

$$(1+z)^{\sqrt{-1}} = f(\sqrt{-1}),$$

т. е. для $m=\sqrt{-1}$ теорема верна.

Свой конспект Маркс на этом обрывает. Записывать дальше такого рода «доказательство» он, очевидно, не считал нужным.

Пункт 4) (лл. 60—62) озаглавлен Марксом: **«4) Die Umformung der Binomialreihe für gebrochne oder negative Exponenten» («4. Преобразование биномиального ряда для дробных или отрицательных показателей степени»)**. Он посвящен выяснению вида коэффициентов разложения и их преобразованию, упрощающему вычисления.

В пункте 5) (л. 63), озаглавленном: **«5) Lambertsche Annäherungsformel» («5. Ламбертова формула приближения»)**, излагается Ламбертов метод вычисления корней из чисел с помощью последовательных приближений. Аналогичные изложения этого метода имеются в курсах: Hind, «The elements of Algebra» (Хайнд, «Элементы алгебры»), изд. 4-е, 1839, § 259, стр. 230—231 и Hall, «The elements of Algebra» (Холл, «Элементы алгебры»), 1840, § 165, стр. 225—226. Ни один из этих курсов не является, однако, по-видимому, источником конспекта Маркса в этом пункте: обозначения и выкладки у Маркса иные.

Последняя часть раздела III под заголовком: **«Ad B) Einiges Elementare aus Euler über den binomischen Lehrsatz» («К В. Кое-что элементарное из Эйлера о биномиальной теореме»)** (лл. 63—68) состоит из двух пунктов. В пункте 1) Маркс конспектирует §§ 358, 359 (стр. 117—119) из главы XI книги Эйлера «Элементы алгебры», посвященные алгорифму вычисления коэффициентов разложения для $(a+b)^n$ при n целом и положительном. Здесь Маркс воспроизводит также подстрочное примечание переводчика (стр. 118—119) к английскому изданию 1822 г. книги «Elements of Algebra by Leonhard Euler, translated from the French with two notes of M. Bernoulli . . . and the additions of M. de la Grange. 3rd edition, by the Rev. John Hewlett . . ., to which is prefixed A memoir of the life and character of Euler, by the late Francis Horner, Esq., M.P., London, 1822» («Элементы алгебры Леонарда Эйлера, переведены с французского с двумя примечаниями г. Бернулли . . . и дополнениями г. Лагранжа. Изд. 3-е, преподобного Джона Хьюлета . . ., которому предпослан Мемуар о жизни и характере Эйлера покойного Фрэнсиса Хорнера, эсквайра, члена парламента, Лондон, 1822»). Можно думать поэтому, что в распоряжении Маркса было именно это издание.

Примечание переводчика на стр. 118—119 относится к Эйлерову способу представления коэффициента при a^pb^{n-p} в виде $\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$, основанному на том, что член a^pb^{n-p} содержит n букв, из которых можно сделать $n!$ перестановок, таких, однако, что все перестановки, относящиеся только к буквам a (их всего p, этих букв) или только к буквам b (их всего $n-p$), дают одно и то же. По этому поводу переводчик замечает, что лучше пользоваться формулой для числа сочетаний из n по p, т. е. $\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$, применение которой он иллюстрирует затем на вычислении биномиальных коэффициентов при n, равном 7 и 4.

Выписав это примечание и представив затем разложение для $(a+b)^n$ в виде

$$a^n + na^{n-1}\frac{b}{1} + n(n-1)\,a^{n-2}\frac{b^2}{1\cdot 2} + n(n-1)(n-2)\,a^{n-3}\frac{b}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.},$$

Маркс (л. 66) замечает:

Und so erscheinen dann auch im *Taylorschen Theorem* als von

Так же появляются затем в *теореме Тейлора* в качестве

x^n abgeleitete Funktionen:

$$nx^{n-1}, \quad n(n-1)x^{n-2}, \quad n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \ \ldots,$$

während $\frac{h}{1}$, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$, $\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ etc. für das 2-te Glied h figurieren; i. e. die Nenner oder die Brüche $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ etc. als *numerische Koeffizienten von* [Potenzen von] *h figurieren.*

производных функций от x^n:

между тем как $\frac{h}{1}$, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$, $\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$, и т. д. выступают вместо второго члена h, т. е. знаменатели, точнее дроби $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д., выступают как *численные коэффициенты при* [степенях] h.

Пункт 2) под заголовком: **«2) Irrationale Potenzen»** (**«2. Иррациональные степени»**) представляет собой конспект §§ 361—369 главы XII («О представлении иррациональных степеней бесконечными рядами») и §§ 370, 373, отчасти 375 главы XIII («О разложении отрицательных степеней») той же книги Эйлера. Этот пункт конспекта Маркса подразделяется в свою очередь на пункты α), β), γ).

В пункте α) по теореме о биноме Ньютона находится разложение для $\sqrt{a+b}$ (§ 364), имеющее вид

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\frac{1}{2}\,b\,\frac{\sqrt{a}}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,b^2\,\frac{\sqrt{a}}{a^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\,b^3\,\frac{\sqrt{a}}{a^3}-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot b^4\,\frac{\sqrt{a}}{a^4}+\text{ и т. д.} \qquad (1)$$

В пункте β) рассматривается случай, когда a есть квадрат рационального числа c, т. е. когда в правой части равенства (1) «нет знака корня»: все члены ряда рациональные (§ 365). Пример Эйлера, в котором первые два члена этого ряда используются для приближенного вычисления (методом последовательных приближений) $\sqrt{6}$, конспектируется Марксом во всех деталях, вплоть до получения для этого корня приближенного значения $\frac{4801}{1960}$, квадрат которого превосходит число 6 лишь на $\frac{1}{3\,841\,600}$ (§ 366). Конспект содержит также распространение этого метода на приближенное вычисление корней любой степени n, где n — целое положительное, и — очерченную полурамочкой ⊏ — ссылку на общий метод приближенного вычисления корней, опубликованный Halley в «Philosophical Transactions» за 1694 г. (Эта ссылка находится в сноске, которой Эйлер заканчивает главу XII.)

Пункт β) завершается у Маркса (л. 68, стр. 48 у Маркса) следующим замечанием:

In der «Elementen der Algebra» Darstellung gibt Euler keine besondere Entwicklung für $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, was auch nicht nötig, da dies $=\sqrt[n]{(a+b)^m}$, und er dort

Излагая все это в «Элементах алгебры», Эйлер не приводит особого разложения для $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, без которого он может обойтись, так как $(a+b)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a+b)^m}$, entwickelt $(a+b)^m$ und $\sqrt[n]{(a+b)}$; dagegen in seiner theoretischen Ausführung, wie wir gesehn, besonderer Nachweis für den Fall, wo in $(a+b)^m$ oder $f(m)$ dies $= f\left(\frac{p}{q}\right)$.

он там разлагает $(a+b)^m$ и $\sqrt[n]{(a+b)}$; напротив, в его теоретическом выводе дается, как мы видели, особое доказательство для случая, когда $(a+b)^m$ или $f(m)$ есть $f\left(\frac{p}{q}\right)$.

Пункт γ) относится к главе XIII книги Эйлера, т. е. к биномиальной теореме для случая отрицательного показателя степени. Здесь вычисляются коэффициенты разложения для $(a+b)^{-3}$ (§ 373) и делается замечание, что умножение правой части равенства

$$\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{1}{a^3}-3\frac{b}{a^4}+6\frac{b^2}{a^5}-10\frac{b^3}{a^6}+15\frac{b^4}{a^7}-21\frac{b^5}{a^8}+28\frac{b^6}{a^9}-\ldots \qquad (2)$$

на $(a+b)^3$ действительно дает в результате 1 $\left(\text{как это и должно быть, если равенство (2) верное, поскольку } \frac{1}{(a+b)^3}\cdot(a+b)^3=1\right)$.

Этим заканчивается раздел рукописи 3933, посвященный биномиальной теореме.

Последний лист этого раздела — 68. Маркс, однако, вслед за л. 67 написал не 68, а 48, по-видимому, по описке. Номера следующих листов рукописи отличаются поэтому на $+20$ от нумерации Маркса.

Л. 69 (у Маркса л. 49) начинается со следующего предложения, по содержанию относящегося только к одной из дальнейших страниц (л. 73) текста:

[Pure] *imaginary quantities. 2 imaginäre multipliziert* miteinander liefern *reelle quantity*; aber *imaginäre multipliziert mit reeller Grösse liefert stets imaginäre Grösse.*

[Чисто] *мнимые количества. Два мнимых количества, будучи перемножены,* дают *действительное количество*; но *мнимое, помноженное на действительную величину, дает всегда мнимую величину.*

Весь остальной текст рукописи 3933 (лл. 68—92) представляет собою конспект «Трактата по алгебре» Маклорена. Он озаглавлен Марксом: **«Aus Mac Laurins Algebra» («Из алгебры Маклорена»).**

Конспект начинается с главы XIV указанной книги (из предшествующих глав, посвященных алгебраическим операциям с многочленами и решению уравнений первой и второй степени, Маркс законспектировал только указанные выше §§ 42—47, относящиеся к биномиальной теореме). Пункт 1) этого конспекта озаглавлен «Of surds» («Об иррациональностях»), т. е. так же, как и вся эта глава у Маклорена. Из нее законспектированы §§ 92—109 (стр. 94—104) и § 117 (стр. 109) (в конспекте Маркса — стр. 49—51, лл. 69—71). Здесь идет речь о понятиях соизмеримости и несоизмеримости, об алгорифме Евклида для отыскания наибольшей общей меры, о делимости чисел, о том, что квадратный или кубический корень из целого числа может быть только целым или иррациональным числом, о соизмеримости в степени и сложных иррациональностях, о существовании таких частных случаев, в которых произведения сложных иррациональностей рациональны.

Доказательство того, что если алгорифм отыскания общей наибольшей меры двух величин a и b ($b < a$) не заканчивается, то величины эти несоизмеримы, Маклорен проводит, опираясь на известное предложение 1 из X книги «Начал» Евклида. (Это предложение — согласно которому, если от некоторой величины отнять больше чем половину, от остатка снова больше чем половину и т. д., то, продолжая этот процесс, можно получить в остатке величину меньшую любой наперед заданной — лежит, как известно, в основе метода исчерпывания — античного предшественника метода пределов.)

Именно, Маклорен показывает сначала, что если $a = bm + c$ (где $0 < c < b$, m — целое положительное число), то $bm > c$, в силу чего

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}bm + \frac{1}{2}c > \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c,$$

т. е. что $c < \frac{1}{2}a$ или, иначе говоря, что последовательные остатки в алгорифме Евклида убывают так, что каждый из них оказывается меньшим половины *предпредшествующего*. Отсюда Маклорен заключает, что остатки становятся меньше любой наперед заданной величины.

У Маклорена ссылки на Евклида при этом нет. В своем конспекте Маркс эту ссылку делает. Он пишет (л. 69):

Zieht man aber von einer Grösse mehr als ihre Hälfte ab, von dem Rest mehr als die Hälfte usw., so kommt man zu Rest $<$ als irgendeine assignable Grösse (Euklid).

Отнимая от какой-либо величины больше чем ее половину, от остатка больше чем его половину и т. д., придем к остатку $<$ чем любая могущая быть указанной величина (Евклид).

В связи с прочитанным Маркс делает замечание (заключенное в рамку), в котором подчеркивает, что неравенство $c < \frac{1}{2}a$ следует из того, что $c < b$, а $m \geqslant 1$. В дополнение Маркс приводит еще следующий аргумент в пользу того, что если b не есть общая мера для a и b, то неравенство $c < \frac{1}{2}a$ — строгое:

Wäre aber $c = \frac{a}{2}$, so $a - mb = \frac{a}{2}$; $a - \frac{a}{2} = mb$; also $\frac{a}{2} = mb$ oder $a = 2mb$, was gegen die Voraussetzung.

Но если было бы $c = \frac{a}{2}$, то $a - mb = \frac{a}{2}$; $a - \frac{a}{2} = mb$; следовательно, $\frac{a}{2} = mb$, или $a = 2mb$, что противоречит допущенному.

§§ 110—116, относящиеся к формальным преобразованиям выражений, содержащих радикалы, Маркс не конспектировал.

Законспектировав § 117, в котором ставится задача отыскания для данного сложного выражения, содержащего радикалы, такого выражения того же типа, которое, будучи умножено на данное, дает произведение, не содержащее радикалов, Маркс пишет в скобках: **«Fortsetzung später»** (**«Продолжение позднее»**). Однако в дальнейшей части конспекта этого продолжения нет: параграфы, содержащие решение поставленной задачи в некоторых частных случаях, не законспектированы Марксом.

Далее следует под заголовком: **«Theorie der Gleichungen nach Mac Laurin» («Теория уравнений по Маклорену»)** конспект первых пяти глав из второй части «Алгебры» Маклорена. Содержание этих глав и соответствующих им разделов конспекта Маркса таково.

В главе I идет речь о «получении» уравнений высших степеней путем перемножения нескольких уравнений первых двух степеней; о решении уравнений высших степеней как обратной задачи, состоящей в представлении их в виде произведения уравнений первых двух степеней; «о числе корней, которое может иметь уравнение любой степени».

Глава II посвящена вопросу о связи числа перемен знаков в коэффициентах уравнения с числами его положительных и отрицательных (действительных) корней (*правило знаков Декарта*) и другим зависимостям между его корнями и коэффициентами.

Глава III трактует о преобразовании уравнений и удалении их промежуточных членов.

В главе IV идет речь об отыскании кратных корней уравнения, а в главе V — о границах корней уравнения.

Конспект главы V в этой тетради не заканчивается и продолжается в новой тетради (см. ниже рукопись 3934).

Глава I (§§ 1—11, стр. 131—138) законспектирована Марксом полностью (лл. 71—73, стр. 51—53 в нумерации Маркса).

Маклорен начинает ее с того, что (§ 2) строит уравнение по его корням, замечая при этом, что если все корни равные, то задача сводится к уже рассмотренной: к *инволюции*, т. е. возведению бинома в степень; обратная задача отыскания корня полученного уравнения также оказывается уже рассматривавшейся задачей: *эволюции*, т. е. извлечения корня. Однако если корни уравнения разные, то мы оказываемся перед новой обратной задачей: решения уравнений. В своем конспекте Маркс записывает это так (л. 71, по Марксу стр. 51):

Anders, wenn die *miteinander multiplizierten Gleichungen verschieden*; es werden dann andre Gleichungen als Potenzen generiert; sie *aufzulösen in die einfachen Gleichungen*, aus denen sie entsprungen sind, ist daher eine von der *Wurzelanziehung verschiedne* Operation und heisst im eigentlichen Sinn: *resolution of equations* (resolution drückt dasselbe aus wie *Auflösung*).

Иначе, если *перемножаемые уравнения различны*; порождаемые при этом уравнения не являются степенями [биномов]; *разложение их на простые уравнения*, из которых они возникли, есть поэтому операция, *отличная от извлечения корня* и имеющая собственное имя: *resolution of equations* (resolution выражает то же самое, что *решение*).

Ниже (л. 72, стр. 52 по Марксу) в этой связи Маркс замечает в квадратных скобках:

⟦Es ist hier zu bemerken, dass wir bei *Gleichungen* den umgekehrten Weg einschlagen als bei *Entwicklung des binomischen Lehrsatzes* (und der Kombina-

⟦Здесь нужно заметить, что в применении к *уравнениям* мы избираем путь, обратный тому, которым шли, *развертывая биномиальную теорему* (и теорию tionstheorie, worauf er beruht); bei letztrem gehn wir aus von Binomen mit verschiednen 2-ten Elementen, um anzulangen [zu solchen], bei denen deren Elemente dieselbe; hier betrachten wir zuerst (sub 2) gegebne Gleichung aus der durch Selbstmultiplikation höhere Gleichung entsteht; und gehn dann über zu Gleichungen [gemäss dem Binom] die nur dieselbe Unbekannte, aber *verschiedne* 2-te Glieder haben. Da die ursprünglichen Gleichungen alle so geschrieben, dass alle Glieder auf einer Seite und auf der andern 0, handelt es sich aber nach wie vor bei der Entstehung höherer Gleichungen nur um Multiplikation von Binomen 2 zu 2, 3 zu 3 etc.⟧

комбинаций, на которой она основана); в последнем случае мы начинаем с биномов с различными вторыми членами, чтобы прийти [к таким], у которых оба члена одинаковые; здесь же мы рассматриваем сначала (sub 2) данное уравнение, умножая которое на самого себя получаем уравнение более высокой степени; а затем переходим к уравнениям [соотв. биномам], имеющим только ту же неизвестную, но *различные* вторые члены. Так как первоначальные уравнения пишутся так, что все члены у них на одной стороне, а на другой 0, то и здесь при возникновении уравнений более высоких степеней речь идет по-прежнему лишь об умножении биномов по 2, по 3 и т. д.⟧

Под «умножением биномов» здесь имеется в виду представление произведения $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — корни искомого уравнения, в виде многочлена, расположенного по степеням неизвестной x.

Конспект главы II (Маклорен, ч. II, гл. II, §§ 12—21, стр. 139—147; лл. 73—76, по Марксу стр. 53—56) содержит три замечания Маркса, из которых особенно интересно второе, поскольку из него ясно, что Маркс имел некоторую информацию о работах Коши. Источник этой информации пока еще, к сожалению, не установлен.

Первое замечание относится к §§ 12, 13, в которых Маклорен начинает с того, что рассматривает «произведение любого числа простых уравнений», чтобы, прийдя таким образом к заключению, что: 1) степень получаемого при этом уравнения равна числу его корней, 2) число членов уравнения на единицу больше его степени и 3) коэффициенты этих членов представляют собою симметрические функции от корней перемножаемых «простых» уравнений (суммы произведений этих корней по одному, по два и т. д. со знаками + или — в зависимости от четности числа множителей складываемых произведений),— распространить это затем на любые уравнения высших степеней, не останавливаясь уже на вопросе о правомерности такого распространения.

В этой связи Маркс пишет (лл. 73—74, по Марксу 53—54):

⟦Diese 2 Gesetze, sowie die Bildung der Koeffizienten und der Zeichenwechsel, da sie alle

⟦Эти два закона, а также образование коэффициентов и смена знаков, поскольку все они вы-hergeleitet aus der Multiplikation von $(x - a) = 0$, $(x - b) = 0$, $(x - c) = 0$, $(x - d) = 0$ etc., also aus der *Multiplikation der Binome* $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$, $(x - d)$ etc., sind nichts als das im binomischen Lehrsatz, resp. Theorie der Kombinationen, Entwickelte.⟧

ведены из умножения $(x - a) = 0$, $(x - b) = 0$, $(x - c) = 0$, $(x - d) = 0$ и т. д., т. е. из *умножения биномов* $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$, $(x - d)$ и т. д., не представляют собою чего-либо нового по сравнению с развитым в биномиальной теореме, соответственно в теории комбинаций.⟧

Выписав вслед за этим выражения для коэффициентов уравнения через его корни, Маркс делает второе замечание (л. 74, у Маркса стр. 54), о котором шла речь выше:

⟦So entstehen die symmetrischen Gleichungen, deren man so viel aufbauen kann, als man will. Folgt daher aber keineswegs, dass jede gegebne Gleichung ein Wurzel haben muss, wie Mac Laurin zu unterstellen scheint. Der später gelieferte Beweis von Cauchy scheint zweifelhaft.⟧

⟦Так возникают симметрические уравнения, которых можно построить сколь угодно много. Но отсюда еще отнюдь не следует, что всякое данное уравнение должно иметь корень, как Маклорен это, видимо, хочет представить. Предложенное позднее доказательство Коши кажется сомнительным.⟧

Третье замечание Маркса (л. 76, у Маркса стр. 56) относится к Декартову правилу знаков, связывающему число перемен знака в последовательности коэффициентов уравнения (с отличным от нуля свободным членом) с числом положительных корней уравнения.

В § 19 (стр. 144—145) Маклорен формулирует это правило (не останавливаясь перед соглашением считать и «невозможные» корни уравнения «положительными или отрицательными») так: «Число положительных корней любого уравнения равно числу перемен знака его членов с $+$ на $-$ или с $-$ на $+$; остальные корни являются отрицательными».

Справедливость этого утверждения он доказывает, однако, только для квадратных и кубических уравнений с помощью рассмотрения возможных частных случаев (например, когда уравнение имеет корни a, b, $-c$ $(a, b, c > 0)$ и $a + b > c$ или $a + b < c$) и оперирования с соответствующими неравенствами. Уравнения трактуются при этом так, как если бы все корни их могли быть только действительными. Несмотря на отсутствие каких-либо указаний на способ обобщения этих рассуждений, Маклорен заканчивает их замечанием (стр. 147), что «тот же способ рассуждения может быть распространен на уравнения высших степеней, а правило, приведенное в § 19, распространено на все виды уравнений».

В своем замечании, заключенном не только в квадратные скобки, но и в рамку, Маркс намечает идею общего доказательства правила Декарта (формулируемого без допущения «положительных» и «отрицательных» комплексных чисел) на примере, который нетрудно обобщить.

Он пишет:

Es sei $f(x) = 0$, wo $f(x)$ [vollständiges] polynom *; seine Zeichen seien

Пусть $f(x) = 0$, где $f(x)$ — [полный] многочлен *; его знаки пусть будут

$$+ - + + - - - + + - + . \qquad (1)$$

Es werde eine neue Wurzel m in die Gleichung eingeführt; dann $f(x)$ zu multiplizieren mit dem Faktor $(x - m)$, und wenn wir bloss die Zeichen der Multiplikation [mit $-m$] hinsetzen, so (2), wenn m positiv; also $f(x) \cdot (x - m)$:

Введем в уравнение новый корень m; тогда нужно будет умножить $f(x)$ на $(x - m)$, и если мы запишем только знаки, получаемые при умножении [на $-m$], то будем иметь (2), когда m положительно; следовательно, $f(x) \cdot (x - m)$:

$$\text{I)} \qquad \begin{array}{cccccccccccc} + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + & \\ & - & + & - & - & + & + & + & - & - & + & - \\ \hline + & - & + & \pm & - & \pm & \pm & + & \pm & - & + & - \end{array} \qquad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ \\ \end{array}$$

Wenn aber m negative, also $f(x)$ zu multiplizieren mit $(x + m)$, so (3):

Если же m отрицательно, т. е. $f(x)$ нужно умножить на $(x+m)$, то (3):

$$\text{II)} \qquad \begin{array}{cccccccccccc} + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + & \\ & + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + \\ \hline + & \pm & \pm & + & \pm & - & - & \pm & + & \pm & \pm & + \end{array} \qquad \begin{array}{c} (1) \\ (3) \\ \\ \end{array}$$

Vergleichen wir in I) und II) die Resultate mit (1), so:

Сравнение результатов в I) и II) с (1) дает

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + & \\ + & - & + & \pm & - & \pm & \pm & + & \pm & - & + & - \end{array}\right. \qquad (\mathrm{I})$$

Je nachdem bei den zweifelhaften Zeichen $\pm$ das Zeichen $+$ oder $-$ sei, erhalten wir wenn für $\pm$ hier [allerorts] $+$ gesetzt wird:

В зависимости от того, какой из двух знаков $+$ или $-$ будет иметь место для сомнительных знаков $\pm$, получим, если вместо $\pm$ поставим здесь [всюду] $+$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + & \\ + & - & + & + & - & + & + & + & + & - & + & - \end{array} \qquad \begin{array}{c} (1) \\ (\mathrm{I}) \end{array}$$

* Многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ называется «полным», если все его коэффициенты отличны от нуля. Уравнение $f(x) = 0$ будем называть «полным», если $f(x)$ — полный многочлен. — *Ред.*

Wenn [allerorts] — gesetzt wird:

Если [всюду] поставим —:

$$+-+----+--+-,$$

in beiden Fällen *ein Zeichenwechsel* mehr sub I), und ebenso bei Vergleichung sub II) [mindestens] *eine Kontinuation desselben Zeichens mehr*.

в обоих случаях будет на *одну перемену* знака больше sub I), и так же при сравнении sub II) [по меньшей мере] *одним сохранением того же знака больше.*

a) Jede *additionelle positive Wurzel* führt also mindestens 1 *additionellen Zeichenwechsel* herbei und jede additionelle negative Wurzel — mindestens 1 *additional continuation von denselben Zeichen*.

a) Каждый *добавленный положительный корень* влечет за собой, следовательно, по меньшей мере 1 *дополнительную перемену знака*, а каждый добавленный отрицательный корень — по меньшей мере 1 *дополнительное сохранение того же знака.*

b) *Können daher in der Gleichung nicht mehr positive Wurzeln enthalten sein als Zeichenwechsel sind und nicht mehr negative Wurzeln als continuations of sign ind.*

b) *Число положительных корней уравнения не может быть поэтому больше числа перемен знака, а число отрицательных корней не больше числа постоянств знака.*

c) *Sind alle Wurzeln real, so Zahl der positiven Wurzeln = Zahl der Zeichenwechsel* und Zahl der negativen Wurzeln = Zahl der continuations of sign (Zeichenfolgen).

c) *Если все корни действительны, то число положительных корней равно числу перемен знака*, а число отрицательных корней равно числу сохранений знака (постоянств знака).

Под рамкою рукою Маркса написано (л. 76, внизу):

⟦Was in [ ] nicht bei Mac Laurin in diesem Heft «Aus Mac Laurin's Algebra», beginnend p. 49.⟧

⟦То, что в этой т[етради] [под заголовком] «Из алгебры Маклорена», начиная со стр. 49, заключено в [ ], не принадлежит Маклорену.⟧

Помещенное в рамку замечание явно носит беглый и черновой характер. Не все, в частности, в нем полностью оговорено. Ясно, однако, что наименьшее число перемен знака в результате добавления положительного корня (т. е. в случае I) будет иметь место, когда все «сомнительные» знаки $\pm$ мы заменим всюду одним и тем же знаком: плюсом или минусом *. Поэтому, если даже при таких

* В случаях, когда на каких-либо из мест, занятых знаками $\pm$, окажутся нули, число перемен знака будет не меньше, чем в случаях, когда все знаки $\pm$ заменяются только на $+$ или только на $-$. — *Ред.*

заменах число перемен знака в результате увеличивается на единицу, то и в других случаях оно увеличится на единицу по меньшей мере. Проверка, выполненная Марксом, таким образом, вполне достаточна.

Так как число отрицательных корней уравнения $f(x) = 0$ равно числу положительных корней уравнения $f(-x) = 0$ и — если оно полное — всякому постоянству знака в $f(x)$ взаимно однозначно соответствует перемена знака в $f(-x)$, а Маркс занимается здесь только полными уравнениями, то и в применении к отрицательным корням замечание в рамке является вполне оправданным, хотя, по-видимому, обосновывавшимся непосредственно (аналогично тому, как это делалось для положительных корней).

На следующей стр. 57 (л. 77) в связи с конспектированием правила преобразования уравнения в такое, корни которого только знаками отличаются от корней данного (Маклорен иллюстрирует эти корни на примере уравнения

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0, \qquad (1)$$

преобразуемого в

$$x^4 + x^3 - 19x^2 - 49x - 30 = 0; \qquad (2)$$

см. гл. III, § 23, стр. 148), Маркс, естественно, возвращается еще раз к последнему пункту своего замечания в рамке. Текст отмечен сбоку знаком E. Он пишет здесь:

⟦Die Sache erklärt sich sehr einfach aus dem in [ ] (unten c) vorige Seite Nachgewiesenen. Die Wurzeln für (1) waren $+1$, $+2$, $+3$, -5; den 3 positiven Wurzeln entsprechen 3 Zeichenwechsel in (1), vom ersten Glied zum 2-ten, vom 3-ten zum 4-ten, vom 4-ten zum 5-ten. Es ist, entsprechend der *einen negativen Wurzel* -5, eine *Zeichenfolge*, nämlich im 2-ten und 3-ten Glied: $(-x^3 - 19x^2)$, [vorhanden].

Durch die *Verwandlung der Zeichen ins Gegenteil* erhalten *Wurzeln* -1, -2, -3, $+5$; daher 3 Reihenfolgen von Zeichen; eine: $(+x^4 + x^3)$, und 2, nämlich: $(-19x^2 - 49x - 30)$, dagegen für die eine positive Wurzel 5 ein Zeichenwechsel vom 2-ten Glied zum 3-ten: $(+x^3 - 19x^2)$.⟧

⟦Это разъясняется очень просто из указанного в [ ] (пункт с) на предыдущей странице. Корнями для (1) были $+1$, $+2$, $+3$, -5; трем положительным корням соответствуют три перемены знака в (1), от первого члена ко 2-му, от 3-го к 4-му, от 4-го к 5-му. В соответствии с *одним отрицательным корнем* -5 [имеется] одно *постоянство знака*, именно во 2-м и 3-м члене: $(-x^3 - 19x^2)$.

Заменою знаков на противоположные мы получаем *корни* -1, -2, -3, 5; поэтому 3 постоянства знака; одно: $(+x^4 + x^3)$, и 2, именно: $(-19x^2 - 49x - 30)$, между тем как для одного положительного корня 5 одна перемена знака от 2-го члена к 3-му: $(+x^3 - 19x^2)$.⟧

Глава III (§§ 23—32, стр. 138—161) — содержащая далее правила преобразования уравнений, позволяющие увеличить (соответственно уменьшить) все корни уравнения на одно и то же число e, «освободить» уравнение от 2-го (вообще какого-нибудь промежуточного) члена, умножить все его корни на данное число, заменить его эквивалентным уравнением с коэффициентом старшего члена, равным единице, «освободить» уравнение от дробных коэффициентов, заменить его таким, корни которого обратны корням данного,— полностью законспектирована далее Марксом (лл. 78—83, стр. 58—63 по Марксу). Каких-либо замечаний Маркса (не чисто выкладочного характера) здесь нет. Иначе обстоит дело с главой IV.

Интерес Маркса к алгебраическим истокам дифференциального исчисления побуждает его обратить особое внимание на эту главу, посвященную алгорифмам отыскания кратных корней уравнения. Конспект ее содержит ряд критических замечаний Маркса. Большинство их носит просто характер замечаний на полях. Таковы, например, следующие:

I. Вопрос об отыскании кратных корней уравнения, *отличных от нуля*, Маклорен сводит к вопросу о кратных корнях другого уравнения, *равных нулю*, для чего преобразует данное уравнение, заменяя в нем x на $y + e$. При этом он объясняет, что для того, чтобы написать последний (свободный) член преобразованного уравнения, достаточно подставить e вместо x в первоначальное уравнение. Законспектировав это, Маркс добавляет (л. 84, стр. 64 у Маркса):

⟦i. e. e zu einer Wurzel von x machen, was Mac Laurin nicht sagt.⟧

⟦т. е. сделать e корнем для x, чего Маклорен не говорит.⟧

II. Правило получения других членов преобразованного уравнения из его свободного члена Маклорен объясняет сначала только на примерах (без общей формулировки) (§ 34, стр. 163—164), после чего пишет, что «доказательство этого легко обобщить» с помощью биномиальной теоремы. Приведя (в кавычках) цитату из Маклорена с указанием страницы: «(p. 164)», Маркс замечает (л. 84, стр. 64 у Маркса):

⟦Es ist hier in der Tat gar kein Beweis gegeben, sondern nur die Tatsache, die aus richtigen Rechnungsoperationen hervorgeht, konstatiert.⟧

⟦В действительности здесь нет вообще никакого доказательства, но только констатируется факт, который обнаруживается при выполнении правильных вычислительных операций.⟧

III. Характер такого рода замечаний Маркса особенно ясно виден из следующей выдержки из его конспекта (§ 36, стр. 165 по Маклорену), которая приводится здесь полностью (л. 85, стр. 65 у Маркса):

4) Gesetzt nun 2 Werte von x seien einander gleich und ebenso e gleich. ⟦Sehr unbehilflicher Ausdruck dafür, dass x zwei Werte e hat.⟧ Dann werden 2 Werte von y in der transformierten Gleichung $= 0$ sein, da $y = x - e$ ⟦dies war vorher zu bemerken, als die Gleichung in e

4) Допустим теперь, что 2 значения x равны друг другу и равны также e. ⟦Очень беспомощное выражение того, что x имеет 2 значения e.⟧ Тогда 2 значения y будут $= 0$ в преобразованном уравнении, так как $y = x - e$ ⟦это нужно было заметить еще до того, как

identisch mit der ursprünglichen in x sich zeigte. Wird von vornherein gesagt, da $x = y + e$ (oder, was dasselbe, $y = x - e$), so kann x nur gleich e sein, wenn $y = 0$ ist. Hat also die ursprüngliche * Gleichung 2 Werte e für x, so 2 mal $y = 0$.]]

уравнение в e оказалось тождественным с первоначальным в x. С самого начала говорится, что так как $x = y + e$ (или, что то же, $y = x - e$), то x может быть равно e, только если $y = 0$. Поэтому, если первоначальное * уравнение имеет 2 значения e для x, то 2 раза $y = 0$.]]

Другой характер носят два больших замечания Маркса (второе непосредственно вслед за первым) на л. 87 (окончание на л. 88, по Марксу 68, самая верхняя строка только; на фотокопии л. 87 не видно номера, написанного рукою Маркса). Здесь прежде всего Маркс выражает недоумение по поводу того, что Маклорен не отмечает связи между методом отыскания кратных корней уравнения и дифференцированием. Текст отмечен сбоку знаком Ʃ. Он пишет:

[[Es ist höchst sonderbar, dass Mac Laurin, der diese *Methode*, die *gleichen Wurzeln in einer Gleichung* zu entdecken, [aufgefunden hat], und im Differentialcalcul eben diese Methode anwandte um *die Reihe* der allgemein gegebnen $f(x)$ zu entwickeln, mit keinem Wort andeutet, dass hier *algebraisch bewiesen Gesetz für Ableitung* der Gleichungen auseinander, so dass, wenn die Originalgleichung:

[[Весьма удивительно, что Маклорен, который [нашел] *этот метод отыскания равных корней уравнения* и применил в точности тот же метод в дифференциальном исчислении для разложения *в ряд* функции $f(x)$, данной в общем виде, ни одним словом не обмолвился о том, что здесь *алгебраически доказывается закон для* последовательного *вывода* производных уравнений, так что если первоначальное уравнение:

$$\text{I)}\quad x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0 = f(x),$$

[so] [то]

$$\text{II)}\quad 4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0 = f'(x);$$

$$\text{III)}\quad 6x^2 - 3px + q = 0 = f''(x),$$

nämlich unmittelbar $12x^2 - 6px + 2q$, dividiert durch $2, = 6x^2 - 3px + q$,

действительно, непосредственно $12x^2 - 6px + 2q$, поделенное на 2, дает $6x^2 - 3px + q$;

$$\text{IV)}\quad 4x - p = 0 = f'''(x);$$

* Здесь в рукописи описка: вместо «ursprüngliche» (первоначальное) написано «transformierte» (преобразованное).— *Ред.*

<table>
<tr><td>nämlich $12x - 3p$, dividiert durch 3, $= 4x - p$;</td><td>действительно, $12x - 3p$, поделенное на 3, дает $4x-p$;</td></tr>
</table>

$$\text{V)}\ 4(x^0) = 4 \left[\begin{matrix}\text{da} \\ \text{так как}\end{matrix} \quad x^0 = 1 \right] = f^{\mathrm{IV}}(x).$$

<table>
<tr><td>Dies letzte keine Gleichung mehr, aber auch das letzte Produkt der Differentiation aus der die Gleichungen algebraisch abgeleitet.]]</td><td>Это последнее — уже не уравнение, но все еще последний продукт дифференцирования, посредством которого алгебраически выведены эти уравнения.]]</td></tr>
</table>

Второе замечание Маркса содержит критику ошибки, в которой он подозревает Маклорена.

Суть дела в том, что Маклорен сначала объясняет — правда, не пользуясь еще общими выражениями для многочленов, а только поясняя свою мысль на примерах,— что если уравнение

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-2} y^2 + a_{n-1} y + a_n = 0$$

имеет два корня, равных нулю (Маклорен пишет «два значения» y, «равных ничему»), то многочлен в его левой части должен иметь в качестве множителей $(y - 0)$ и $(y - 0)$, т. е. должен быть вида My^2 (где M — многочлен), откуда следует, что коэффициенты a_{n-1} и a_n должны быть равны нулю.

Способ выражения этой мысли в «Алгебре» Маклорена, однако, таков, что для читателя не всегда ясно, что именно автор хочет сказать.

В применении к уравнению $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, имеющему кратный корень $x = e$ (т. е. при подстановке $x = y + e$) и преобразующемуся в уравнение с кратным корнем $y = 0$, Маклорен пишет:

«Поскольку мы предполагаем $x = e$, то последний член преобразованного уравнения, т. е. $e^3 - pe^2 + qe - r$, исчезает. А так как два значения y исчезают, то предпоследний член, т. е. $3e^2y - 2pey + qy$, исчезнет в то же время, так что $3e^2 - 2pe + q = 0$» (стр. 166).

Слова «два значения y исчезают» не имеют, однако, точного смысла. Если мы *два* раза придаем переменной y значение 0, то она получает при этом *одно* значение (нуль), а не два. Вместо того, чтобы сказать, что уравнение (преобразованное) имеет два «корня», равных нулю (т. е. что его левая часть разлагается на множители, в число которых $(y - 0)$ входит дважды), Маклорен говорит (в этом месте) о двух «значениях» y, равных нулю. Неудивительно, что такая подмена слова «корень» словом «значение» могла создать у Маркса (неправильное) впечатление, что Маклорен заключает просто о равенстве нулю выражения $3e^2 - 2pe + q$ из равенства нулю выражения $3e^2y - 2pey + qy$ при $y = 0$, т. е. что Маклорен допускает грубую ошибку.

О том, что у Маркса такое впечатление действительно создалось, и говорит его второе замечание (л. 87), заключенное им в квадратные скобки и относящееся непосредственно к следующему месту из Маклорена на той же стр. 166:

«Если предложено биквадратное уравнение, именно $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, и два из его корней равны, тогда в предположении, что $e = x$, два из значений y должны исчезать, и уравнение § 34 * приведется к следующему

* Речь идет об уравнении, полученном подстановкой $x = y + e$ из уравнения $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$.— *Ред.*

виду:

$$\left.\begin{array}{r} y^4-4ey^3+6e^2y^2 \\ -\ py^3-3pey^2 \\ +\ qy^2 \end{array}\right\}=0.$$

Так что $4e^3-3pe^2+2qe-r=0$ или, так как $x=e$,

$$4x^3-3px^2+2qx-r=0».$$

В своем замечании Маркс пишет (текст отмечен сбоку чертой):

⟦Dass Mac Laurin in seiner Demonstration, wie vorhin gesehn, blunders macht, fasst sich darin zusammen, dass er sagt: Hat y ein 2-tes Mal den Wert 0, so folgt daraus, dass sein erster Koeffizient ⟦denn in der *ersten abgeleiteten* Gleichung figuriert y nicht, ist $y^0=1$⟧ $=0$ ist. Hier wird mit dem Wort «Wert» gespielt.

Ist in $(4e^3-3pe^2+2qe-r)y$ der Wert von $y=0$, so heisst das, nach allen abgeleiteten Regeln, dass wir dann haben

⟦Что Маклорен в своем доказательстве, как мы видели выше, допускает грубые промахи, выражается в итоге в том, что он говорит: Если y второй раз принимает значение 0, то отсюда следует, что его первый коэффициент ⟦так как в *первом производном* уравнении y не фигурирует, $y^0=1$⟧ равен нулю. Это — игра со словом «значение».

Если в $(4e^3-3pe^2+2qe-r)y$ значение $y=0$, то это означает, по всем выведенным правилам, что мы тогда имеем

$$(4e^3-3pe^2+2qe-r)\cdot 0,$$

wo der Wert 0 für y gesetzt; damit verschwindet aber sein Koeffizient, nicht weil er selbst gleich 0, sondern weil er $0=y$ zum Faktor hat. Es soll aber grade herausgebracht werden, dass $4e^3-3pe^2+2qe-r=0$, so ist die Gleichung zu dividieren durch den Faktor $y-0$ (da $y=0$ gibt als Faktor der Gleichung $(y-0)$), also durch y [155], und dann wird der Koeffizient von y als Glied der Transformierten, die $=0$, ebenfalls $=0$, *unabhängig von* y [156]. *Die Division durch y in einer Glei-*

где на место y подставлено значение 0; но тем самым его коэффициент исчезает не потому, что он сам равен нулю, но потому, что он имеет множителем 0, равный y. Нужно, однако, получить именно то, что $4e^3-3pe^2+2qe-r=0$, и поэтому нужно разделить уравнение на множитель $y-0$ (так как $y=0$ дает в качестве множителя уравнения $(y-0)$), т. е. на y [155], а тогда коэффициент при y, как член преобразованного выражения, которое $=0$, также становится равным 0 *независимо от* y [156]. *Де-*

chung $= 0$, *wo jedes Glied eine Potenz von y zum Faktor hat, selbstverständlich ausführbar*. Dividieren wir aber das erste Mal durch y, so werden y, y^2, y^3 die respektiven Faktoren der 3 bleibenden Glieder; dividieren wir noch einmal durch y, so y und y^2 Faktoren der 2 restierenden Glieder, und dividieren wir das letzte Mal durch y, so bleibt nur y mit dem Koeffizienten 1 übrig.⟧

ление на y в уравнении, равном 0, *где каждый член имеет множителем какую-нибудь степень y, разумеется, выполнимо*. Но если мы разделим первый раз на y, то y, y^2, y^3 будут соответствующими множителями трех остающихся членов; если мы разделим еще раз на y, то y, y^2 будут множителями двух сохраняющихся членов, и если мы разделим последний раз на y, то останется только y с коэффициентом 1.⟧

Под словами «как мы видели выше» Маркс имеет здесь в виду аналогичное замечание, сделанное им ранее, в связи с вопросом о кратных корнях кубического уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ (Маклорен, ч. II, §§ 33, 36). Преобразование этого уравнения посредством замены x на $y + e$, где e — корень первоначального уравнения, дает, так как $e^3 - pe^2 + qe - r = 0$,

$$\left.\begin{matrix} +3e^2 \\ -2pe \\ +q \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} 3e \\ -p \end{matrix}\right\} y^2 - y^3 = 0;$$

и в связи с замечанием Маклорена, что если «два значения y исчезают», то коэффициент при y (в преобразованном уравнении) «также должен исчезать» (стр. 166), Маркс пишет следующее (лл. 85—86, стр. 65—66 по Марксу):

Hier wird $3e^2 - 2pe + q$ keineswegs $= 0$, weil y einen 2-ten Wert $= 0$ hat, denn $3e^2 - 2pe + q$ multipliziert mit 0 ⟦dies 0 gleich y⟧ $= 0$, beweist nicht, dass der Koeffizient von 0 ebenfalls 0 ist, sonst wäre alles 0, weil alles, mit 0 multipliziert, $=0$ wird.

Здесь $3e^2 - 2pe + q$ отнюдь не становится $=0$, потому что y имеет второе значение, равное 0, ибо равенство нулю произведения $3e^2 - 2pe + q$ на 0 ⟦этот 0 равен y⟧ не доказывает, что коэффициент нуля также есть 0, иначе все было бы нулем, так как все, будучи помножено на 0, становится $=0$.

Das ein 2-ter Wert von y gleich 0, übersetzt Mac Laurin, dass der *Koeffizient* von y gleich 0 sein muss!

Что некоторое 2-е значение y равно 0, Маклорен переводит как означающее, что *коэффициент* при y должен быть равен 0!

На той же странице ниже Маркс пишет:

Sind 2 gleiche Wurzeln in der Gleichung in x vom 4-ten Grad (*Gleichung* 1) und $e = x$, also $x = y + e = y + x$, also $y = 0$,

Если в уравнении в x 4-й степени (*уравнении* 1) имеются два равных корня и $e = x$, т. е. $x = y + e = y + x$, so müssen 2 Werte von y (soll heissen 2 Koeffizienten von [y und] y) verschwinden...

следовательно, $y = 0$, то два значения y (следовало бы говорить: два коэффициента при [y и] y) должны исчезать...

Таким образом, и здесь Маркс возражает против неправильного употребления Маклореном слова «значение». (Равенство нулю коэффициента при y есть следствие того, что 0 есть кратный «корень» уравнения, а не просто некоторое второе «значение» y.)

Конспектируя следующую, пятую главу «Алгебры» Маклорена, Маркс не только выполняет некоторые выкладки, опущенные Маклореном, но и иллюстрирует его рассуждения на примерах, которых нет у Маклорена. Так, сближение границ корней уравнения Маркс рассматривает на примере уравнения

$$x^3 - 2x^2 - 5 = 0,$$

которого у Маклорена нет.

Естественно думать поэтому, что и читая Маклорена, Маркс обращался к литературе, содержавшей дальнейшее развитие рассматривавшихся Маклореном вопросов. О том, что это действительно имело место, Маркс говорит и сам. Так, на стр. 64 (л. 84), в самом начале конспекта главы IV из Маклорена, по поводу преобразования уравнения

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

подстановкою $y+e$ вместо x Маркс пишет (в рамке):

Mac Laurin's Nachfolger drehn das um, indem sie statt $(y + e)$ (z. B.) $(e + y)$ substituieren in x, so dass x^3 wird $(e + y)^3$ und so weiter. Die Originalgleichung im obigen Fall dann wieder umgeformt in:

Последователи Маклорена оборачивают это, подставляя вместо $(y + e)$ (например) $(e+y)$ в x, так что x^3 обращается в $(e + y)^3$ и т. д. В вышеприведенном случае первоначальное уравнение преобразуется тогда в

$$\left.\begin{array}{ll} e^3 & +\ 3e^2 \\ -pe^2 & -2pe \\ +qe & +\ q \\ -r & \end{array}\right\} y \quad \left.\begin{array}{l} +3e \\ -\ p \end{array}\right\} y^2 + y^3 = 0.$$

К числу таких «последователей Маклорена» относится, по-видимому, Hall, с выдержкой из «Элементов алгебры» которого мы уже имели дело в связи с вопросом о дальнейшем развитии алгорифмов «инволюции» (возведения в степень, см. стр. 379—380).

Законспектировав рассуждение, с помощью которого Маклорен доказывает, что наибольшая абсолютная величина отрицательных коэффициентов уравнения («наибольший отрицательный коэффициент»), увеличенная на единицу, всегда есть верхняя граница корней уравнения, и которое он проводит на примере кубического уравнения

$$x^3 - px^2 - qx - r = 0$$

отдельно для всех трех случаев, когда этим «наибольшим отрицательным коэффициентом» являются последовательно p, q или r, Маркс обобщает это рассуждение, четко формулируя его основную идею.

Тетрадь заканчивается следующим замечанием Маркса (л. 92; у Маклорена этого нет):

⟦In einer *vollständigen* Gleichung, wo kein Glied fehlt, und wenn sie bloss Zeichenwechsel oder bloss Zeichenfolgen hat, muss jede Wurzel für sich genommen [i. e. nach absolutem Werte] kleiner als der Koeffizient = p sein; denn er ist die *Summe der Wurzeln* mit *entgegengesetzten Zeichen*; bei *bloss positiven* (Zeichenwechsel) oder *bloss negativen* (Zeichenfolge) Wurzeln ist er also grösser als jede einzelne Wurzel.⟧

⟦В *полном* уравнении, где ни один член не отсутствует и знаки либо остаются неизменными, либо последовательно чередуются, всякий корень, взятый сам по себе [т. е. по абсолютной величине], должен быть меньше коэффициента p; ибо последний есть *сумма корней*, взятых с *противоположными знаками*; при *только положительных* (чередование знаков) или *только отрицательных* (сохранение знаков) корнях он, следовательно, больше, чем каждый корень.⟧

ДРУГИЕ РУКОПИСИ ПО АЛГЕБРЕ

Ед. хр. 3934

Тетрадь по алгебре. Особого названия не имеет. Является продолжением «Алгебры II» (см. выше рукопись 3933). Листы 1—22; нумерация Маркса 1—19, 23—25. Язык немецкий, встречаются английские слова и выражения.

Л. 1. Тетрадь начинается следующим замечанием Маркса, которое, однако, носит характер резюмирующего дальнейший текст:

⟦5) Die *Aufsuchung der reellen Wurzeln einer Gleichung durch Findung der limits der Wurzeln* hat nur Sinn, soweit die Wurzeln *irrationnell*, d. h. keine ganze Zahlen sind, also nur *annähernd* die Wurzelwerte darstellen. Ist die Gleichung *rationnell oder kommensurabel*, d. h. sind ihre Wurzeln ganze Zahlen, so müssen sie als Faktoren im letzten Glied der Gleichung = dem Produkt aller Wurzeln — enthalten sein. Dies letzte Glied wird daher in seine Faktoren aufgelöst und durch [die] früher erklärte Methode diejenigen derselben, welche die Wurzeln Bilden, ausgeschieden.

Ist diese Gleichung aber nicht kommensurabel, so besteht die folgende, von Mac Laurin angegebne Methode darin die

⟦5) *Отыскание действительных корней уравнения посредством нахождения границ корней* имеет смысл только в том случае, когда корни *иррациональны*, т. е. не являются целыми числами, и, следовательно, значения корней представляются лишь *приближенно*. Если уравнение *рационально или соизмеримо*, т. е. его корни — целые числа, то они должны содержаться как множители в последнем члене уравнения, равном произведению всех корней. Этот последний член нужно разложить поэтому на множители и с помощью разъясненного ранее метода выделить из них те, которые являются корнями.

Но если уравнение несоизмеримо, то следующий, приведенный Маклореном, метод состоит в том, чтобы преобразовать

Gleichung zu transformieren, indem $x = y \pm k$, also $y = x \mp k$ gesetzt wird; k ist hier eine Zahl, die eine annähernde Wurzel, sei sie nun grösser oder kleiner als x; Mac Laurin geht von letzterem aus. Durch die Supposition von $y+k$ für x wird die transformierte Gleichung ebensowohl gleich Null, wie die ursprüngliche; sie ist zweitens *von denselben Grad*; je nachdem wir für x^n schreiben $(y+k)^n$ oder $(k+y)^n$, wird die letzte oder erste Vertikalreihe [157] der transformierten Gleichung eine Gleichung (wo y nur als y^0 Faktor ist) (wie Lacroix tat, $(k+y)^n$ zu entwickeln besser, weil in der Methode der limits jedesmal mit dem Glied in k zu beginnen, d. h. es als = Null zu entfernen), worin k in derselben Weise eingeht, wie x in der Originalgleichung. $f(k)$ hier für $f(x)$. In dieser Gleichung figuriert k in der Tat als eine Wurzel der Originalgleichung, denn $y+k=x$; hier aber $y=0$, also $k=x$. Diese Gleichung kann daher auch weiter keine limits liefern, als bereits die durch die Originalgleichung gelieferten limits der Gleichung selbst, nämlich die limit der positiven Glieder (oder auch negativen) und die limit 0 [158].]]

уравнение, полагая $x = y \pm k$, следовательно, $y = x \mp k$; k здесь число, представляющее приближенный корень, больший или меньший, чем x; Маклорен начинает с последнего. При подстановке $y+k$ вместо x преобразованное уравнение также становится равным нулю, как и первоначальное; оно, далее, *той же степени*; в зависимости от того, пишем ли мы вместо x^n $(y+k)^n$ или $(k+y)^n$, последний или первый вертикальный ряд [157] преобразованного уравнения становится уравнением (где y только как y^0 является множителем) (лучше разлагать, как это делает Лакруа, $(k+y)^n$, так как в методе границ всякий раз нужно начинать с члена в k, именно: его, как равный нулю, отбрасывать), в которое k входит так же, как x в первоначальное уравнение. $f(k)$ здесь вместо $f(x)$. В этом уравнении k фигурирует на самом деле как корень первоначального уравнения, ибо $y+k=x$; но здесь $y=0$, следовательно, $k=x$. Это уравнение не может поэтому давать каких-нибудь других границ, кроме доставляемых уже первоначальным уравнением границ самого уравнения, именно, границы положительных членов (а также отрицательных) и границы 0 [158].]]

Лл. 2—5. Окончание конспекта главы V «Алгебры» Маклорена (начало см. в тетради «Алгебра II», рукопись 3933).

Лл. 5—8. Конспект главы VI «Алгебры» Маклорена, озаглавленный у Маркса: **«F) Lösung von Gleichungen mit kommensurablen Wurzeln» («F. Решение уравнений с соизмеримыми корнями»).**

Лл. 8—15. Конспект главы VII «Алгебры» Маклорена, озаглавленный у Маркса: **«G) Auflösung von Gleichungen durch Findung von Gleichungen niedrigeren Grade, die ihre Divisoren sind»** (**«G. Решение уравнений посредством отыскания уравнений более низкой степени, являющихся их делителями»**).

Лл. 15—19. Конспект дополнения к главе VII «Алгебры» Маклорена, озаглавленный у Маркса: **«H) Reduktion von Gleichungen durch irrationale Divisoren»** (**«H. Редукция уравнений посредством иррациональных делителей»**).

Этот конспект Маркс начинает следующим замечанием:

1) *Dies Kapitel* nicht von Mac Laurin geschrieben, sondern von den Herausgebern ⟦denen dieser seine Schriften überantwortet hatte im Testament⟧ *Martin Folkes* (president of Royal Society), *Andrew Mitchel* und *Rev. Hill*, Chaplain des Erzbischofs von Canterbury.

Es ist eine Auseinandersetzung der «Rule», die *Newton*, p. 264, *Arithmetica Universalis*, gegeben hat.

1) *Эта глава* написана не Маклореном, а издателями ⟦которым Маклорен передал по завещанию свои рукописи⟧ *Мартином Фоулксом* (президентом Королевского общества), *Эндрью Митчелом* и *преподобным Хиллом* — капелланом Кентерберийского архиепископа.

Это — объяснение «правила», данного *Ньютоном* на стр. 264 своей *Arithmetica Universalis*.

В этом дополнении речь идет о свед́ении уравнения четвертой степени $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ к уравнению вида

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}px + Q\right)^2 = n\,(kx + l)^2$$

посредством отыскания подходящих значений чисел k, l, n и выражения для Q через эти числа.

Правила, согласно которому осуществляется это свед́ение (стр. 213—214), Маркс не выписывает и переходит сразу к конспектированию его обоснования, начинающегося у Маклорена на стр. 218. Маркс конспектирует лишь основную часть этого обоснования, заканчивая ее словами (л. 17—18):

Wenn also die respektiven Werte von n, k, l, Q diesen Bedingungen entsprechen oder einander entsprechen, beweist's, dass sie richtig vorausgesetzt wurden, und dass, wenn zur gegebnen Gleichung zugefügt $n\,(kx+l)^2$, sie komplettiert wird zum Quadrat $\left(x^2+\frac{1}{2}px+Q\right)^2$.

Если поэтому соответствующие значения для n, k, l, Q удовлетворяют этим условиям, т. е. друг другу соответствуют, то это доказывает, что они правильно предположены и что при добавлении $n\,(kx+l)^2$ к данному уравнению оно дополняется до квадрата $\left(x^2+\frac{1}{2}px+Q\right)^2$.

После этого Маркс конспектирует пример II из Маклорена (стр. 215—216), а затем пример I (стр. 214—215). Пример III (стр. 216—217) и весь дальнейший текст, следующий за обоснованием и посвященный различным ограничениям или частным случаям правила, остаются незаконспектированными. Но Маркс пишет: **«(cf. das Weitere p. 216—222)»** (**«ср. дальнейшее на стр. 216—222»**). Собираясь, очевидно, вернуться еще к этому, Маркс оставляет в тетради чистыми три страницы, продолжая конспект со стр. 23.

Лл. 20—22 (стр. 23—25 у Маркса). Конспект главы VIII «Алгебры» Маклорена, озаглавленный Марксом: **«I) Auflösung von Gleichungen nach Cardan's Rule und analoge»** (**«I. Решение уравнений по правилу Кардана и аналогичным»**). Из этой главы Маркс конспектирует первую часть, относящуюся к решению кубических уравнений и извлечению кубических корней. §§ 82 и 83 из главы VIII, посвященные решению уравнений четвертой степени, остаются незаконспектированными: на этом конспект «Алгебры» Маклорена обрывается. Больше Маркс к ней не возвращался.

Ед. хр. 3935

В этой архивной единице объединены несколько небольших рукописей, близких по содержанию к материалам, законспектированным Марксом в тетрадях по алгебре (см. рукописи 3932—3934). Всего 16 листов.

1. Лл. 1—2. Два листка под рубрикой **«VIII. Calculation of Logarithms»** (**«VIII. Вычисление логарифмов»**). По содержанию близки к § 14 (стр. 15—19 в нумерации Маркса) тетради «Алгебра II». Язык английский. Источником является книга: J. Hind, «The Elements of Plane and Spherical Trigonometry» (Хайнд, «Элементы плоской и сферической тригонометрии»), изд. 3-е, Кембридж, 1837, гл. VII, §§ 161—165, стр. 154—159.

2. Лл. 3—6. Четыре листка без объединяющего заголовка (по преимуществу выкладки); содержат вычисления логарифмов чисел, подсчет характеристик и мантисс и, далее, повторение материала предыдущих двух листков. Язык английский. Источником является та же книга Хайнда, главы: IV, §§ 89—99, стр. 67—78 и VII, §§ 161—177, стр. 154—167 (с некоторыми пропусками).

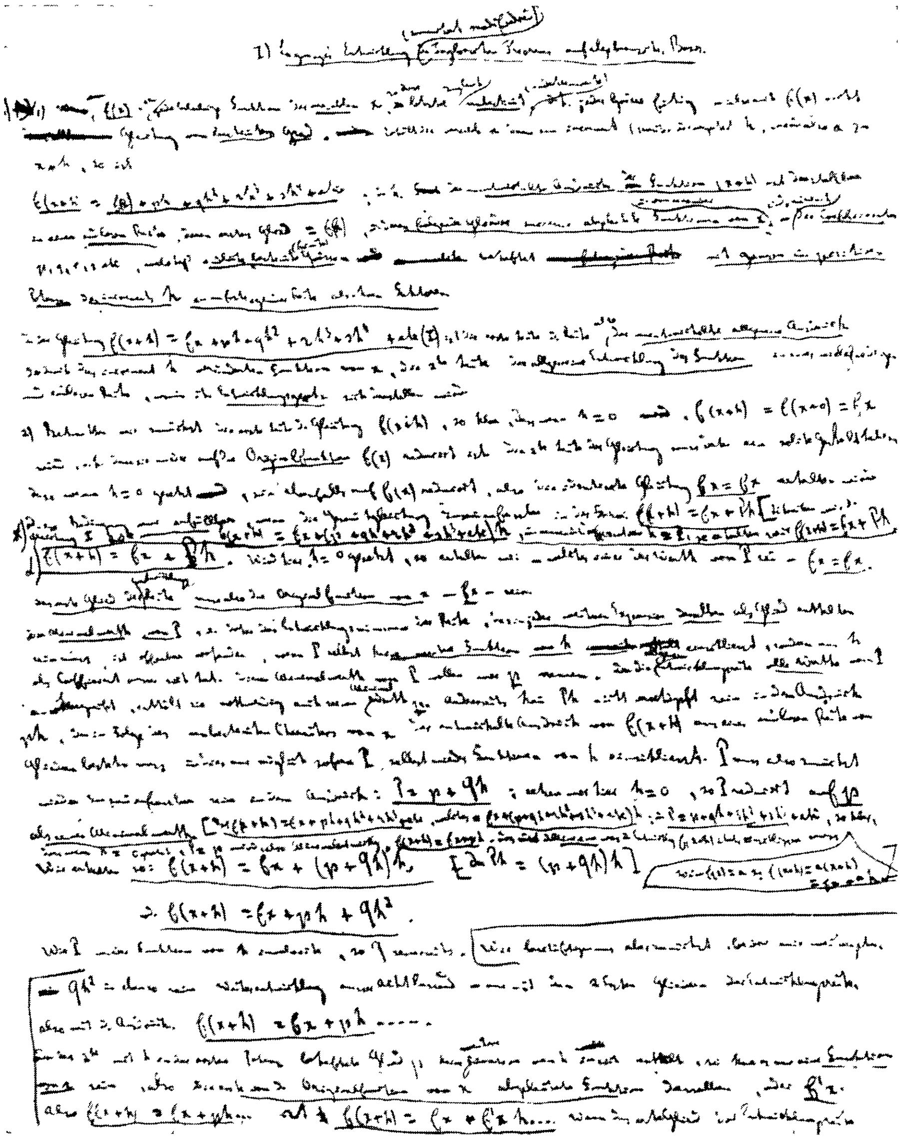
3. Лл. 7—10. Четыре, занумерованные Марксом цифрами 1—4, аккуратно написанные страницы под заголовком: **«Combinationslehre»** (**«Учение о комбинациях»**). Содержат некоторые основные понятия и теоремы элементарной комбинаторики. Разбиваются на части: **«Allgemeines»** (**«Общее»**), состоящее из трех пунктов: **«1) Einfachster Ausgangspunkt»** (**«1. Простейший исходный пункт»**), 2) в котором вводятся понятия формы или комплекса, высших и низших форм, порядков и классов форм, 3) содержат формулировку задач комбинаторики. Далее следуют части: **«A) Permutation»** (**«А. Перестановка»**) и **«B) Combination»** (**«Б. Сочетание»**). Символика та же, что и в тетради «Алгебра II» (стр. 27—38 в нумерации Маркса). Язык немецкий; источник не установлен; по содержанию имеется некоторое сходство с соответствующими параграфами в книге: M. A. Stern, «Lehrbuch der algebraischen Analysis», 1860, а также в указанных выше (см. стр. 115) книгах B. Thibaut и Fr. W. Spehr.

4. Лл. 11—13. Три листка, озаглавленные: **«Method of Indeterminate Coefficients»** (**«Метод неопределенных коэффициентов»**). Формулируется и доказывается метод неопределенных коэффициентов, который применяется затем к отысканию разложения $\sqrt{1+x}$ в степенной ряд. По содержанию относится

к пункту 3а) раздела III «Общая биномиальная теорема» тетради «Алгебра II» (см. стр. 385). Источник, возможно, тот же. Большое сходство имеется и с текстом стр. 195—196 книги: Wood, «Algebra», в которой на стр. 197 приводится тот же пример разложения в ряд $\sqrt{1+x}$. Язык немецкий, первая фраза на английском.

Словесный текст имеется только на первой странице; все остальное — выкладки.

5. Лл. 14—16. Три листка, объединенные заголовком: **«Potenzen und Radikalgrössen»** (**«Степени и корни»**). Очевидно, представляют собой задуманную Марксом вставку в один из конспектов по алгебре, так как заканчиваются словами: **«Schluss des Intermezzos»** (**«Окончание вставки»**). Рассматриваются операции с радикалами, представляемые часто в виде дробных степеней аргументов. Язык немецкий.



Первая страница рукописи «Теоремы Тейлора и Маклорена, первая систематизация материала».

«ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ»

Ед. хр. 3999

Содержит 6 страниц, объединенных заголовком: **«Successive Differentiation (nach G. W. Hemming, 1848, Cambridge)» («Последовательное дифференцирование (по Г. В. Хеммингу, 1848, Кембридж)»)**. Это — конспект некоторых параграфов из главы V книги: «An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus», by G. W. Hemming, Cambridge, 1848 (§§ 92—116, стр. 60—77). Страницы проставлены по второму изданию этой книги, 1852 г. Марксом законспектированы лишь следующие параграфы:

§ 92. Definition of an independent variable (Определение независимой переменной).

§ 94. Successive differentiation (Последовательное дифференцирование).

§§ 96—98. Relations between successive differentials and differential coefficients, when the independent variable is general (Отношения между последовательными дифференциалами и дифференциальными коэффициентами, когда независимая переменная является общей).

§ 99. Form the above relations when the quantity (x), under the functional sign, is independent variable (Образуй вышеприведенные отношения, когда величина (x) под знаком функции есть независимая переменная).

§ 107. To pass from an equation among differentials, with x as independent variable, to one among differential coefficients with respect to x, and the converse (Перейти от уравнения в дифференциалах с независимой переменной x к уравнению в дифференциальных коэффициентах относительно x, и наоборот).

§§ 108, 109. To pass from a general independent variable to x, and the converse (Перейти от общей независимой переменной к x, и наоборот).

В этих параграфах даются определения независимой переменной и общей независимой переменной, рассматриваются соотношения между производными и дифференциалами, связанные с инвариантностью дифференциалов первого порядка по отношению к выбору независимой переменной, и способы преобразования уравнений в производных в уравнения в дифференциалах, и наоборот. При этом переменная называется *независимой*, если ее дифференциал принят за постоянную. Если зависимость между переменными задана уравнением и никакой дифференциал не принят за постоянную, то Хемминг называет уравнение имеющим *общую независимую переменную* или говорит, что независимая переменная является *общей*.

Собственных замечаний Маркса этот конспект не содержит. Он, видимо, написан одновременно с разделом I «Лагранжев вывод (несколько видоизмененный) теоремы Тейлора на алгебраической основе» (рукопись 4000; см. ниже, стр. 412), т. е. во второй половине 70-х годов прошлого столетия, когда Маркса особенно интересовал вопрос о смысле последовательного дифференцирования.

Рукопись написана на английском языке с примесью немецкого.

ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА, ПЕРВАЯ СИСТЕМАТИЗАЦИЯ МАТЕРИАЛА

Ед. хр. 4000

48 лл. тетради (в нумерации Маркса стр. 1—48), по содержанию соответствующей тому периоду в занятиях Маркса математикой, когда ему представлялась еще убедительной попытка Лагранжа построить математический анализ как теорию аналитических функций. Очевидно, с целью разобраться в Лагранжевой теории и выявить ее алгебраические истоки Маркс систематически располагает в этой тетради конспекты всех тех разделов из имеющихся у него курсов Бушарла, Хайнда, Холла, Хемминга, Лакруа, Маклорена и др., в которых излагается теория Лагранжа или вопросы, связанные с нею.

Большую часть тетради (лл. 1—37) образуют четыре ее раздела, озаглавленные Марксом:

«I. Lagranges Entwicklung (somewhat modified) des Taylorschen Theorems auf algebraischer Basis» («I. Лагранжев вывод (несколько видоизмененный) теоремы Тейлора на алгебраической основе»), лл. 1—13.

«II. Taylorsches Theorem beruht auf Übersetzung aus der algebraischen Sprache des binomial Theorem in die differential Ausdrucksweise» («II. Теорема Тейлора основана на переводе биномиальной теоремы с алгебраического языка на дифференциальный способ выражения»), лл. 14—20.

«III. Mac Laurin's Theorem ist auch blosse Übersetzung aus der algebraischen Sprache des binomial Theorem in die Differentialsprache» («III. Теорема Маклорена также есть простой перевод биномиальной теоремы с алгебраического языка на язык дифференциальный»), лл. 20—28.

«IV. (Weiteres über Taylor's Theorem)» («IV. (Дальнейшее о теореме Тейлора)»), лл. 28—37.

Раздел I состоит из пунктов, озаглавленных прописными латинскими буквами от A) до F).

В пункте A) излагается по учебнику Бушарла (§§ 244, 253, стр. 168—169, 173—175) попытка Лагранжа * доказать, что *в общем случае*, за некоторыми исключениями, произвольная функция $f(x+h)$ разлагается в ряд по целым положительным возрастающим степеням h: попытка показать, что в таком общем случае должно иметь место равенство

$$f(x+h)=f(x)+ph+Qh^2,$$

* Бушарла пишет (стр. 168), что он модифицирует прием Лагранжа.— *Ред.*

где p — функция одного только x, не равная тождественно ни нулю, ни бесконечности, а Q — функция от x и h, представляемая в свою очередь в виде $Q = q + Rh$, где q — функция x, а R — функция от x и h, представляемая аналогично в виде $R = r + Sh$, и т. д. При этом излагается и попытка доказать, что множителем при p не может быть ни отрицательная степень h, ни $\log h$. Функция p определяется как производная от $f(x)$, и для нее вводится обозначение $f'(x)$.

В пункте В) определяются аналогично производные от производных (последовательные производные) и вводятся обозначения $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\mathrm{IV}}(x)$ и т. д. (по Бушарла § 248).

В пункте С) методом неопределенных коэффициентов с помощью равенства

$$f(x+(h+i)) = f((x+i)+h)$$

устанавливаются соотношения между коэффициентами разложения

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \text{ и т. д.}$$

и последовательными производными $f''(x)$, $f'''(x)$ и т. д. (по Бушарла, §§ 245—247, 249, 250). В последнем из этих параграфов вводятся обозначения для производных в дифференциальных символах. Изложение по Бушарла здесь прерывается. Далее по Хайнду (§ 97, стр. 127) показывается, что Лагранжевы производные являются пределами отношений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, т. е. «дифференциальными коэффициентами». При этом Маркс (л. 7) пишет:

Bei Vergleichung mit den Ergebnissen des Differentialcalculus werden wir finden, dass $f'(x)$ das reale Äquivalent von $\frac{dy}{dx}$, $f''(x)$ das von $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. ist, oder umgekehrt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. — die Differentialausdrücke für die realen Differentialcoefficients, i. e. die abgeleiteten Funktionen von x bei Lagrange sind.	При сравнении с результатами дифференциального исчисления мы найдем, что $f'(x)$ есть реальный эквивалент для $\frac{dy}{dx}$, $f''(x)$ — реальный эквивалент для $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. или, обратно, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. — дифференциальные выражения для реальных дифференциальных коэффициентов, т. е. производных функций от x у Лагранжа.

За этим следует приводимое ниже итоговое замечание Маркса, по содержанию относящееся (за исключением первой фразы, источником которой является учебник Хайнда; см. стр. 120) к §§ 251 и 252 учебника Бушарла.

Lagrange selbst sagt, dass dx für h, dx^2 für h^2 etc. nur wegen der uniformity of notation angenommen werden.	Лагранж сам говорит, что dx берется вместо h, dx^2 вместо h^2 и т. д. только для установления единообразия в обозначении.
Die expression $\frac{dy}{dx}$ wird hier zum Symbol der Operation, wodurch der Koeffizient von h in der Entwicklung $f(x+h)$ erhalten	Выражение $\frac{dy}{dx}$ становится здесь символом операции, посредством которой получается коэффициент при h в разложении

wird; $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. zeigen an, dass derselbe Prozess wiederholt, die coefficients der anderen Potenzen von h liefert. Man braucht also bloss durch *die Regeln der Algebra* zu wissen, was $\frac{dy}{dx}$ etc. für jede Funktion sein muss. Z. B. was ist $\frac{dy}{dx}$ für x^m? Wir haben die Funktion $(x+h)^m$ nach dem binomial Theorem zu entwickeln, welches gibt $x^m+mx^{m-1}h+$ etc.; da $\frac{dy}{dx}$ anzeigt den Koeffizient der *first power* of h in dieser Entwicklung, so $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$ usw.

Das ganze Problem also darauf reduziert, durch analytische Prozesse die verschiedenen Arten von Funktionenzuentwickeln, welche die Algebra bieten kann. Die Methode setzt also *die algebraische Entwicklung aller dieser Funktionen* voraus und dann von selbst gegeben der ihnen entsprechende Differentialausdruck. Umgekehrt dienen im Differentialcalculus die Differentialformen — i. e. die Operationen, die sie anzeigen — dazu auf eignem abkürzen dem Weg die Funktionen zu finden.

⟦Statt mit $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. bezeichnet Lagrange die abgeleiteten functions auch mit y', y'' etc.⟧

⟦Obgleich in der Methode Lagranges *die Prinzipien des Differentialcalculus* demonstriert

$f(x+h)$; $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. указывают, что тот же процесс, будучи повторенным, дает коэффициенты других степеней h. Нужно, следовательно, установить только по *правилам алгебры*, чем должно быть $\frac{dy}{dx}$ и т. д. для каждой функции. Например, что представляет собой $\frac{dy}{dx}$ для x^m? Нам нужно разложить по биномиальной теореме функцию $(x+h)^m=x^m+mx^{m-1}h+\ldots$; так как $\frac{dy}{dx}$ указывает коэффициент при *первой степени* h в этом разложении, то $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$, и т. д.

Вся проблема, следовательно, сводится к тому, чтобы при помощи аналитических процессов разложить различные виды функций, которые нам может предложить алгебра. Метод, следовательно, предполагает *алгебраическое разложение всех этих функций*, а тогда само собой получается соответствующее им дифференциальное выражение. Обратно, в дифференциальном исчислении дифференциальные формы, т. е. операции, ими указываемые, служат отысканию этих функций собственным сокращенным путем.

⟦Вместо $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. Лагранж обозначает производные функции также y', y'' и т. д.⟧

⟦Хотя в методе Лагранжа *принципы дифференциального исчисления* доказываются незаunabhängig von aller Rücksicht auf *limits, infinitesimals und evanescent quantities*, so muss er selbst doch beständig dazu flüchten sobald er zu den *Anwendungen* kommt, z. B. die Bestimmung von volumina, Oberflächen, Kurvenlängen, Erhaltung von Ausdrücken für subtangents etc. Seine Methode unterstellt Bekanntschaft mit den von ihm gelieferten analytischen Methoden für Entwicklung aller Arten von functions of $x+h$ in integral ascending positive powers of h, und diese Entwicklung oft sehr schwierig. Ausserdem liefern Taylor's und Mac Laurin's Theoreme, einmal festgestellt, Mittel mit grosser Leichtigkeit viele Funktionen zu entwickeln, deren expansion durch gewöhnliche Algebra ausserordentlich ermüdend umschweiflich.]]

висимо от какой бы то ни было ссылки на *пределы, бесконечно малые и исчезающие количества*, однако он постоянно вынужден к ним прибегать, как только дело коснется *приложений*, например определения объемов, поверхностей, длины кривых, отыскания выражений для подкасательных и т. д. Его метод предполагает знакомство с выдвинутыми им аналитическими методами разложения всех видов функций от $x+h$ по целым возрастающим положительным степеням h, а это разложение зачастую весьма трудно. Кроме того, теоремы Тейлора и Маклорена, будучи однажды установлены, дают средство с большой легкостью разлагать в ряд многие функции, разложение которых средствами обыкновенной алгебры достигается чрезвычайно утомительным обходным путем.]]

Пункт C) заканчивается следующим замечанием Маркса, в котором он, пользуясь теоремой Тейлора, из теоремы о биноме Ньютона получает производную для функции ax^m и, наоборот, с помощью теоремы о дифференциале произведения получает теорему о биноме Ньютона:

[[Wir haben eben gesehen, dass wenn $f(x+h)$ z. B. für ax^m zu entwickeln, es genügt $a(x+h)^m$ nach dem binomischen Lehrsatz zu entwickeln:

[[Мы только что видели, что если нужно получить разложение $f(x+h)$, например, для функции ax^m, то достаточно $a(x+h)^m$ разложить по биномиальной теореме:

$$mx^{m-1}ah,\ m(m-1)\,x^{m-2}\cdot\frac{ah^2}{1\cdot 2},\ \ldots$$

Wir wissen dann, dass der Koeffizient von $h=\frac{dy}{dx}$, der Koeffizient von $\frac{h^2}{1\cdot 2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

Мы знаем тогда, что коэффициент при h равен $\frac{dy}{dx}$, коэффициент при $\frac{h^2}{1\cdot 2}$ равен $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д.

Dagegen kann umgekehrt, den Taylorschen Satz once established, der *binomische Lehrsatz daraus entwickelt werden* und noch einfacher aus den elementarischen Differentialoperationen.

Можно, и обратно, после того, как теорема Тейлора установлена, *вывести из нее биномиальную теорему*; еще проще можно ее вывести с помощью самых элементарных дифференциальных операций.

Nachdem z. B. erst gezeigt, dass

После того, как уже, например, доказано, что

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx,$$

so allgemein, dass

то и вообще

$$d(xyztu) = xyzt\,du + yztu\,dx + ztux\,dy + tuxy\,dz + xyzu\,dt.$$

Dividiere ich nun beide Seiten durch $xyztu$, so

Поделив обе стороны на $xyztu$, мы получим

$$\frac{d(xyztu)}{xyztu} = \frac{xyzt\,du}{xyztu} + \frac{yztu\,dx}{yztux} + \frac{ztux\,dy}{ztuxy} + \frac{tuxy\,dz}{tuxyz} + \frac{xyzu\,dt}{xyzut}.$$

Also:

Следовательно,

$$\frac{d(xyztu)}{xyztu} = \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t}.$$

Werden x, y, z, t, u nun einander gleichgesetzt, also z. B. alle $= x$, und ist ihre Anzahl $= m$, so

Если теперь приравнять друг другу x, y, z, t, u и, следовательно, положить, например, их все равными x, а их число равным m, то

$$\frac{d(x^m)}{x^m} = \frac{m\,dx}{x};$$

also

следовательно,

$$d(x^m) = \frac{mx^m\,dx}{x} = mx^{m-1}\,dx.$$

Hence $\frac{d(x^m)}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ und in derselben Weise $\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$ etc., und so werden sämtliche [abgeleiteten] Funktionen von x^m entwickelt.]]

Значит, $\frac{d(x^m)}{dx}$ или $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ и таким же образом $\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$ и т. д. и так же могут быть получены все [производные] функции от x^m.]]

Пункт D), озаглавленный Марксом: **«D) Anwendung der Lagrangeschen Methode auf elementaren Kasus» («D. Применение метода Лагранжа к элементарному случаю»)**, содержит законспектированный по учебнику Хайнда (стр. 126—127) пример применения метода Лагранжа к отысканию производной от произведения двух функций y и z от аргумента x посредством представления наращенных значений для y и z в виде

$$y + ph + \frac{1}{1\cdot 2} qh^2 + \text{ и т. д.} \quad \text{и} \quad z + p_1 h + \frac{1}{1\cdot 2} q_1 h^2 + \text{ и т. д.}$$

и отыскания коэффициента при h (в первой степени) в их произведении с помощью формального оперирования с рядами.

Пункт E) озаглавлен Марксом: **«E) Weiteres über die Unmöglichkeit, dass $p = 0$, oder h mit [negativen], fraktionellen etc. indices behaftet in der allgemeinen Entwicklung von $f(x+h)$, wo x indeterminate, aber jeder Grösse fähig»** (**«E. Еще о невозможности того, что $p = 0$ или что h имеет [отрицательные], дробные и др. показатели в общем разложении для $f(x+h)$, где x — неопределенная, но могущая принимать любые значения переменная»**).

В этом пункте конспектируется сначала § 253 (стр. 173—175) учебника Бушарла, посвященный доказательству того, что коэффициент при h в первой степени лишь в частных случаях может быть равен нулю, а затем § 259 (стр. 179—180), содержащий Лагранжево доказательство того, что в разложение для $f(x+h)$ h не может входить в дробной степени, поскольку в таком случае число различных значений разложения для $f(x+h)$ было бы больше числа различных значений самого выражения $f(x+h)$. По поводу этого доказательства (принадлежность которого Лагранжу отмечена у Бушарла) Маркс пишет (л. 9):

Es wurde vorhin bewiesen, dass in ph das h keinen fraktionellen Index enthalten kann. Dies könnte in derselben Weise für jedes andere Entwicklungsglied der Reihe nachgewiesen werden. Lagrange gibt aber noch folgenden interessanten Beweis.	Ранее было показано, что в ph h не может содержать дробного показателя. Это можно было бы показать таким же образом для всякого другого члена разложения. Но Лагранж дает еще следующее интересное доказательство.

Вслед за этим пунктом без заголовка Маркс пишет следующее итоговое замечание (л. 11):

Lagrange 1) beweist *algebraisch*, was Taylor voraussetzt, dass solang x indeterminate bleibt, $f(x+h)$ stets darstellbar in infinite Reihe $= f(x) + ph + qh^2 +$ etc.; er gibt dem Differentialcalcul *algebraische Basis*, ist aber in dieser Hinsicht nur als Ausgangspunkt zu benutzen, da es ganz überflüssig, weitläufig algebraisch zu entwickeln, was der Differentialcalculus durch seine eignen Methoden viel einfacher liefert.	Лагранж 1) доказывает *алгебраически* то, что Тейлор предполагает, что, пока x остается неопределенной, $f(x+h)$ всегда представима бесконечным рядом, равным $f(x) + ph + qh^2 +$ и т. д.; он подводит под дифференциальное исчисление *алгебраическую основу*; но ее надлежит использовать лишь как отправной пункт, так как совершенно нецелесообразно кропотливо развивать алгебраически то, что собственными методами дифференциального исчисления достигается гораздо проще.

2) Er beweist von vornherein, dass die allgemeine Entwicklungsreihe von $f(x+h)$, wo x indeterminate, alle die partikulären Fälle ausschliesst, die als *failures* of Taylor's theorem erscheinen.

3) Er hat durch den Begriff der *abgeleiteten Funktionen der Variablen* dem Differentialcalcul wesentlich neuen Halt gegeben, der viele nutzlosen Schwierigkeiten entfernt.

Wird Taylor's Theorem geschrieben:

2) Он с самого начала доказывает, что общий ряд разложения для $f(x+h)$, где x — неопределенная, исключает все частные случаи, в которых теорема Тейлора *неприменима*.

3) Введя понятие *производных функций переменной*, он дал дифференциальному исчислению, по существу, новую опору, устранив тем самым множество бесполезных трудностей.

Если в теореме Тейлора написано:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{h}{1}+\frac{d^2f(x)}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\frac{d^3f(x)}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

so ist in dieser Formel noch keineswegs der Begriff der abgeleiteten Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$ etc. enthalten, sondern nur gesagt, dass *sukzessive Differentialoperationen mit derselben ursprünglichen* $f(x)$ stattgefunden haben; die sukzessiven differential coefficients sind darin *nicht als sukzessiv abgeleitete Funktionen von* x ausgedrückt.

Wo andrerseits Lagrange schreibt:

то в этой формуле еще никак не содержится понятие производных функций $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., а только говорится, что *последовательные дифференциальные операции* имели место *с одной и той же первоначальной* $f(x)$; последовательные дифференциальные коэффициенты выражены в ней *не как последовательно произведенные функции от* x.

С другой стороны, когда Лагранж пишет:

$$f(x+h)=f(x)+ph+q\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+r\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

so ist hier unterstellt, dass in

то здесь предполагается, что в

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+\ldots$$

die Koeffizienten p, q etc. bereits auf ihre Werte $=f'(x)$, $f''(x)$ etc. reduziert worden sind [159].

коэффициенты p, q и т. д. уже были сведены к их значениям, равным $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д. [159].

Пояснив еще в нескольких словах, что, поскольку рассуждения Лагранжа носили общий характер (относились к любой функции $f(x)$), их можно применить и к производным функциям, на чем и были основаны некоторые выкладки в пункте B), Маркс переходит к завершающему раздел I пункту F) этой рукописи. В нем он конспектирует §§ 8, 9 (стр. 4—6) из учебника «A Treatise on the

Differential and Integral Calculus, and the Calculus of Variations» by Thomas G. Hall. (В нашем распоряжении имеется 5 издание 1852 г.)

Конспект начинается фразой:

F) Der Lagrangesche Beweis, dass, bei indeterminate x, $f(x+h)$ darstellbar in $f(x)+ph+qh^2+$ etc., wird in folgender Manier in einigen Manuals of Differentialcalculus an den Anfang derselben gestellt.

F) Лагранжево доказательство, что при неопределенной x $f(x+h)$ представима в виде $f(x)+ph+qh^2+$ и т. д, помещается в некоторых руководствах по дифференциальному исчислению в самом начале и трактуется следующим образом.

Далее следует доказательство методом не только неопределенных коэффициентов, но и неопределенных показателей степени, что если $f(x+h)=u+Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+Ch^{\gamma}+$ и т. д., где $\alpha<\beta<\gamma<\ldots$, то $u=f(x), \alpha=1, \beta=2, \gamma=3, \ldots$,

$$A=f'(x), \quad B=\frac{f''(x)}{1\cdot 2}, \quad C=\frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Член Ah называется *дифференциалом*, а коэффициент A — *дифференциальным коэффициентом*; для них вводятся обычные обозначения. Это доказательство приводится Марксом по книге Холла, стр. 4—7. Именно она и имеется здесь в виду.

Раздел II рукописи, написанной, как уже было отмечено, еще в ту пору, когда Марксу представлялось достаточно обоснованным Лагранжево «доказательство» того, что в *общем случае* должно быть справедливо разложение

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+\ldots,$$

где $p, q, r, \ldots$ — функции от x, полностью соответствует его (приведенному выше) заголовку (см. стр. 412). Маркс высказывает здесь предположение, что *эвристически* Тейлор мог прийти к своей теореме путем обобщения теоремы о биноме Ньютона; он приводит ряд соображений в пользу верности этого предположения и отмечает в то же время, что законность такого обобщения еще не могла быть доказана Тейлором. Во всех имевшихся у Маркса руководствах теорема Тейлора доказывалась в основном одинаково. По-видимому, Маркс считал в связи с этим это доказательство принадлежавшим самому Тейлору. (Подробнее об этих доказательствах см. Приложение, стр. 596.) Те части этого раздела рукописи, которые не являются конспектами, приводятся ниже полностью. Непосредственно вслед за заголовком раздела II Маркс пишет на лл. 14—17:

A) *Boucharlat* bemerkt in zweiter Note (Appendix) zu seinem «*Traités du calcul différentiel et du calcul intégral*»: «Mit Ausnahme der differentials der circular functions, die sich leicht aus den Formeln der Trigonometrie ergeben, wurden alle andern *monomial* differentials, wie z. B. die von x^m, a^x, $\log x$ etc.,

A) Во втором примечании (Приложении) к своему «*Traités du calcul différentiel et du calcul intégral*» *Бушарла* говорит: «За исключением дифференциалов круговых функций, легко выводимых из формул тригонометрии, все остальные *одночленные* дифференциалы, как, например, дифференциалы от x^m, a^x, $\log x$ и allein aus dem *binomischen Theorem* entwickelt; das Theorem von *Mac Laurin* wurde angewandt in der *Bestimmung der Konstanten A in den exponential formulae*, hätte aber entbehrt werden können etc. ⟦auf letzteres später zurückzukommen⟧. Folgt daher, dass *die Prinzipien der Differentiation alle* allein *auf dem binomischen Theorem beruhen*» *.

Andererseits stellte *Taylor* sein *Theorem* (welches neben dem von *Mac Laurin* — letzteres selbst wieder als besonderer Kasus von Taylor's Theorem darstellbar — das wichtigste für die Operationen des Differentialcalculus ist) zu einer Zeit auf, wo einerseits nicht nur das binomiale Theorem bekannt war, sondern auch die Entwicklung der *Funktionen von x*, die es liefert auf dem Weg des Differentialcalculus selbst, wie überhaupt die Entwicklung der so g. Elemente des Differentialcalculus.

Die $f(x+h)$ stellt sich auf der zweiten Seite, der entwickelten Reihe, stets dar, entsprechend dem binomischen Lehrsatz [durch die Glieder], mit den Faktoren $h^0\,(=1)$, h, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$, $\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ etc. (*mit ascending integral und positive powers of h*, abgesehn von negativen, fraktionellen und logarithmischen Exponenten,

т. д., были получены только с помощью *биномиальной теоремы*. Теорема *Маклорена* применялась *при отыскании постоянной A в формулах для показательной функции*, но можно было бы обойтись и без нее ⟦к этому вернуться в дальнейшем⟧. Отсюда следует, что *все принципы дифференцирования основываются* только *на биномиальной теореме*» *.

Но, с другой стороны, *Тейлор* установил свою *теорему* (которая наряду с теоремой *Маклорена* — последняя в свою очередь сама представима как частный случай теоремы Тейлора — является важнейшей для операций дифференциального исчисления) в такое время, когда уже была известна не только биномиальная теорема, но и доставляемое ею разложение *функции от x* средствами самого дифференциального исчисления, равно как и вообще уже были развернуты так называемые элементы дифференциального исчисления.

Функция $f(x+h)$ на второй стороне, стороне развернутого ряда, представляется всегда, в соответствии с биномиальной теоремой, [членами] с множителями $h^0\,(=1)$, h, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$, $\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д. (*с возрастающими целыми и положительными степенями h*, отвлекаясь от отрицательных, дробных и логарифмических показателей, о которых

* Имеющееся у нас 5-е издание учебника Бушарла озаглавлено: «Eléments de calcul differentiel et de calcul integral» (Paris, 1838); в нем этого Приложения нет.— *Ред.*

die wir, nach dem mit Bezug auf die Lagrangesche Methode entwickelten, hier, einstweilen ausser Acht lassen können); die *unbestimmten Koeffizienten* von h in seinem successive powers, i. e. die verschiedenen *sukzessive abgeleiteten Funktionen von* x oder differential coefficients haben natürlich verschiedene Form, je nach der ursprünglichen $f(x)$, die zu entwickeln ist, ob $f(x)$, z. B. $= x^m$ oder a^x oder $\log x$ oder $\sin x$ oder mehrnamig [160] etc. Bei dem Taylorschen Theorem liegt aber offenbar die einfachste Anwendung des binomischen Satzes, also $f(x) = x^m$ zu Grund.

Entwickeln wir daher $f(x+h) = (x+h)^m$ nach dem binomischen Lehrsatz.

So z.B.

мы после сказанного о методе Лагранжа, здесь можем уже не говорить); *неопределенные коэффициенты* при h в его последовательных степенях, т. е. различные *последовательные производные функции от* x, или дифференциальные коэффициенты, имеют, естественно, различную форму в зависимости от того, какую первоначальную функцию $f(x)$ надлежит разлагать,— от того, является ли, например, этой функцией x^m, или a^x, или $\log x$, или $\sin x$, или более сложная [160] и т. д. Но в основе теоремы Тейлора лежит, очевидно, простейшее применение биномиальной теоремы, т. е. $f(x) = x^m$.

Разложим поэтому $f(x+h) = (x+h)^m$ по биномиальной теореме.

Тогда, например,

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}h^2 + \ldots =$$

$$= x^m + mx^{m-1}h + \frac{1}{2}m(m-1)x^{m-2}h^2 + \ldots$$

Im dritten Glied $\frac{1}{2}m(m-1) \times x^{m-2}h^2$ $\left(\text{dasselbe, was Lagrange bei seiner obigen Entwicklung schreibt } \frac{1}{2}f''(x)h^2\right)$ ist die von x direkt abgeleitete Funktion von mx^{m-1}, $m(m-1)x^{m-2}$; um also nicht die halbe Funktion, sondern die Funktion ganz zu haben, hier und im folgenden zu schreiben: $m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2}$, i. e. den numerischen Divisor unter h^2, h^3 etc. zu setzen.

В третьем члене, т. е. в $\frac{1}{2}m(m-1)x^{m-2}h^2$ (то же самое, что Лагранж в приведенном выше разложении записывает как $\frac{1}{2}f''(x)h^2$), имеется непосредственно выведенная по x производная от mx^{m-1}, именно $m(m-1)x^{m-2}$; для того чтобы иметь не половину этой функции, а всю функцию в целом, следует писать здесь и далее $m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2}$, т. е. помещать числовой делитель под h^2, h^3 и т. д.

Wir erhalten dann

Мы получим тогда

	nach dem binomischen Theorem по биномиальной теореме	x als variable betrachtet рассматривая x как переменную	
x^m	$= x^m$	$= f(x)$	
$mx^{m-1}h$	$= mx^{m-1}h$	$= f'(x)h$	$= \frac{dy}{dx}h$
$m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{2}$	$= \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2$	$= f''(x)\frac{h^2}{2}$	$= \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}$
$m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{2\cdot 3}$	$= \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}h^3$	$= f'''(x)\frac{h^3}{2\cdot 3}$	$= \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2\cdot 3}$
$m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4}$	$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{m-4}h^4$	$= f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4}$	$= \frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4}$
etc. и т. д.	etc. и т. д.	etc. и т. д.	etc. и т. д.

Nun dem Taylor ferner schon überliefert, wie auf dem Weg des Differentialcalculus zu finden $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, also $\frac{d(x^m)}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ und ebenso weiter

Так вот Тейлору было уже известно, как путем дифференциального исчисления найти $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, следовательно, $\frac{d(x^m)}{dx}$ или $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ и также далее

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

etc.; in anderen Worten, dass die durch den binomischer Lehrsatz gelieferten abgeleiteten Funktionen von x identisch sind mit den als successive differential coefficients erscheinenden; er wusste ebenso, dass bei Findung dieser Funktionen auf dem Weg des Differentialcalculus sowohl h verschwindet, als seine numerischen Koeffizienten $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ etc. Wir erhalten die Funktionen mx^{m-1}, $m(m-1)x^{m-2}$ etc. als Resultate der durch $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. ausgedrückten Differentialoperationen.

и т. д.; другими словами, было известно, что выведенные с помощью биномиальной теоремы производные функции x тождественны с теми, которые выступают как последовательные дифференциальные коэффициенты; он знал также, что при отыскании этих функций путем дифференциального исчисления исчезает как h, так и его числовые коэффициенты $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, ...; мы получаем функции mx^{m-1}, $m(m-1)x^{m-2}$ и т. д. как результат дифференциальных операций, выраженных посредством $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д.

Andererseits zeigt der binomische Lehrsatz dass

С другой стороны, биномиальная теорема показывает, что

$$f(x+h)\ {}^{\text{hier}}_{\text{здесь}}\ (x+h)^m = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

Man muss also das zweite Glied mit $\frac{h}{1}$, das dritte mit $\frac{h^2}{1 \cdot 2}$ etc. multiplizieren, um die wirkliche Entwicklung von $f(x+h)$ zu erhalten; d. h. das h, h^2 etc. mit ihren numerischen Faktoren — die im Prozess der Differentiation verschwunden sind, *wiederherstellen.*

Следовательно, чтобы получить истинное разложение $f(x+h)$, надо второй член умножить на $\frac{h}{1}$, третий на $\frac{h^2}{1 \cdot 2}$ и т. д., иными словами, нужно *восстановить* исчезнувшие в процессе дифференцирования h, h^2 и т. д. с их числовыми множителями.

Z. B. wenn $x^m = x^3$, so

Так, например, при $x^m = x^3$

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Durch den binomischen Lehrsatz erhält man also abgeleitete Funktionen von x und dieselben Funktionen durch Differentiation:

С помощью биномиальной теоремы получаются, таким образом, производные функции от x, и они оказываются теми же функциями, которые получаются посредством дифференцирования:

$$3x^2 = 3x^2, \quad 3 \cdot 2x = 6x, \quad 6x^0 = 6.$$

Stellt man die in der Differentiation verschwundenen h, $\frac{h^2}{1 \cdot 2}$, $\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc. wieder her, so erhalten:

Если восстановить исчезнувшие при дифференцировании h, $\frac{h^2}{1 \cdot 2}$, $\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ и т. д., то получим:

$$mx^{m-1} \; \ldots \; \underset{\text{вместо}}{\text{für}} \; 3x^2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; 3x^2h$$

$$m(m-1)\,x^{m-2} \; \ldots \; \underset{\text{вместо}}{\text{für}} \; 6x \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; 6x\frac{h^2}{2} = 3xh^2,$$

für $6x^0$ ⟦nämlich $m(m-1) \times (m-2)\,x^{m-3}$ [oder] dritte [abgeleitete] Funktion von $(x+h)^3 =$

вместо $6x^0$ ⟦т. е. вместо $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$ [или] третьей [производной] функции от $(x+h)^3$, равной

$$3(3-1)(3-2)\,x^{3-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1x^0 = 6 \ldots\ldots \; \frac{6h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = h^3⟧.$$

Also

Следовательно,

$$f(x+h) \; \underset{\text{или}}{\text{oder}} \; (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

d. h. das aus dem binomischen Lehrsatz bekannte Resultat.

иными словами, получился результат, уже известный из теоремы о биноме.

Ferner war, wie oben erwähnt, Taylor bekannt, dass die durch den binomischen Lehrsatz

Далее, как упомянуто выше, Тейлору было известно, что ряд, полученный с помощью биномиerwiesene Reihe, von der Originalfunktion bis zu ihren abgeleiteten Funktionen, im Differential[calcul] sich so darstellen: x^m als $f(x)$ oder y, die Originalfunktion; die zweite Funktion im binomischen Lehrsatz mx^{m-1} als Realwert des ersten differential coefficient $\frac{dy}{dx}$, die dritte Funktion als Realwert des zweiten differential coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ usw. Setze ich nun statt

альной теоремы, начиная с первоначальной функции до ее производных, в дифференциальном [исчислении] представляется так: x^m как $f(x)$ или y, первоначальная функция; вторая функция в биномиальной теореме mx^{m-1} как реальное значение первого дифференциального коэффициента $\frac{dy}{dx}$; третья функция как реальное значение второго дифференциального коэффициента $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. Если я заменю теперь эти функции в

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \\ + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

die Differentialausdrücke dieser Funktionen an ihre Stelle und statt $(x+h)^m$ die unbestimmte $f(x+h)$, so erhalte ich

их дифференциальными выражениями, а на место функции $(x+h)^m$ подставлю неопределенную $f(x+h)$, то получу

$$f(x+h) = f(x) \begin{pmatrix}\text{oder} & \\ \text{или} & y\end{pmatrix} + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

welches das Theorem Taylor's ist.

что и есть теорема Тейлора.

⟦Noch zu bemerken, dass wenn wir als vierte abgeleitete Funktion von $(x+h)^m$ erhalten

⟦Надлежит еще заметить, что если в качестве 4-й производной от $(x+h)^m$ мы получаем

$$m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

dessen Differentialausdruck $= \frac{d^4y}{dx^4}$ — dies wird für $(x+h)^3$

чье дифференциальное выражение есть $\frac{d^4y}{dx^4}$, то для $(x+h)^3$.

$$= 3(3-1)(3-2)(3-3)x^{3-4} = 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot x^{-1} = 0,$$

was multipliziert mit $\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ wieder $=0$, so dass auch $\frac{d^4y}{dx^4}$

будучи помножено на $\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, это снова $=0$, так что и $\frac{d^4y}{dx^4}$

in diesem Fall $=0$. Also liefert auch hier wieder der *binomische Lehrsatz*, dass sobald x, die Variable im Differentialcalculus, aus der abgeleiteten Funktion eliminiert, letztere also *konstant* geworden, auch das ihr entsprechende $\frac{dy}{dx}=0$ wird; i. e. es mit der Ableitung neuer Funktion von x und daher auch neuer Differentiation zu Ende ist.⟧

Es ist nun zwar hier die Taylor's Formel für $f(x+h)$ nur gewonnen worden aus einer elementarsten Anwendung des binomischen Theorems, nämlich, indem in x^m statt x gesetzt wird $x+h$, also $(x+h)^m$ entwickelt wird. Aber dies ändert absolut nichts an der *Allgemeinheit des Resultats*, weil 1) die Faktoren h mit ihren aufsteigenden, ganzen und positiven Exponenten ⟦beginnend, wenn man will, mit $h^0=1$ für das erste Glied der Entwicklungsreihe $f(x)$⟧ dieselben bleiben, welches immer $f(x)$ sei; 2) die Koeffizienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc., welche in der Tat nur Symbole für zu verrichtende Differentialoperationen sind, liefern natürlich verschiedene Resultate, je nach dem besonderen Charakter der Originalfunktion $f(x)$, anderes z. B. wenn $f(x)=a^x$ als wenn es ax^n etc. In allen Fällen liefern sie nur $f'(x)$, $f''(x)$ etc. die abgeleitete Funktionen von $f(x)$, welche

в этом случае $=0$. Таким образом, и здесь *биномиальная теорема* вновь показывает, что коль скоро x — переменная в дифференциальном исчислении — из производной исключена и, следовательно, последняя стала *постоянной*, то и соответствующее ей $\frac{dy}{dx}$ становится $=0$; т. е. выведению новых функций от x, а значит и новому дифференцированию пришел конец.⟧

Правда, здесь формула Тейлора для $f(x+h)$ получена только из самого элементарного применения биномиальной теоремы, именно подстановкой $x+h$ вместо x в x^m и последующим разложением $(x+h)^m$. Но это абсолютно ничего не меняет в *общности результата*, потому что 1) множители h в их возрастающих целых и положительных степенях ⟦начиная, если угодно, с $h^0=1$ для первого члена ряда разложения $f(x)$⟧ останутся те же, какова бы ни была $f(x)$; 2) коэффициенты $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д., которые в действительности суть лишь символы подлежащих выполнению дифференциальных операций, дают, разумеется, различные результаты в зависимости от специфического характера первоначальной функции $f(x)$. Одно дело, например, если $f(x)=a^x$, другое — если ax^n и т. д. Во всех случаях они дают только $f'(x)$, $f''(x)$ и дальнейшие ausserdem alle auch auf algebraischen Weg, und wieder wesentlich auf Grundlage des binomischen Theorems entwickelbar wären, wie Lagrange durch die Tat bewiesen hat.

$f(x+h)$ ist zwar unbestimmt, nicht von bestimmten Grade, und entwickelt sich daher auch in einer endlosen Reihe. Aber $f(x+h)$ $[=(x+h)^m]$ bleibt ditto ganz unbestimmt und nur in endloser Reihe entwickelbar, solange m nicht einen bestimmten Wert erhält; in die Differentialsprache übersetzt, liefert es deshalb auch eine endlose Reihe, wie es der Kasus erfordert.

Eine wirkliche Verallgemeinerung des Beweises ist erst durch Lagrange geliefert; diese Verallgemeinerung erscheint dagegen, wie wir gleich weiter sehen werden, bei Taylor nur als *hypothetische* Annahme und sind ausserdem bei ihm nicht einmal von vornherein die Bedingungen untersucht welche diese *Hypothese* einschliesst.

⟦Der Augenschein zeigt, dass wenn

производные функции от $f(x)$, которые все, кроме того, могут быть получены и на алгебраическом пути, и опять-таки, по существу, на основе биномиальной теоремы, как это показал на деле Лагранж.

Правда, $f(x+h)$ неопределенна, не имеет определенной степени и разлагается поэтому также в бесконечный ряд. Но $f(x+h)$ $[=(x+h)^m]$ остается совершенно неопределенной и разложимой только в бесконечный ряд, пока m не приобретет определенного значения; переведенная на язык дифференциального исчисления, она дает поэтому тоже бесконечный ряд, как требует данный случай.

Подлинное обобщение этого доказательства дано только Лагранжем. У Тейлора же, как это мы сейчас увидим, это обобщение носит характер только *гипотетического* допущения, и, кроме того, он, разумеется, не исследовал тех условий, которые включает в себя эта *гипотеза*.

⟦Достаточно беглого взгляда, чтобы увидеть, что если

$$f(x+h)=f(x)+ph+q\frac{h^2}{2}+r\frac{h^3}{2\cdot 3}+\ldots=$$
$$=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2}+f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=$$
$$=f(x)+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

[so] die Differenz $f(x+h)-f(x)$ oder y_1-y gleich der

[то] разность $f(x+h)-f(x)$ или y_1-y равна бесконечной endlosen Summe der abgeleiteten Funktionen von x oder differential coefficients. Alle Glieder, die auf der zweiten Seite — des in endloser Reihe entwickelten allgemeinen Ausdrucks $f(x+h)$ der ersten Seite — durch $+$ verbunden sind mit $f(x)$, bilden zusammen die *Differenz* zwischen $f(x)$ und $f(x+h)$. Was die *endlose Reihe* der abgeleiteten Funktionen oder differential coefficients betrifft, so ist die unendliche Mehrzahl der Funktionen in der Tat nur in solcher Reihe darstellbar.

Die *exponentiellen*, *logarithmischen und trigonometrischen Funktionen* erlauben ihrer Natur nach nicht sie darzustellen in *algebraischen Ausdrücken mit endlicher Anzahl von Gliedern*[161]. Von den eigentlich *algebraischen* Funktionen sind wieder grosse Masse nur darstellbar in endlosen Reihen wie [z. B.] $\frac{a}{a-x}$ usw. Nur bei bestimmten algebraischen Funktionen wie z. B. $(x+h)^4$ ist bestimmte Anzahl [von 0 verschiedener] abgeleiteter Funktionen gegeben; die Funktion wird zuletzt *konstant* (x eliminiert), also [die Abgeleitete] $= 0$, wie dies auch bei identischen Gleichungen sich von selbst versteht. Im übrigen bedeutet $f'(x) = 0$ (wo f' für alle weiteren f'', f''' [usw] steht) nicht, dass $x = 0$ geworden, d. h. eliminiert ist, sondern dass $f'(x) = 0$ *eine Gleichung* [von

сумме производных функций от x или дифференциальных коэффициентов. Все члены, которые на второй стороне — стороне развернутого в бесконечный ряд общего выражения $f(x+h)$, стоящего на первой стороне,— связаны знаком $+$ с $f(x)$, образуют, вместе взятые, *разность* между $f(x)$ и $f(x+h)$. Что касается *бесконечного ряда* производных функций или дифференциальных коэффициентов, то подавляющее (бесконечное) большинство этих функций на самом деле представимо лишь бесконечным рядом.

Показательные, *логарифмические и тригонометрические функции* по самой своей природе не могут быть представлены *алгебраическими выражениями с конечным числом членов*[161]. Из собственно *алгебраических* функций опять-таки подавляющее большинство представимо только бесконечными рядами, как, например, $\frac{a}{a-x}$ [и т. д.]. Только у определенных алгебраических функций, как, например, $(x+h)^4$, имеется определенное число [отличных от 0] производных; функция становится в конечном счете *постоянной* (x исчезает), и, значит, [производная]$= 0$, как это само собой разумеется и для идентичных [с тождественно равными сторонами] уравнений. В остальном $f'(x) = 0$ (где под f' имеются в виду и все последующие f'', f''' и т. д.) не означает, что x стала einer bestimmter Form, z. B.] *von einem bestimmten Grade ist*: denn jede Gleichung, wenn ihre beiden Seiten auf eine Seite geschrieben werden $=0$, und gerade aus $f'(x) = 0$ wird dann x entwickelt, indem der Differentialausdruck auf eine Seite, der reale Wert desselben auf die andere kommt *, weswegen [die Gleichung] $f'(x) = 0$ so bedeutende Rolle spielt in der Lehre von Maxima und Minima.]]

равной 0, т. е. исключилась, а означает лишь, что $f'(x) = 0$ *есть уравнение* [определенного вида, например] какой-нибудь *определенной степени*: потому что всякое уравнение, если обе его стороны записать на одной стороне, дает нуль на другой, и как раз $f'(x) = 0$ служит для отыскания x посредством того, что дифференциальное выражение становится по одну сторону, его реальное значение — по другую *; в этой связи [уравнение] $f'(x) = 0$ играет столь значительную роль в теории максимумов и минимумов.]]

B) Statt

B) Вместо

$$f(x+h) = f(x) \begin{pmatrix} \text{oder} & \\ \text{или} & y \end{pmatrix} + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

wird das Theorem auch geschrieben:

теорема пишется еще так:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Vollständig nach Lagrange:

Полностью по Лагранжу:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm ph + \frac{qh^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{rh^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

oder

или

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)\, h + f''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2} \pm f'''(x) \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

C) Statt sein Theorem als in Differentialsprache übersetztes binomisches Theorem darzustellen, gibt Taylor ihm den Schein

C) Вместо того, чтобы представить свою теорему как переведенную на язык дифференциального исчисления биноми-

* Здесь, очевидно, имеется в виду сказать, что в уравнении $f'(x) = 0$ символическое выражение $f'(x) \left(\text{или } \frac{dy}{dx}\right)$ предполагается уже замененным его реальным значением.— *Ред.*

allgemeinen Beweises durch eine Hypothese.

альную теорему, Тейлор придает ей посредством некоторой гипотезы видимость полученной с помощью *общего* доказательства.

1) *Unterstelle* dass die Funktion $f(x+h)$ entwickelt sei in ascending, positive und ganzen Potenzen von h, dann

1) *Предположим*, что функция $f(x+h)$ разложена по возрастающим положительным и целым степеням h. Тогда

$$y_1 \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x+h)=y\left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} f(x)\right)+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots, \quad \text{(I)}$$

wo A, B, C etc. unbestimmte Koeffizienten, unbekannte Funktionen von x sind.

In der Tat, hatte man durch den binomischen Lehrsatz in Verbindung mit den schon bekannten Resultaten des Differentialcalculs die Gleichung (S. 15, letzte Zeile)*

где A, B, C и т. д.— неопределенные коэффициенты — неизвестные функции от x.

На самом деле, после того как с помощью биномиальной теоремы и уже известных результатов дифференциального исчисления найдено уравнение (стр. 15, последняя строка) *

$$f(x+h) = f(x)+\frac{dy}{dx}h+\ldots,$$

gefunden, so lag es nahe, wieder statt $\frac{dy}{dx}$ etc., d. h. statt der Differentialkoeffizienten oder abgeleiteten Funktionen, unbestimmten Koeffizienten — und die Methode der unbestimmten Koeffizienten häufig in der Algebra, z. B. bei Entwicklung der Logarithmen — wie A, B etc. zu setzen, um nun *umgekehrt aus ihnen* mit Hilfe des Differentialcalculs selbst die Differentialkoeffizienten zu entwickeln und ihnen so eine *allgemeine* Ableitung zu geben. Was Taylor *unabhängig* vom Differentialcalculus beibringt, ist eben, dass $f(x+h)$ entwickelbar in

было нетрудно вместо $\frac{dy}{dx}$ и т. д., т. е. вместо дифференциальных коэффициентов или производных, снова подставить неопределенные коэффициенты, — а метод неопределенных коэффициентов часто применяется в алгебре например при разложении логарифмов,— такие, как A, B и т. д., чтобы затем *обратно* вывести *из них*, с помощью самого дифференциального исчисления, дифференциальные коэффициенты и тем самым придать им *общий* вывод. То, что́ Тейлор привносит здесь *независимо* от дифференциального исчисления, состоит как раз в

* См. настоящее издание стр. 424.— *Ред.*

der Reihe $= f(x) + Ah +$ etc.; dies jedoch bei ihm nur Hypothese; Beweis erst geliefert von Lagrange.

Dürfte man annehmen, dass er privatim sein Theorem in der Art gefunden, wie wir es sub II A) dargestellt, so war die nachherige Substitution von A, B, C etc. für die abgeleiteten Funktionen von x oder ihre Differentialausdrücke — als Ausgangspunkt für später zu verrichtende Differentialoperationen selbst — sicher keine Hexerei.

2) Um aus der Gleichung

том, что $f(x+h)$ разложима в ряд $f(x) + Ah +$ и т. д.; но это у него только гипотеза; доказательство впервые было дано Лагранжем.

Если можно допустить, что конфиденциально он нашел свою теорему так, как мы это изложили sub II A), то последующая подстановка A, B, C и т. д. вместо производных по x или их дифференциальных выражений — как исходный пункт для подлежащих дальнейшему выполнению собственных дифференциальных операций — была заведомо не таким уж хитрым делом.

2) Чтобы из уравнения

$$y_1 = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \dots$$

die Koeffizienten A, B, C etc. zu bestimmen, existiert offenbar nur ein Weg: aus dieser einen Gleichung zwei zu machen, deren erste Seite, der unentwickelte Ausdruck der Funktionen, *derselbe*, und deren zweite Seite, die in *Reihe von Gliedern entwickelte Funktion* — verschiedener Form. Da die ersten beiden Seiten identisch, müssen es die zweiten sein, also die mit h in derselben Potenz behafteten Glieder (y ist behaftet mit $h^0 = 1$) gleichsetzbar sein.

Differenzieren wir unter der Voraussetzung, dass x konstant und h variabel, so verschwindet y, da es Funktion von x ist, die kein h enthält, und wir erhalten A ohne h (mit $h^0 = 1$), die anderen Glieder aber geben

определить коэффициенты A, B, C и т. д., существует, очевидно, только один путь: сделать из этого одного уравнения два, первые стороны которых, т. е. неразвернутое выражение функций, *одни и те же*, а вторые стороны, т. е. *разложенные в ряд членов функции*, имеют различные формы. Так как обе первые стороны тождественны, то тождественными должны быть и вторые, следовательно, члены с множителями h в одинаковых степенях (y имеет множителем $h^0 = 1$) могут быть приравнены.

Если дифференцировать в предположении, что x — постоянная, а h — переменная, то y исчезает, так как y есть функция от x, не содержащая h, и получаем A без h (с $h^0 = 1$), остальные члены дают числовые коэфnumerische Koeffizienten, weil h^1, h^2 etc. mit numerischen Exponenten versehen. Differenzieren wir unter der Voraussetzung, dass h konstant und x variable, so erhalten wir $\frac{dy_1}{dx}$ in ascending line wie $\frac{dy}{dx}+\frac{dA}{dx}h+$ $+$ etc. Der Pfiff der Methode zeigt sich *in der Differentiation der ersten Glieder*

фициенты, потому что h^1, h^2 и т. д. снабжены числовыми показателями степени. Если же дифференцировать, исходя из другой предпосылки,— что h — постоянная, а x — переменная,— то мы получим $\frac{dy_1}{dx}$ по возрастающей линии как $\frac{dy}{dx}+\frac{dA}{dx}h+$ $+$ и т. д. Гвоздь этого метода выявляется *при дифференцировании первых членов*

$$\frac{dy_1}{dh}=A+\ldots, \qquad \frac{dy_1}{dx}=\frac{dy}{dx}+\ldots$$

Ist so einmal

Коль скоро

$$A=\frac{dy}{dx}$$

gefunden, so ergeben sich dann die anderen Koeffizienten als $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. von selbst.

уже найдено, остальные коэффициенты, как-то: $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д., получаются уже сами.

Вслед за этим Маркс конспектирует (лл. 18—19) относящиеся к теореме Тейлора §§ 55—57 (стр. 34—37) учебника Бушарла (о содержании этих параграфов см. Приложение, стр. 599).

Пункт D) (лл. рукописи 19—20), которым завершается раздел II рукописи, озаглавлен Марксом:

«**D) Manier des Beweises (auf Basis des Differentialcalculs) von Taylor's Theorem, so dass die exponents der Potenzen von h unbestimmt angenommen und zugleich mit den unbestimmten Koeffizienten A, B etc. oder P, Q etc. von h etc. entwickelt werden**» (**«D. Способ доказательства теоремы Тейлора (на основе дифференциального исчисления), при котором неопределенными полагаются и показатели степеней h, которые отыскиваются одновременно с неопределенными коэффициентами A, B и т. д. или P, Q и т. д. при h и т. д.»**).

Он представляет собой конспект § 74 (стр. 83—84) учебника Хайнда.

Раздел III рукописи посвящен (это видно уже из его заголовка, приведенного выше) теореме Маклорена: предположению о том, что и эта теорема *эвристически* могла быть получена из теоремы о биноме Ньютона. Здесь Маркс, однако, начинает с того, что подчеркивает не только сходство, но и отличие теоремы Маклорена от теоремы Тейлора. Последнее, прежде всего, состоит в том, что, в то время как в теореме Тейлора разложение функции в ряд происходит в окрестности хотя и фиксированной, но тем не менее *неопределенной* (и в этом смысле *переменной*) точки x, в теореме Маклорена оно имеет место в окрестности одной определенной точки: 0, так что все коэффициенты разложения являются *постоянными* (значениями функции и ее производных в точке 0). Маркс пишет:

A) *Durch Taylor's Theorem* Formel geliefert, um jede Funktion in x (unter den früher entwickelten Bedingungen), worin x um ein positives oder negatives Inkrement h anwächst, also zu $f(x \pm h)$ wird, darzustellen in einer Reihe, wovon $f(x)$ das erste Glied und die folgenden Glieder $\frac{dy}{dx}$ etc., mit Faktoren von h in aufsteigender Potenz behaftet, *differential coefficients* sind oder vielmehr die Symbole, die anzeigen, wie auf dem Weg der Differentiation die sukzessiven Funktionen von x abgeleitet werden, deren Summe nebst ihren Faktoren h, h^2 etc. ist gleich der Differenz von $f(x+h)$ und $f(x)$ ist.

Mac Laurin's Theorem dagegen soll dazu dienen die *Funktion* in x *selbst* in Reihe zu entwickeln, wie z. B.

A) *Теорема Тейлора* дала формулу, позволяющую представить всякую функцию в x (при указанных выше условиях), когда x возрастает на положительное или отрицательное приращение h, т. е. когда $f(x)$ обращается в $f(x \pm h)$, в виде ряда, первым членом которого является $f(x)$, а следующие члены $\frac{dy}{dx}$ и т. д., имеющие множителями h в возрастающих степенях, суть *дифференциальные коэффициенты* или, точнее, символы, указывающие, как путем дифференцирования выводятся последовательные функции от x, сумма которых, взятых вместе с их множителями h, h^2 и т. д., = разности между $f(x+h)$ и $f(x)$.

Теорема же *Маклорена* должна давать разложение в ряд *самой функции* в x, как, например,

$$y = \frac{1}{a+x}, \ y = (a^2 + bx)^{1/2}, \ y = (a+x)^m, \ldots$$

(und zwar *mit ascending powers* of x). *Funktion* $x = (a+x)^{-1}$ oder $= (a^2+bx)^{1/2}$, oder $= (a+x)^m$ etc. Da die $f(x)$ in aufsteigenden Potenzen von x entwickelt werden soll, so spielt x hier dieselbe Rolle wie h, das Inkrement, in Taylor's Theorem. Sie ist das zweite Glied des Binoms, erscheint also nur als Faktor mit ascending powers, wie dort h^0, h^1, h^2, so hier x^0, x^1, x^2 etc. Was z. B. in

(притом *по возрастающим степеням* x). *Функция* от x равна $(a+x)^{-1}$, или $(a^2+bx)^{1/2}$, или $(a+x)^m$ и т. д. Так как $f(x)$ должна быть разложена по возрастающим степеням x, то x играет здесь ту же роль, что и h, приращение, в теореме Тейлора. Она — второй член бинома и выступает поэтому только как множитель в возрастающих степенях, как там было h^0, h^1, h^2, так и здесь x^0, x^1, x^2 и т. д. Что, Taylor's Theorem wirklich entwickelt wird, ist das erste Glied: die abgeleiteten Funktionen der *Variablen* x, während h, das Inkrement, das zweite Glied, nur als Faktor in aufsteigenden Potenzen, von $h^0 = 1$ an, figuriert. So umgekehrt die *Variable* x in Mac Laurin's Theorem; was also durch es geleistet werden soll, ist die Entwicklung des ersten Glieds, welches hier eine *konstante Grösse* ist, und das Kunststück besteht eben darin, durch den Differentialcalcul die algebraische Ableitung der konstanten Koeffizienten, die in $f(x)$ enthalten sind...

например, действительно развертывается в теореме Тейлора,— это первый член: производные функции *переменной* x, между тем как h, приращение, второй член, фигурирует только как множитель в возрастающих степенях, начиная с $h^0=1$. Так, наоборот, фигурирует *переменная* x в теореме Маклорена; с помощью этой теоремы нужно, следовательно, получить развертывание первого члена, которым здесь является *постоянная величина*, и фокус состоит именно в том, чтобы с помощью дифференциального исчисления получить алгебраический вывод постоянных коэффициентов, содержащихся в $f(x)$ . . .

С целью получить затем разложение по степеням x для $(c+x)^n$ (соответствующее получаемому по теореме Маклорена) с помощью теоремы о биноме Ньютона Маркс пишет сначала разложение по этой последней теореме:

$$(c+x)^n = c^n + nc^{n-1}x + \text{ и т. д.,} \tag{1}$$

обращая внимание на то, что для $(x+c)^n$ оно выглядело бы иначе:

$$(x+c)^n = x^n + nx^{n-1}c + \text{ и т. д.} \tag{2}$$

Затем он останавливается на выяснении того, в каком смысле в первом из этих разложений с *постоянными* коэффициентами c^n, nc^{n-1}, . . . последние могут рассматриваться как *функции*. Он пишет (л. 21):

Wir wollen aber die Ableitungen Funktionen von c in dem Sinn nennen wie wenn ich a^4 der Reihe nach durch a dividiere: $\frac{a^4}{a} = a^3$, $\frac{a^3}{a} = a^2$ etc., [so] a^3, a^2, a abgeleitete Funktionen von a^4 genannt werden können.

Но мы будем называть эти производные функциями от c в том смысле, в каком, если я a^4 делю по порядку на a: $\frac{a^4}{a} = a^3$, $\frac{a^3}{a} = a^2$ и т. д., [то] a^3, a^2, a могут называться функциями, произведенными от a^4.

После этого Маркс рассматривает функцию $(c+x)^n$ как функцию от x и дифференцирует ее по x, получая таким образом последовательно:

$$(c+x)^n = y = f(x),\ n(c+x)^{n-1} = \frac{dy}{dx} = f'(x),\ n(n-1)(c+x)^{n-2} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \text{ и т. д.}$$

Полагая затем во всех этих равенствах $x = 0$, он обнаруживает, что в результате получаются (в качестве $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ...) коэффициенты c^n, nc^{n-1}, $n(n-1)c^{n-2}$ и т. д. разложения (1), и заключает (л. 21—22):

Und hiermit haben wir das ganze Geheimnis, wie Mac Laurin's Satz, ausgehend vom binomischen Theorem.

Man bemerke übrigens, dass *im Binom* $(c+x)^n$ *und den davon abgeleiteten*, sobald dazu geschritten wird $x=0$ zu setzen, also die Konstante c^n mit ihren Ableitungen zu finden, es ganz egal ist, ob ich $(c+x)^n$ oder $(x+c)^n$ schreibe, denn es ist gleichgültig, ob $0+c$, und $c+0$ ist immer $=c$. Dagegen ist dies ursprünglich nicht gleichgültig dafür, dass x als Faktor von c^n etc. in *aufstiegenden Potenzen figuriert*, ganz wie h in Taylor's Theorem.

А тем самым всю такую тайну, как теорема Маклорена, мы получаем, исходя из теоремы о биноме.

Заметим, впрочем, что *в биноме* $(c+x)^n$ *и производных от него*, коль скоро мы подошли к тому, чтобы положить $x=0$ и таким образом получить постоянную c^n с ее производными, для нас совершенно безразлично, писать ли $(c+x)^n$ или $(x+c)^n$, так как в обоих случаях $0+c$ и $c+0$ всегда $=c$. Но первоначально это не безразлично в отношении того, что x *фигурирует* как множитель в *возрастающих степенях при* c^n и т. д., совсем как h в теореме Тейлора.

Вслед за этим Маркс переходит к доказательству теоремы Маклорена, которое он конспектирует по учебнику Бушарла. Соответствующий пункт в рукописи, озаглавленный Марксом: **«D) Mac Laurin's Darstellung»** (**«D. Изложение Маклорена»**), начинается (л. 22 рукописи) словами:

1) Was hier unabhängig vom Differentialcalculus ist *die Gleichung, von der ausgegangen wird*

1) Независимым от дифференциального исчисления здесь является *уравнение, из которого исходят*,

$$f(x) \mathop{}^{\text{oder}}_{\text{или}}\ y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + Ux^n. \qquad (1)$$

(In fact alles aus der Algebra entnommen, sogar *die sukzessive Differentiation* etc. Sieh Heft «Algebra I», p. 73d, sq.) *

(Фактически все заимствовано из алгебры, даже *последовательное дифференцирование* и т. д. См. тетрадь «Алгебра I», стр. 73d и сл.) *

Далее Маркс конспектирует полностью § 31 (стр. 20—21) книги Бушарла (о содержании которого см. Приложение, стр. 597), заканчивая свой конспект (последняя строка л. 22) словами:

Es ist absolut nichts hier, was nicht aus der Algebra

Здесь нет абсолютно ничего такого, что не было бы прямо

* Здесь стр. 357 и сл.

direkt genommen, die Grundgleichung, die Ableitung der Funktionen.	заимствовано из алгебры,— исходное уравнение, вывод функций.

В пункте **«2) Beispiele der Anwendung des Mac Laurinschen Theorems»** (**«2. Примеры применения теоремы Маклорена»**) Маркс конспектирует, по Бушарла, сначала § 34, стр. 23, содержащий применение теоремы Маклорена к выводу теоремы о биноме Ньютона, завершая этот конспект (л. 23 рукописи) словами:

So der binomische Lehrsatz	Так биномиальная теорема

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}x^2 + \ldots$$

seinerseits abgeleitet aus dem von ihm abgeleiteten Theorem von Mac Laurin.	в свою очередь выводится из выведенной из нее теоремы Маклорена.

Далее следуют конспекты §§ 32, 33 (стр. 21, 22) учебника Бушарла, содержащих применение теоремы Маклорена к разложению в ряд по степеням x функций $y=\frac{1}{a+x}$ и $y=\sqrt{a^2+bx}$.

Следующий пункт **«3) Failures of Mac Laurin's Theorem»** (**«3. Случаи неприменимости теоремы Маклорена»**) конспектируется уже Марксом по учебнику Хайнда, из которого Маркс выписывает по порядку в пунктах 1), 2) общие соображения о случаях, в которых теорема Маклорена может оказаться неприменимой (стр. 75, § 70); α) пример функции $u=\sqrt{2x-1}$, где, по мнению Хайнда, «невозможность осуществить разложение в форме, требуемой теоремой [Маклорена], указывается символом $\sqrt{-1}$, который проявляется в каждом члене [ряда]» (Хайнд, стр. 74); β) соображения, относящиеся к невозможности разложения $\log x$ в ряд по степеням x (§ 70, стр. 74—75); γ) пример функции $u=ax^{5/2}+bx^{1/2}+cx^{-1}+\ldots$, неприменимость теоремы Маклорена к которой обусловливается наличием дробных и отрицательных степеней x в ее выражении (§ 70, стр. 75); δ) пример функции $u=\sqrt{x-x^2}$, к которой непосредственно теорема Маклорена неприменима, но для которой разложение в ряд

$$u=x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{3/2}-\frac{1}{8}x^{5/2}-\frac{1}{16}x^{7/2}-\ \ldots$$

получается с помощью представления u в виде $\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}$ и разложения $v=\sqrt{1-x}$ по теореме Маклорена (§ 71, стр. 75—76, у Маркса в рукописи стр. 25—26).

В связи с примером $u=\sqrt{2x-1}$, рассматриваемым sub α), Маркс пишет там же (л. 24 рукописи):

Da alle Glieder in der Entwicklungsreihe behaftet mit $\sqrt{-1}$, nichts zu «wolle»; die Funktion kann in *«möglichen Ausdrücken»* [162] entwickelt werden, aber nicht in *ascending powers of x*, also nicht durch Anwendung von	Так как все члены в ряде разложения имеют множитель $\sqrt{-1}$, то с этим ничего не поделаешь; эту функцию можно разложить по *«возможным выражениям»* [162], но не по *возрастающим степеням x*, т. е. не с

Mac Laurin's Formel. Das «Unglück» kommt davon her, dass wir $\sqrt{-1}$ nicht loswerden und dies hinwiederum von der Beschaffenheit des «konstanten» Elements in $f(x)$; wenn wir nämlich in $f(x)=\sqrt{2x-1}$ $x=0$ setzen, so erhalten wir statt dessen $\sqrt{-1}$, und die zweite Seite muss also auch auf $\sqrt{-1}$ reduzierbar sein, wie sie es ist in $\sqrt{-1}\left(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\text{etc.}\right)$; setzen wir hier $x=0$, so bleibt $\sqrt{-1}\cdot(1)=\sqrt{-1}$.

помощью применения формулы Маклорена. «Несчастье» в том, что мы не можем освободиться от $\sqrt{-1}$, а это опять-таки от природы «постоянного» элемента в $f(x)$; а именно, если в $f(x)=\sqrt{2x-1}$ мы положим $x=0$, то получим $\sqrt{-1}$, а следовательно, и вторая сторона должна быть также сводима к $\sqrt{-1}$, как это и имеет место в $\sqrt{-1}\left(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\text{и т. д.}\right)$; если мы положим здесь $x=0$, то останется $\sqrt{-1}\cdot(1)=\sqrt{-1}$.

В пункте «E) **Entwicklung der Funktion $f(x)$ mit abnehmenden statt mit aufsteigenden Potenzen der unabhängigen Variablen x**» («**E. Разложение функции $f(x)$ по убывающим, а не по возрастающим степеням независимой переменной x**») Маркс конспектирует (л. 27 рукописи) § 72, стр. 81—82, учебника Хайнда.

Разложение функции по убывающим степеням x здесь получается из разложения по возрастающим степеням z функции, получаемой из данной подстановкою $x=\frac{1}{z}$.

В пункте «**F) Mac Laurin's Theorem als besonderer Kasus of Taylors Theorem**» («**F. Теорема Маклорена как частный случай теоремы Тейлора**») (лл. 27—28 рукописи) Маркс приводит, следуя курсам Бушарла (§ 62, стр. 39—40) и Хемминга (§ 150, стр. 107—108), вывод теоремы Маклорена из теоремы Тейлора.

Раздел IV рукописи (лл. 28—48) озаглавлен Марксом: «**IV. (Weiteres über Taylor's Theorem)**» («**IV. (Еще о теореме Тейлора)**»).

Этот раздел начинается с пункта «**A) Wie Taylor's Theorem aus binomischen Lehrsatz abgeleitet, so kann nun umgekehrt der binomische Lehrsatz aus Taylors Theorem abgeleitet werden**» («**A. Как теорема Тейлора выводится из биномиальной теоремы, так и, наоборот, биномиальная теорема может быть выведена из теоремы Тейлора**»). Здесь конспектируется пример 1 из § 74 книги Хайнда, о котором автор пишет: «Этот пример есть общее доказательство биномиальной теоремы, хотя не является необычным допускать биномиальную теорему, которая может быть установлена исходя из алгебраических принципов, для доказательства теоремы Тейлора» (стр. 85). Маркс конспектирует сначала sub a) следующий за этими словами вывод теоремы Тейлора из теоремы о биноме Ньютона, а затем под заголовком: «**b) Umgekehrt, Ableitung des binomischen Lehrsatz aus Taylor's Theorem**» («**b. Наоборот, вывод биномиальной теоремы из теоремы Тейлора**») — первую часть примера.

Следующий за этим пункт озаглавлен Марксом: «**B) Taylor's und Mac Laurin's Theoreme**» («**B. Теоремы Тейлора и Маклорена**») (л. 29). Здесь Маркс сначала приводит исходные уравнения:

1) $f(x_1)$ или $y_1 = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 +$ и т. д.;
2) $f(x)$ или $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ и т. д.

для теорем Тейлора и Маклорена соответственно, а затем замечает:

Was aber die *Grundgleichung*, selbst betrifft, so ist sie aus der gewöhnlichen Algebra genommen.

Что же касается самого *исходного уравнения*, то оно заимствовано из обыкновенной алгебры.

Маркс снова возвращается к конспектированию главы о кратных корнях из «Элементов алгебры» Лакруа и «Трактата по алгебре» Маклорена, обращая особое внимание на то, что алгорифмы отыскания кратных корней основаны фактически на последовательном дифференцировании. Так, на стр. 34 рукописи Маркс пишет:

Was uns allein hier interessiert, ist die Reduktion der allgemeinen Gleichung um einen Grad, was successive by carried on, is the algebraic method of effecting *successive differentiation*.

Единственное, что нас здесь интересует, — это понижение степени общего уравнения на единицу; последовательно выполняемое, оно представляет собой алгебраический метод осуществления *последовательного дифференцирования*.

Непосредственно перед этим в рукописи написано (л. 33—34):

Die algebraische Entwicklung habe ich selbst genommen aus dem Erfinder des Mac Laurinschen Theorems— i. e. aus Colin Mac Laurin selbst, 6-th edition («A Treatise of Algebra in three parts etc.», London, 1796). Die Herausgeberin *Anne Mac Laurin*, Witwe des Mac Laurin. Dies Werk postum. Es heisst in Vorrede (preface) u. a.: «*Sir Isaac Newtons Rules*, in his «*Arithmetica Universalis*», concerning the resolution of the higher equations, and the affections of their roots, being, *for the most part*, *delivered without any demonstration*, Mr. Maclaurin had designed, that this Treatise should serve as a Commentary on that work. For we find all those

Алгебраическое разложение я заимствовал у самого изобретателя теоремы Маклорена, т. е. у Колина Маклорена,— 6-е издание («Трактат по алгебре в 3-х частях и т. д.», Лондон, 1796). Издатель — *Анна Маклорен*, вдова Маклорена. Это произведение посмертное. В предисловии говорится, между прочим: «*Так как правила сэра Исаака Ньютона* в его «*Универсальной арифметике*», относящиеся к решению уравнений высших степеней и отысканию их корней, *в большинстве случаев приведены без какого бы то ни было доказательства*, то Маклорен задумал этот трактат в качестве комментария к сочинению Ньютона. Ибо все трудные difficult passages in Sir Isaac's book, which have so long perplexed the students of algebra, clearly explained and demonstrated».

Mit Bezug auf die Art, wie Gleichungen niedern Grades von höhergradigen abgeleitet werden, weiss man nicht, ob Newton sie durch Differentialcalcul entdeckt oder ob er nicht umgekehrt — als Erfinder des binomial theorem — seine ganze Differentiationstheorie durch den binomischen Lehrsatz entdeckt hat.

Mac Laurin (*Colin*) geboren 1698 in Schottland, gestorben 1746. Er publizierte 1720 (also 22 Jahre alt) [sein] traité über die Kurven, der selbst den Newton überraschte.

Taylor (J. Brook), geb. 1685 zu Edmonton (Middlesex), gestorben 1731 (46 Jahre alt). Er publizierte «*Methodus incrementorum directa et inversa*», London 1715—17, wovon sein Theorem so to say the résumé. Hat ausserdem verschiedenes Mathematische und auch einiges Metaphysische publiziert.

места в книге сэра Исаака, которые так долго затрудняли изучающих алгебру, здесь ясно объясняются и доказываются».

Что касается способа выведения уравнений низшей степени из уравнений более высокой степени, то неизвестно, открыл ли его Ньютон с помощью дифференциального исчисления или, наоборот, будучи автором теоремы о биноме, он с ее помощью открыл всю свою теорию дифференцирования.

Маклорен (*Колин*) родился в 1698 г. в Шотландии, умер в 1746 г. В 1720 г. (когда ему было 22 года) он опубликовал [свой] трактат о кривых, который поразил даже Ньютона.

Тейлор (Дж. Брук) родился в 1685 г. в Эдмонтоне (Мидлисекс), умер в 1731 г. (46 лет от роду). Он опубликовал [свой] «*Метод прямых и обратных приращений*», Лондон, 1715—1717, который, так сказать, резюмируется его теоремой. Кроме того, опубликовал еще ряд математических и несколько философских работ.

Непосредственным источником для всей этой части раздела IV рукописи (лл. 29—37) служат §§ 204, 206, 207 (стр. 280—281, 283—285) из «Элементов алгебры» Лакруа, законспектированные уже ранее Марксом в тетради «Алгебра I». Выписав уравнения, последовательно получаемые Лакруа из общего уравнения

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots + Tx + U = 0$$

подстановкою $x = y + a$, где a — кратный корень общего уравнения, Маркс заключает (л. 37):

Also exactly the result that would have been obtained by successive differentiation.

То есть в точности тот результат, который был бы получен последовательным дифференцированием.

Последние 11 страниц тетради (лл. 38—48 рукописи 4000) содержат несколько замечаний, относящихся к биномиальной теореме и ряду Тейлора, а также конспекты параграфов о полном дифференциале из книг Бушарла, Холла и Сори.

Эта часть рукописи уже не содержит каких-либо подзаголовков: Маркс только нумерует пункты.

Пункт 1 начинается словами (л. 38):

1) Die grösste Entdeckung der *eigentlichen Algebra* ist das *binomische Theorem* (unter dem zugleich *Polynome* subsumierbar). Nur durch dieses wurde nicht nur, wie vorher, Lösung von *Gleichungen* bestimmten Grades, sondern eine *allgemeine Theorie der Gleichungen* möglich.

1) Величайшим открытием *собственной алгебры* является *биномиальная теорема* (которую можно распространить и на *полиномы*). Только с помощью этой теоремы стало возможным не только решение *уравнений* определенной степени, как это было ранее, но и *общая теория уравнений*.

Вслед за тем излагается по Маклорену способ получения уравнений высших степеней посредством перемножения уравнений первой степени.

Пункт 2 (л. 39 и 40) начинается словами:

2) Das binomische Theorem diente aber nicht nur allein zur Entwicklung der allgemeinen Theorie der Gleichungen (auch deren mit mehreren Unbekannten), wie zur Entwicklung der Kombinationslehre der trigonometrischen und exponentiellen etc. Funktionen; es ist die allgemeine *Basis* des *Differentialcalculus*, und die Frage wirft sich daher mit Recht auf, ob Newton, der Entdecker des binomial theorem wie des Differentialcalculus, oder wenigstens seine Schüler, *Taylor* und *Mac Laurin* (der erstere kommt chronologisch vor dem zweiten), welche die technische Anwendung des Differentialcalculs ungemein erleichtert haben durch ihre generalisierenden Formeln, selbst *im stillen* nicht ihre Resultate direkt aus Anwendung des binomischen Theorems geschöpft haben.

2) Теорема о биноме не только позволила развить общую теорию уравнений (в том числе и с несколькими неизвестными); она послужила также развитию комбинаторики, теории тригонометрических, показательных и т. д. функций; она есть общая *основа дифференциального исчисления*, и естественно поэтому встает вопрос о том, не черпал ли Ньютон, открывший как биномиальную теорему, так и дифференциальное исчисление, или хотя бы ученики его *Тейлор и Маклорен* (первый хронологически предшествует второму), обобщающие формулы которых необычайно облегчили техническое применение дифференциального исчисления,— не черпали ли они даже *втихомолку* свои результаты прямо из применения биномиальной теоремы.

На лл. 41—46 Маркс конспектирует сначала §§ 63, 64 (стр. 40—43) учебника Бушарла, посвященные дифференцированию уравнения с двумя переменными, а затем §§ 26—28 (стр. 15—18) того же учебника, относящиеся к дифференцированию сложной функции. Вслед за этим Маркс возвращается к дифференцированию уравнения с несколькими переменными и конспектирует §§ 66—68 (стр. 44—45) того же учебника, посвященные понятиям полного дифференциала и частных дифференциалов. Заключительный § 70 (стр. 46—47) этого раздела книги Бушарла, относящийся к дифференцированию обратной функции, вместе с приложением 5 (стр. 500) на ту же тему, также конспектируется здесь Марксом.

Далее под заголовком: **«Andere Methode for general equation of different variables»** (**«Другой метод для общего уравнения от нескольких переменных»**) (л. 46) Маркс конспектирует § 96 (стр. 87) из главы VIII «Функции от двух или большего числа переменных» учебника Холла.

В заключение он приводит по книге Сори (том III, стр. 3) формулы для первого, второго и третьего дифференциалов от произведения двух функций.

Рукопись заканчивается (лл. 47, 48) тремя замечаниями Маркса под общим заголовком: **«Mit Bezug auf Taylor's Theorem und Lagranges Entwicklung (p. 1, 29)»** (**«Относительно теоремы Тейлора и Лагранжева разложения (стр. 1, 29)»**). Первое из них посвящено применению теоремы Тейлора к приближенному вычислению приращения функции по Хайнду (§§ 81, 82, стр. 96—97).

Во втором замечании идет речь о преимуществах Лагранжевых обозначений для производных функций.

В третьем замечании дается общая характеристика случаев неприменимости («исключений из») теоремы Тейлора. Маркс пишет (л. 48):

III. Failure (so-called) of Taylor's series findet statt, wenn sie nicht das development der Funktion $(x+h)$ geben kann; und dies der Fall, wenn der *partikulare Wert* der Funktion *nicht ausdrückbar ist in ganzen positiven Potenzen von h, kombiniert mit finite coefficients.*

III. Так называемая неприменимость ряда Тейлора имеет место, когда он не может дать разложения функции в $(x+h)$; а это бывает, когда *частное значение* указанной функции *невыразимо в целых положительных степенях h в сочетании с конечными коэффициентами.*

ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА, ТЕОРЕМА МАКЛОРЕНА И ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Ед. хр. 4001

Рукопись под общим заглавием **«Taylor's Theorem, Mac Laurin's Theorem und Lagranges Theorie der abgeleiteten Funktionen»** (**«Теорема Тейлора, теорема Маклорена и лагранжева теория производных функций»**) на 27 листах. (В нумерации Маркса стр. 1—8, 5—6, 4—5, б/н, 7—20.) Рукопись представляет собой, по-видимому, черновой набросок задуманного Марксом общего изложения всего материала на эту тему, законспектированного им ранее. Хронологически относится, очевидно, ко второй половине 70-х годов, т. е. к тому периоду, когда Маркс придерживался еще «алгебраической» точки зрения Лагранжа на природу дифференциального исчисления.

Рукопись состоит из трех разделов, из которых первые два озаглавлены лишь римскими цифрами I и II, а третий озаглавлен: **«III. Lagranges Funktionentheorie»** (**«III. Лагранжева теория функций»**).

Раздел I (лл. 1—2) полностью публикуется в настоящей книге (стр. 192—203).

Раздел II начинается (л. 2) так:

II

1) Nehmen wir den einfachsten Ausdruck des Binoms, wie z.B. $(x+c)^m$. Da $x+c=c+x$, so wird der Grössenwert des Binoms in keiner Weise verändert, ob wir schreiben $(x+c)^m$ oder $(c+x)^m$. Nichtsdestoweniger sind die Entwicklungsreihen, worin diese beiden identischen Ausdrücke sich darstellen, verschiedenformig. Im ersten Fall werden die Ableitungen von x entwickelt, während das zweite Glied c nur als Faktor in

1) Возьмем простейшее выражение бинома, например $(x+c)^m$. Так как $x+c=c+x$, то числовое значение бинома абсолютно не изменится, напишем ли мы $(x+c)^m$ или $(c+x)^m$. Тем не менее ряды, которыми представляются оба этих идентичных выражения, имеют различную форму. В первом случае развертываются производные от x, тогда как второй член c фигурирует лишь как множитель в возрастающих степенях,

aufsteigenden Potenzen figuriert, wie h in der Taylorschen Serie. In $(c+x)^m$ dagegen, wo c erstes Glied und x zweites, werden die Ableitungen von c entwickelt, während x, das zweite Glied, nur als Faktor in aufsteigenden Potenzen figuriert, wie die variable x in Mac Laurin's Theorem.

подобно h в ряде Тейлора. Напротив, в $(c+x)^m$, где c — первый член, а x — второй, развертываются производные от c, тогда как второй член x фигурирует лишь как множитель в возрастающих степенях, подобно переменной x в теореме Маклорена.

В связи с тем, что здесь появляются выражения в x, c, соответственно в x, h (при переходе от x к $x+h$), Маркс делает в дальнейшем (на л. 5) к этому месту следующую вставку *:

Ich bemerke hier: Bei der Darstellung (ad p. 3) der binomischen Entwicklung nennen wir $f(x)$, $f'(x)$ etc. die abgeleiteten Formen von x^m und dies erlaubbar, da der Begriff der Funktion zuerst entstand aus undeterminierten Gleichungen, wo mehr Unbekannte als Gleichungen vorkommen, also Wert von x z. B. sich ändert, wenn der von y. Später wurde der Begriff Funktion übertragen auf die *Unbekannten* der Gleichung ohne Rücksicht auf die bekannten Grössen, soweit sie selbständig erscheinen. Endlich in dem Calcul mit Variablen wird z.B. von $f(a)$ gesprochen, wenn x den partikularen Wert a erhält. Wir brauchen uns also nicht zu genieren, in dem Binom $(x+h)^m$ von Funktionen von x zu sprechen, wir in dem Binom $(c+x)^m$ von $f(c)$ und abgeleiteten $f'(c)$, $f''(c)$ etc.

Замечу здесь: При изложении (см. стр. 3) биномиального разложения мы называем $f(x)$, $f'(x)$ и т. д. производными функциями от x^m, и это допустимо, так как понятие функции возникло сначала из неопределенных уравнений, где неизвестных больше, чем уравнений, и значение x, например, меняется поэтому, когда меняется значение y. В дальнейшем понятие функции было перенесено на *неизвестные* в уравнении без учета известных величин, поскольку последние выступают как постоянные. Наконец, в исчислении с переменными говорят, например, об $f(a)$, когда x принимает частное значение a. Мы можем поэтому, не смущаясь, говорить в отношении бинома $(x+h)^m$ о функциях от x, как и в отношении бинома $(c+x)^m$ об $f(c)$ и производных $f'(c)$, $f''(c)$ и т. д.

* На стр. 2 Марксом сделана отметка: +++p.5***. На стр. 5 с отметкою «ad***» помещена приводимая здесь вставка, которая и начинается словами: «Bei der Darstellung (ad. p. 3)».

С целью показать, как, исходя из биномиальной теоремы, можно эвристически перейти к такому ее обобщению, которое должно привести к теореме Тейлора, Маркс начинает здесь (лл. 3—4) с того, что переводит формулу для бинома Ньютона на язык дифференциального исчисления в точности так, как это было сделано им в рукописи 4000 (см. стр. 419).

Интуитивный переход — догадку, ведущую от степенной функции к функциям более общего вида (напомним, что у Маркса, как и у Лагранжа, речь шла еще, по существу, только об аналитических функциях действительной переменной, т. е. о функциях, разложимых в степенной ряд), Маркс (л. 26) представляет так:

Soll ferner die Gleichung *allgemein* sein, so müssen wir statt $f(x) = x^m$ setzen $f(x) = y$, wo die Variable x keines Grades, aber jeden Grads fähig, also auch $(x+h)^m$ die allgemeine Form $f(x+h)$ erhält.

Если теперь уравнение должно стать *общим*, то вместо $f(x)=x^m$ мы должны положить $f(x) = y$, где переменная x не имеет какой-либо определенной степени, но способна на любую степень, так что и функция $(x+h)^m$ принимает общую форму $f(x+h)$.

Was aber auf der ersten Seite der Gleichung geschehen, muss sich auf der zweiten wiederholen, d.h. wir müssen die letzten Glieder, die durch den Grad m des binoms $(x+h)^m$ gegeben sind, wegstreichen und ersetzen durch + etc. etc., um die endlose Setzung neuer abgeleiteten Funktion der allgemeinen $f(x+h)$ anzuzeigen.

Но что произошло на первой стороне уравнения, должно повторяться и на другой, т. е. мы должны вычеркнуть последние члены, данные степенью m бинома $(x+h)^m$, и заменить их на + и т. д. и т. д., чтобы указать на возможность бесконечного появления новых производных функций от общей $f(x+h)$.

Wir erhalten dann

Мы получим тогда

$$y_1 \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x+h) = f(x) \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ yh^0 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \ldots,$$

und dies ist die Grundgleichung, wovon Taylor in der Darstellung seines Theorems ausgeht.

а это и есть основное уравнение, из которого исходит Тейлор при изложении своей теоремы.

Also:

Таким образом,

$$y_1 \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x+h) = f(x) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Wir haben also für jede gegebene Funktion x, die x variiert, d. h. zu $x+h$ wird, nur die

Нам, следовательно, нужно только для каждой данной функции x, в которой x изменяется, Differentialkoeffizienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. zu entwickeln, d. h. die sukzessiv abgeleiteten Funktionen von x und nachher die im Differentiationsprozess verschwundnen Faktoren h, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$ etc. wieder herzustellen, um die Entwicklung von $f(x+h)$ zu erhalten.

Das Taylorische Theorem erscheint so als einfache Übersetzung des binomischen Lehrsatzes aus der algebraischen Sprache in die Differentialsprache.

т. е. обращается в $x+h$, вычислить дифференциальные коэффициенты $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., т. е. последовательные производные функции от x, и затем восстановить снова исчезнувшие в процессе дифференцирования множители h, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$ и т. д., чтобы получить разложение для $f(x+h)$.

Теорема Тейлора выступает, таким образом, как простой перевод биномиальной теоремы с алгебраического языка на язык дифференциального исчисления.

Доказательству теоремы Тейлора в общем случае Маркс предпосылает теперь еще раз обсуждение вопроса о том, не открыл ли уже сам Ньютон, исходя из своей биномиальной теоремы, и теорему Тейлора. На этот вопрос и на аналогичный вопрос в отношении Тейлора Маркс отвечает (л. 5) так:

Die Frage wirft sich nun auf: Hatte Newton, der Entdecker des binomischen Theorems, durch geheime Anwendung des letzteren das Taylorsche Theorem zu seinem Privatgebrauch bereits gefunden, das so ausserordentlich die Anwendung des Differentialcalculs vereinfacht? Dies unbedingt zu verneinen. Er hätte mit solchem Fang geprunkt. Hätte er den einfachen Zusammenhang gesehen, so liess er nichts zu entdecken übrig für Taylor, Mac Laurin und selbst für Lagrange und brachte in der Tat den Differentialcalculus zum Abschluss. Denn obgleich Taylor's (resp. Mac Laurin's) Theorem zunächst nur Funktionen mit *einer einzigen unabhängigen Variablen* behandelt, bleibt es

Возникает вопрос: не нашел ли уже Ньютон, открывший теорему о биноме, при помощи тайного применения последней для своего личного употребления теорему Тейлора, столь необыкновенно упростившую приложение дифференциального исчисления? На этот вопрос, безусловно, следует ответить отрицательно. Он бы тогда блеснул такой находкой. Если бы он видел эту простую связь, то ни Тейлору, ни Маклорену, ни даже Лагранжу уже нечего было бы открывать, и дифференциальное исчисление, по существу, было бы завершено им. Ибо, хотя теорема Тейлора (соответственно Маклорена) относится непосредственно лишь к функциям с *одной-единствен-*

Grundlage auch für die Entwicklung von Funktionen mit mehreren Variablen, seien diese nun in impliziter oder expliziter Form gegeben.

Bedenklicher schon scheint dieselbe Frage bei Taylor, der einerseits die Newtonsche Algebra («Arithmetica Universalis»), andererseits den Newtonschen und Leibnizschen Differentialcalculus gegeben vorfand.

Man könnte zwar sagen, dass es sich in der Algebra immer nur um Binome von gegebnem Grad handelt, wie in $(x+h)^m$ um solche vom m-ten Grad, während $f(x+h)$ jeden bestimmten Grad nur als Moment einschliesst, aber als Grenze absolut ausschliesset. Dieser Einwurf würde sich jedoch umgekehrt gegen Taylor wenden, denn der binomische Lehrsatz ist von viel weiterem Umfang als sein Theorem. Jener lässt h^{-1}, $h^{1/m}$, $h^{m/n}$ etc., kurz h mit allen möglichen indices als Faktoren der Funktionen von x zu, während Taylor's Theorem nur anwendbar (also not fails), wenn die Funktionen von x, zwar unbestimmt und jeder Variationen fähig, aber jede Funktion von x wie $f(x)$, $f'(x)$ etc., ein endlicher Ausdruck (was ihre Variabilität in keiner Weise beeinträchtigt), andrerseits h in aufsteigenden, positiven, ganzen Potenzen als deren sukzessiver Faktor entwickelbar. Taylor hat aber keinen Beweis versucht, dass die unbe-

ной независимой переменной, она остается основою и для разложения функций со многими переменными, заданных как в явной, так и в неявной форме.

Тот же вопрос более сомнителен в отношении к Тейлору, в распоряжении которого была, с одной стороны, ньютонова алгебра («Arithmetica Universalis»), с другой — дифференциальное исчисление Ньютона и Лейбница.

Правда, можно было бы сказать, что в алгебре речь идет всегда лишь о биномах определенной, как в $(x+h)^m$, степени m, тогда как $f(x+h)$ включает каждую определенную степень лишь как момент, но абсолютно исключает как границу. Это возражение, однако, можно было бы обратить против Тейлора, ибо теорема о биноме имеет гораздо бóльшую общность, чем его теорема. Первая допускает h^{-1}, $h^{1/m}$, $h^{m/n}$,..., короче, h в любой возможной степени множителями при функциях от x, тогда как теорема Тейлора лишь применима (т. е. не теряет силу), если функции от x хотя неопределенны и способны к любому изменению, но каждая из $f(x)$, $f'(x)$ и т. д. есть конечное выражение (что нисколько не нарушает ее изменяемости) и, кроме того, в разложении множителями при них стоят возрастающие положительные и целые степени h. Но Тейлор даже не пытался доказать, что неопределенная, stimmte, jeder Entwicklung fähige $f(x+h)$ nach dem Entwicklungsgesetz des Binoms darstellbar. Er erregt grade dadurch den Verdacht, dass, wie z. B. bei $(x+h)^m$, die Reihe unendlich gemacht werden kann wegen der Unbestimmtheit von m, er sich dabei begnügt habe, für $(x+h)^m$ zu schreiben $f(x)+$ $+f'(x)h+\ldots+$ etc., dabei vergessend, dass trotz der Endlosigkeit von $(x+h)^m$, solang wir m unbestimmt lassen, wir ihren Abschluss kennen, da das vorletzte Glied nur x enthalten und das letzte nur $x^0h^m=h^m$ sein kann [163].

Doch scheint mir absolut sicher, dass Taylor nicht die geringste Ahnung von dem einfachen Zusammenhang seines Theorems mit dem binomischen Lehrsatz hatte. Er bewegte sich ganz auf dem Boden des Differentialcalculs selbst, ohne auf dessen Ursprung zurückzugehen.

допускающая любое разложение $f(x+h)$ может быть представлена по образцу биномиального разложения. Он, собственно, возбуждает подозрение потому, что, например, в $(x+h)^m$, где, в силу неопределенности m, ряд может быть сделан бесконечным, ограничился тем, что написал для $(x+h)^m$ ряд $f(x)+f'(x)h+\ldots$, забывая при этом, что, несмотря на неограниченность $(x+h)^m$, поскольку мы оставляем m неопределенным, нам известен его конец, ибо предпоследний член может содержать лишь x, а последним может быть лишь $x^0h^m=h^m$ [163].

Все же мне представляется совершенно бесспорным, что Тейлор не имел ни малейшего представления о простой связи между его теоремой и теоремой о биноме. Он действовал целиком на почве самого дифференциального исчисления, не возвращаясь к его истокам.

Заметив, что Тейлор исходил из уравнения

(A) $f(x+h)$ или $y_1=y$ (или $f(x)$) $+Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4+$ и т. д.,

и остановившись еще раз на способах возникновения такого рода многочленов в алгебре (в общей теории уравнений), Маркс (л. 6) заключает:

Taylor ändert nichts an der durch die Binomstheorie gelieferten Ausgangsgleichung als dass er $f(x+h)$ gradlos, daher jeder Entwicklung fähig macht, daher auch die zweite Seite durch $+$ etc. zu keinem Abschluss kommen lässt. Er benutzt

Тейлор ничего не меняет в полученном с помощью теории бинома исходном уравнении, помимо того, что делает $f(x+h)$ лишенным степени, а значит, способным на любое разложение, в силу чего и вторую сторону с помощью $+$ и т. д. делает

also den binomischen Lehrsatz (oder was dasselbe, die dadurch gelieferte Form der allgemeinen Gleichung mit einer Unbekannten) nur sofern, als er ihm seine Ausgangsgleichung liefert, ohne Beweis, dass es hier anwendbar. Das Polynom selbst aber behandelt er sofort vom Standpunkt des Differentialcalculs.	недоступной завершению. Он использует биномиальную теорему (или, что то же, даваемую ею общую форму уравнения с одной неизвестной), лишь поскольку она дает ему его исходное уравнение, без доказательства, что последняя здесь применима. Сам же полином он рассматривает с точки зрения дифференциального исчисления.

Вслед за этим (лл. 6—7) Маркс приводит по учебнику Бушарла (§ 57, стр. 36—37) доказательство теоремы Тейлора, которое, по-видимому, приписывает самому Тейлору.

Далее (л. 8) он приводит аналогичное, но более общее доказательство теоремы Тейлора и по учебнику Хайнда (§ 74, стр. 83—84), где исходное разложение

$$y_1 = y + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + Sh^{\delta} + \text{ и т. д.}$$

содержит не только неопределенные коэффициенты $P, Q, R, S, \ldots$, но и неопределенные показатели степени $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ Этим заканчивается пункт 1).

Пункт 2) раздела II (л. 9) озаглавлен Марксом: **«2) Mac Laurin's Theorem»** (**«2. Теорема Маклорена»**). С целью получить наведение на теорему Маклорена, исходя из обобщения теоремы о биноме Ньютона, Маркс начинает здесь с того, что применяет последнюю к разложению $(c+x)^n$ и заменяет затем коэффициенты при степенях x в этом разложении неопределенными коэффициентами. Получив таким образом уравнение

$$f(x) = (c+x)^n = Ax^0 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + ncx^{n-1} + x^n,$$

он заключает далее (л. 26, вставка «Zu Mac Laurin, p. 5»):

Wir können, wie vorher bei Entwicklung des Taylorschen [Ausgangsgleichung], diese Gleichung verallgemeinern in	Мы можем, как ранее при получении тейлорова [исходного уравнения], обобщить это уравнение в

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots + \begin{array}{l}\text{etc. etc. (ohne Abschluss).}\\ \text{и т. д. (без окончания).}\end{array}$$

und dies die Mac Laurinsche Ausgangsgleichung.	и это — исходное уравнение Маклорена.

Маркс специально останавливается в этой связи на том, что такой порядок расположения членов ряда является обратным по отношению к их расположению в многочлене, представляющем левую сторону общего уравнения n-й степени, но что (л. 27) таким образом:

...wird man das nur für Gleichungen von bestimmtem Grad	...мы освобождаемся от подходящего только для уравнений

passende x^n los, welches vor der Umdrehung der Reihe ihr erstes Glied bildete, jetzt also ihr letztes bilden musste. Es wird ersetzt durch + etc. etc. Damit erhält das Polynom die allgemeine Form, die nötig, wenn wir für $(c+x)^n$ oder irgendeine andere bestimmte Funktion von x den allgemeinen Ausdruck $f(x)$ setzen, wo $f(x)$ von keinem Grad ist, aber alle Grade in seiner Entwicklung einschliesst. Wir erhalten dann allgemein:

определенной степени члена x^n, который до обращения ряда образовывал первый его член, а теперь, следовательно, должен был быть его последним. Он заменяется через + и т. д. Этим самым полином приобретает общую форму, которая необходима, когда мы заменяем $(c+x)^n$ или любую другую определенную функцию от x общим выражением $f(x)$, где $f(x)$ не имеет никакой степени, но в своем разложении включает все степени. Тогда мы получим вообще

$$f(x) \,\frac{\text{oder}}{\text{или}}\, y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

die Grundgleichung, wovon Mac Laurin bei Entwicklung seines Theorems ausgeht.

— основное уравнение, из которого исходит в изложении своей теоремы Маклорен.

На этом вставка заканчивается. Дальнейший текст (л. 9) гласит:

Der Ausgangspunkt der Mac Laurinschen Darstellung

Исходный пункт маклоренова изложения

$$y \,\frac{\text{oder}}{\text{или}}\, f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

ist also bereits der algebraische Ausdruck (mit unbestimmten Koeffizienten) für das Binom $(c+x)^n$, worin die Bekannte c das erste Glied und x das letzte. Es handelt sich also nur darum diesen algebraischen Ausdruck in die Differentialsprache zu übersetzen, d. h. für die Koeffizienten A, B, C, D etc. Differentialsymbole zu finden, um jede beliebige Funktion x entwickeln, d. h. ihre konstante Funktionen mit x als Faktor in

есть, таким образом, уже алгебраическое выражение (с неопределенными коэффициентами) для бинома $(c+x)^n$, в котором известная c — первый член, а x — второй. Нужно, следовательно, только перевести это алгебраическое выражение на язык дифференциального исчисления, т. е. найти для коэффициентов A, B, C, D и т. д. дифференциальные символы, чтобы разложить всякую произвольную функцию x, т. е. представить aufsteigenden ganzen Potenzen darstellen zu können.

ее в виде [суммы] произведений ее постоянных функций на возрастающие целые степени x.

Здесь, как и в рукописи 4000, Маркс особо останавливается на том, что, в то время как в ряде Тейлора коэффициентами являются производные *функции*, в ряде Маклорена коэффициенты — постоянные. То обстоятельство, что эти постоянные представляют собой значения производных функций по x при $x = 0$ и поэтому могут быть найдены с помощью дифференциального исчисления, выясняется теперь Марксом так:

Hier bietet sich aber von vornherein eine Schwierigkeit, die Taylor's Theorem fremd ist. Durch den Differentialcalcul können *direkt* nur Funktionen der Variablen erhalten werden, und hier handelt es sich umgekehrt um Entwicklung der mit der Variablen verbundenen konstanten Funktionen. Andererseits die Differentiation nur möglich, wenn x zu x_1 oder $x+h$ wird wie in Taylor's Theorem, aber hier handelt es sich nicht über die Funktionen, die x durch ein negatives oder positives Inkrement erhält, sondern darum, den allgemeinen Ausdruck der $f(x)$ in entwickelter Form mit x als Faktor in aufsteigender Potenz darzustellen, wie z. B. die gewöhnliche Algebra $f(x) = \frac{a}{a-x}$ durch fortlaufende Division darstellt in der Reihe

Но здесь возникает с самого начала трудность, чуждая теореме Тейлора. При помощи дифференциального исчисления *непосредственно* можно получить лишь функции переменных, в то время как здесь речь идет, наоборот, о развертывании связанных с переменными постоянных функций. С другой стороны, дифференцирование возможно, лишь когда x обращается в x_1 или в $x+h$, как в теореме Тейлора. Здесь же речь идет не о функциях, получающихся в результате изменения x благодаря положительному или отрицательному приращению, а о представлении общего выражения $f(x)$ в развернутой форме, с множителями x в возрастающих степенях, так, например, обыкновенная алгебра представляет $f(x) = \frac{a}{a-x}$ с помощью последовательного деления в виде ряда

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{1}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{a^3}x^3 + \ldots$$

Nehmen wir nun in $(c+x)^n$, x als Variable und entwickeln diese $f(x)$ auf Weg des Differentialcalculs (indem wir also

Если мы теперь в $(c+x)^n$ примем x за переменную и развернем эту $f(x)$ с помощью дифференциального исчисления

$f(x)$ zu $f(x_1)$ oder $f(x+h)$ werden lassen, etc.), so erhalten wir:

(обращая, следовательно, $f(x)$ в $f(x_1)$ или в $f(x+h)$ и т. д.), то мы получим:

$$(c+x)^n = y = f(x),$$

$$n(c+x)^{n-1} = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(c+x)^{n-2} = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}f''(x),$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(c+x)^{n-3} = \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{6}f'''(x)$$

etc. и т. д.

Wir erhalten so immer neue Binome, aber keine selbständige Entwicklung der konstanten Funktion *c*. Wir erreichen diesen Zweck jedoch dadurch, dass wir in sämtlichen Binomen $x = 0$ setzen, also nachdem wir die Variable zur Erhaltung einer Entwicklung benutzt, sie wieder beseitigen.

Итак, мы получаем все время новые биномы, а не самостоятельное развертывание постоянной функции в *c*. Последней цели мы достигаем, однако, тем, что во всех биномах полагаем $x = 0$, т. е. после того, как мы уже использовали переменную для получения некоторого разложения, мы ее устраняем.

Дальнейшая часть пункта 2) опять-таки, как в рукописи 4000, посвящена вопросу о кратных корнях алгебраического уравнения. Маркс начинает ее словами (л. 11):

Wir wollen noch Mac Laurin's eigene Entwicklung hersetzen, um auf ein anderes algebraisches Element des Differentialcalculs hinzuweisen.

Приведем еще собственный вывод Маклорена, чтобы указать на еще один алгебраический элемент дифференциального исчисления.

Этот вывод, состоящий в отыскании неопределенных коэффициентов разложения

$$f(x) \text{ или } y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ и т. д.}$$

с помощью последовательного дифференцирования и полагания затем $x = 0$, Маркс завершает словами (л. 11):

Was speziell den hier angewandten Prozess der sukzessiven Differentiation angeht, so hat Mac Laurin in seiner «Algebra», die nach ihm selbst wesentlich Kommentar zu Newton's «Arithmetica Universalis» ist, diesen

Что касается специально примененного здесь процесса последовательного дифференцирования, то Маклорен в своей «Алгебре», которая, по его словам, есть, в сущности, комментарий к Ньютоновой «Arithmetica

Prozess rein algebraisch entwickelt, wo es sich nämlich darum handelt, Gleichungen sukzessiv um einen Grad herabzusetzen zur Auffindung darin enthaltener gleicher Wurzeln und auch zur Entdeckung unbekannter [Wurzeln].

Universalis», развил этот процесс чисто алгебраически, именно в той части, где речь идет о последовательном понижении на единицу степени уравнения в целях отыскания его кратных корней, а также обнаружения неизвестных [корней].

В «Алгебре» Маклорена метод отыскания кратных корней изложен только на примерах уравнений третьей и четвертой степени (см. Описание рукописи 3933, стр. 399—403). Здесь, как и в рукописи 4000, Маркс излагает этот метод поэтому по «Элементам алгебры» Лакруа, где алгорифм носит более общий характер (строится в применении к уравнению любой степени m). Подчеркивая то обстоятельство, что результат оказывается совпадающим с получаемым посредством последовательного дифференцирования первоначального уравнения, Маркс (л. 13—14) объясняет это совпадение так:

In dieser algebraischen Form der sukzessiven Differentiation eines zu bemerken: wir erhalten die Gleichungen, indem wir $x=y+a$ setzten; also $x-a=$ $=y$. Ist nun a selbst eine Wurzel der Gleichung, so $x=a$, also $x-a=0$, *also* $y=0$. In $x-a=y$ ist Differenz gesetzt zwischen x und a, und zwar ist diese Differenz $=y$. Wird nun $x=a$, also die erst gesetzte Differenz wieder aufgehoben, so erhalten wir dadurch ein doppeltes Resultat, einerseits a als eine der Wurzeln der Gleichung oder als einen *partikulären Wert von* x; andererseits $y=0$. Das Setzen und Aufheben der Differenz erscheint also wie im Differentialcalcul einerseits als Setzen eines Positiven, andererseits als Setzen von 0.

По поводу этой алгебраической формы последовательного дифференцирования следует заметить: мы получаем уравнения в результате полагания $x=y+a$, т. е. $x-a=y$. Если a само есть корень уравнения, то $x=a$, т. е. $x-a=0$, *следовательно*, $y=0$. В $x-a=y$ положена разность между x и a, и притом эта разность равна y. Если затем $x=a$, т. е. положенная сперва разность снова снимается, то мы получаем благодаря этому двойной результат: с одной стороны, a, как один из корней уравнения или *частное значение* x; с другой стороны, $y=0$. Полагание и снятие разности выступает, таким образом, как и в дифференциальном исчислении, с одной стороны, как полагание чего-то положительного, с другой — как полагание нуля.

Последняя часть раздела II (лл. 14—16), посвященная теореме Маклорена как частному случаю теоремы Тейлора, публикуется в настоящей книге (см. стр. 194—199).

Пункт 1) раздела III рукописи, озаглавленного Марксом: **«III. Lagranges Funktionentheorie» («III. Лагранжева теория функций»)** (лл. 16—17), также публикуется в настоящей книге (см. стр. 198).

За этим в рукописи следует подробное изложение (по учебнику Бушарла, §§ 244—260, стр. 168—180) Лагранжева доказательства того, что в *общем случае* $f(x+h)$ может быть разложена в ряд по целым возрастающим степеням h и что такого рода ряд должен быть рядом Тейлора.

Переходя к заключающему эту часть рукописи примеру применения метода Лагранжа к отысканию производной произведения двух функций, Маркс пишет на л. 24:

Bevor als Schluss einige wenige Bemerkungen über die Methode Lagrange's, noch vorher ein ganz elementares Beispiel ihrer Anwendung. Es soll z. B. *differenziert* werden $f(x) = uz$.

Прежде чем дать в заключение несколько небольших замечаний о методе Лагранжа, рассмотрим сначала совсем простой пример его применения. Пусть требуется, например, *продифференцировать* $f(x) = uz$.

Заключительные замечания Маркса (пункт H) (л. 25—26) публикуются в настоящей книге (см. стр. 202, 203).

ДРУГИЕ РУКОПИСИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Ед. хр. 4002

Отдельные листки (всего четыре), занумерованные Марксом 1, 2 и 1, 2 и озаглавленные соответственно: **«Taylor's Theorem»** (**«Теорема Тейлора»**) **и «1) Taylor's Theorem»** (**«1. Теорема Тейлора»**). Содержание обеих пар листков совпадает. Вероятно, одна пара листков служит черновиком для другой. По содержанию соответствуют тем частям рукописей 4000 и 4001, где теорема Тейлора получается путем наведения из теоремы о биноме Ньютона. Здесь, однако, говорится в этой связи, что

Taylor scheint in der Tat nicht so einfach zu seinem Fund gekommen zu sein.	Тейлор, по-видимому, на самом деле не пришел к своему открытию столь просто.

Рукопись обрывается на заголовке: **«Mac Laurin's Theorem»** (**«Теорема Маклорена»**).

Ед. хр. 4003

Листки, содержащие в основном выкладки (частично и конспекты), выполненные Марксом, очевидно, при чтении учебников Хайнда, Бушарла и др.; всего 26 листов (нумерация Маркса: 1—7, III, далее 6, стр. б/н, 3—4, далее б/н).

Лл. 1—7 под заголовком: **«Lagrange (Derived functions)»** (**«Лагранж (Производные функции)»**), занумерованные Марксом цифрами 1—7, содержат: выкладки, относящиеся к §§ 95—97 (стр. 120—127) учебника Хайнда, в которых излагается метод Лагранжа, цитату (со ссылкой Маркса на Хайнда) из § 99, в которой подчеркивается, что на практике разложение в ряд осуществляется с помощью обычных методов дифференциального исчисления, а не по Лагранжу, и, наконец, выкладки, относящиеся к § 74, к которому Маркс обратился в связи со встретившейся ему в § 96 ссылкой на аналогичный метод (неопределенных показателей степени), примененный уже ранее.

Лл. 8 — 9 под заголовком **«Lagrange's Method»** (**«Метод Лагранжа»**), представляющие собой начало конспекта § 244 (стр. 168—169) учебника Бушарла. Язык английский. Конспект обрывается на выкладках, относящихся к примеру, заимствованному из учебника Холла (стр. 3).

Лл. 10—18, относящиеся к случаям неприменимости теоремы Тейлора. Первые два примера:

$$y = x^2 + \sqrt{x-a} \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{(b-x)^3}$$

— из § 77 (стр. 92—93) учебника Хайнда, вторые два:

$$y = b + \sqrt{x-a} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x-a}$$

— из § 69 (стр. 52—53) учебника Холла.

Лл. 19 — 22 содержат черновые выкладки, в основном относящиеся к выводу теоремы о биноме Ньютона с помощью ряда Тейлора.

Л. 24 содержит выписки и чертеж из § 88 (стр. 111—112) учебника Хайнда. В этом параграфе Хайнд пытается обосновать метод флюксий Ньютона с помощью метода пределов.

Лл. 25 и 26, содержащие дифференцирование xy по Лейбницу и Пуассону, из Sauri, t. III, p. 3 и Hall, p. 4, приводятся здесь полностью:

TO DIFFERENTIATE xy

ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ xy

1) *Leibniz Methode.*

1) *Метод Лейбница.*

$$f(x, y) = xy,$$
$$df(x, y) = (x + dx)(y + dy) - xy,$$
$$df(x, y) = xy + x\,dy + y\,dx + dx\,dy - xy,$$
$$\therefore df(x, y) = x\,dy + y\,dx + dx\,dy.$$

We neglect $dx\,dy$ as infinitesimals of 2nd order. (As to this neglecting the same in Newton, only notation different.)

Отбрасываем $dx\,dy$, как бесконечно малую 2-го порядка. (Что касается этого отбрасывания, Ньютон делает то же самое, только обозначения у него другие.)

$$\therefore df(x, y) = x\,dy + y\,dx.$$

2) *Nach Poisson.*

2) *По Пуассону.*

If we have yz, so nach dem allgemeinen Satz:

Если мы имеем yz, то, согласно общему предложению,

$$y_1 = y + Ah + Bh^2 + \ldots,$$
$$z_1 = z + A_1h + B_1h^2 + \ldots$$

We know from the same Satz:

Мы знаем из того же предложения:

$$\frac{dy}{dx} = A \quad \overset{\text{und}}{\text{и}} \quad \frac{dz}{dx} = A_1.$$

Multiplying the 2 equations:

Перемножаем эти два уравнения:

$$z_1y_1 = zy + Azh + Bzh^2 + \ldots + A_1yh + AA_1h^2 + \ldots + B_1yh^2 + \ldots$$

Hence:

Следовательно,

$$\frac{z_1y_1 - zy}{h} = Az + A_1y + (Bz + AA_1 + B_1y)\,h + \ldots$$

making $h = 0$:

полагаем $h = 0$:

$$\frac{z_1y_1 - zy}{0} = Az + A_1y, \quad \frac{d\,(zy)}{dx} = Az + A_1y.$$

Putting in the values of A und A_1:

Подставляем значения для A и A_1:

$$d\,(zy) = z\,dy + y\,dz$$ [164].

РУКОПИСИ 1880-х ГОДОВ

ТЕТРАДЬ «А. I»
НОВАЯ СИСТЕМАТИЗАЦИЯ МАТЕРИАЛА ПО КУРСАМ ХАЙНДА И БУШАРЛА

Ед. хр. 4036

Тетрадь, озаглавленная Марксом «А. I)» (крупная римская цифра I со скобкой написаны карандашом, по-видимому, позднее); всего содержит 42 страницы, причем в нумерации Маркса сначала идет стр. 1а, затем страницы 1—35, далее стр. 37—41 и последняя страничка без номера.

Тетрадь представляет собой систематический конспект первых трех глав учебника Хайнда с некоторыми вставками из учебника Бушарла.

Четвертая глава учебника Хайнда, начало которой посвящено дифференцированию тригонометрических функций, конспектируется Марксом уже в тетради «В (продолжение А). II» (см. рукопись 4038). Но в тетради «А. I» Маркс предваряет этот раздел разделом IV, содержащим конспект глав I и II книги: Hind, «The Elements of Plane and Spherical Trigonometry», 3d ed. Cambridge, 1837, pp. 7—46. Аналогичная вставка, посвященная логарифмам, делается им в связи с дифференцированием логарифмической и показательной функций.

В разделе I (лл. 1—3), соответствующем главе I учебника Хайнда, посвященной «определениям и предварительным замечаниям», Маркс конспектирует только примеры 1—9 Хайнда (стр. 20—24 учебника), нумеруя их начальными строчными буквами греческого алфавита (α — ι). Во всех этих примерах производная находится непосредственно исходя из ее определения как предела или «последнего значения» отношения $\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

В примерах α) и β) дифференцируются соответственно функции $u = ax$ и $u = ax^3 - bx^2 + cx - e$. К примеру β) Маркс на полях пишет примечание. Этот пример (как он записан Марксом) (л. 2) и соответствующее примечание приводятся здесь полностью.

β) $$u = ax^3 - bx^2 + cx - e;\quad u_1 = ax_1^3 - bx_1^2 + cx_1 - e;$$
$$u_1 - u = a(x_1^3 - x^3) - b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x);$$
$$u_1 - u = a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) - b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x);$$

hence (следовательно):

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} \text{ oder (или) } \frac{\Delta u}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1x + x^2) - b(x_1 + x) + c.$$

If the increment of x be diminished sine limite, x_1 becomes $=x$. (Если приращение x убывает безгранично, то x_1 становится $=x$.)

$$\therefore \frac{du}{dx}=3ax^2-2bx+c;$$

$$\therefore du=3ax^2\,dx-2bx\,dx+c\,dx.$$

β) Es ist zu bemerken, dass hier der Unterschied von α). Dort* hatten wir $\frac{\Delta u}{\Delta x}=a$, und so bei Verwandlung in $\frac{du}{dx}$ wird nichts verwandelt als Form der ersten Seite. In β) doppelseitig: das Inkrement von x abnehmend sine limite, wird $x_1=x$, und dies gibt uns gleichzeitig auf der zweiten Seite die erste *abgeleitete Funktion* von x und auf den ersten die Verwandlung $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ in $\frac{du}{dx}$.

Indem so $x_1=x$ wird, wird aber in der Tat

β) Следует заметить, что здесь есть отличие от α). Там* мы имели $\frac{\Delta u}{\Delta x}=a$, и поэтому при обращении в $\frac{du}{dx}$ ничего не изменяется, кроме формы первой стороны. В β) с обеих сторон: при безграничном убывании приращения x становится $x_1=x$, и это дает нам одновременно на второй стороне первую *производную функцию* от x и на первой стороне обращение $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ в $\frac{du}{dx}$.

Но когда $x_1=x$, то в действительности получается

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{0}{0},$$

so dass dies nur «scheinbar» umgangen wird dadurch, dass nicht dabei verweilt wird; aber der Vorteil für die elementare Entwicklung besteht darin, dass auf der zweiten Seite 0 nicht als Faktor vorkommt der gewisse Glieder verschwinden macht; es zeigt sich *vielmehr unmittelbar*, dass das Werden von $x_1=x$ neue Funktion liefert von x auf der zweiten Seite, während es auf der ersten zeigt, durch Verwandlung von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ in $\frac{du}{dx}$, dass diese neue Funktion die limiting

так что это лишь «по видимости» обходится посредством того, что на этом не задерживаются; но преимущество для элементарного вывода состоит в том, что на второй стороне нуль уже не встречается как множитель, уничтожающий определенные члены; *скорее, наоборот*, обнаруживается *непосредственно*, что обращение x_1 в x дает на второй стороне новую функцию от x, между тем как на первой показывает через обращение $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ в $\frac{du}{dx}$, что эта новая функция есть

* В рукописи описка: hier (здесь).— *Ред.*

und ultimate value of $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ist.

предельное и последнее значение для $\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

В примере γ), где исходя из определения производной непосредственно дифференцируется функция

$$u=\frac{a^2+x^2}{a-x},$$

Маркс после слов:

«Machen wir die Sache durch *Differentialcalcul*, so»

«Если мы сделаем то же с помощью *дифференциального исчисления*, то»

добавляет вывод $\frac{du}{dx}$ по правилу дифференцирования частного.

В разделе II (лл. 4—13), представляющем собой краткий конспект главы II («О дифференцировании алгебраических функций от одной независимой переменной») учебника Хайнда, Маркс выписывает по преимуществу только содержащиеся в этой главе формулы и примеры, не приводя никаких доказательств, в том числе и для дифференциала произведения. Однако выкладки, относящиеся к примерам, Маркс выполняет полностью, иногда даже более детально, чем у Хайнда. Большинство этих страниц рукописи содержит только выкладки.

Раздел III (лл. 14—26) по содержанию относится к главе III («О дифференцировании показательной и логарифмической функций от одной независимой переменной»; §§ 34—46) учебника Хайнда. Законспектировав весь § 34, в котором производная от показательной функции находится с помощью ссылки на то, что, как «было доказано в алгебре»,

$$\log a=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\ldots,$$

Маркс делает из Hind, гл. VII, стр. 154—159 под заголовком: **«Einschiebsels von trigonometrical algebra» («Вставка из тригонометрической алгебры»)** вставку (лл. 14—17), по содержанию фактически совпадающую — вплоть до той же ошибки в шестом знаке десятичного разложения для числа e—с описанными на стр. 370—372 §§ 13 и 14 из раздела VII рукописи 3933 («Алгебра II»).

По окончании вставки Маркс на л. 17 пишет: **«Ende des Einschiebsel» («Конец вставки»)** и далее под заголовком: **«Fortsetzung von p. 13 (vor dem Einschiebsel)» («Продолжение стр. 13 (до вставки)»)** он возвращается к § 34 из учебника Хайнда, конспектируя его на этот раз очень кратко. Вслед за этим он конспектирует §§ 35—37 и только пример I из § 45 главы III учебника Хайнда.

Ряды для a^x и для $\log x$ были получены во вставке с помощью применения биномиальной теоремы. При выводе производной от a^x, исходя непосредственно из определения производной, Хайнд пользовался рядом для $\log a$. В учебнике Бушарла производная от a^x находилась с помощью разложения в ряд по степеням h выражения a^{x+h} и отыскания коэффициента при первой степени h. Последнее производилось с использованием теоремы Маклорена и метода неопределенных коэффициентов.

В этой связи Маркс снова обращает внимание на связь методов дифференциального исчисления с методами, используемыми в курсах алгебры. Он пишет на л. 19:

Vergleichen wir hier wieder die auf dem Differentialcalculus selbst beruhende Entwicklung desselben Problems, so finden wir wieder, wie bei Taylor's und Mac Laurin's theorems, *blosse Übersetzung* aus einer Ausdrucksweise in die andre, wobei 1) die allgemeine Grundlage wieder das binomial theorem, zur *weiteren Entwicklung* aber wird genommen *Mac Laurins* theorem, welches uns liefert $f(x)$ [[im gegebnen Kasus $y = a^x$]] in Expansion von integral positiv ascending powers of x, wo nachher $x = 0$ gesetzt wird, um das worum es sich in der Tat handelt, die Koeffizienten A etc. welche die Ableitung der *Konstanten* a darstellen, zu finden.

Nehmen wir diese Entwicklung.

Если мы снова сравним с этим развитие той же проблемы, покоящейся на самом дифференциальном исчислении, то мы опять обнаружим, как в теоремах Тейлора и Маклорена, *простой перевод* с одного способа выражения на другой, причем 1) общею основою здесь также является биномиальная теорема, для *дальнейшего же развития* употребляется теорема *Маклорена*, которая дает нам $f(x)$ [[в данном случае $y = a^x$]] разложенною в ряд по целым положительным возрастающим степеням x, где затем полагается $x = 0$ для того, чтобы отыскать то, что на самом деле требуется найти, т. е. коэффициенты A и т. д., которые представляют [функции], произведенные из *постоянной* a.

Рассмотрим этот вывод.

Вслед за этим Маркс подробно конспектирует §§ 36—40 (стр. 24—28) учебника Бушарла, посвященные дифференцированию показательной функции, а затем снова возвращается к Хайнду и теперь уже подробно конспектирует §§ 37—46.

Раздел IV (л. 27—41), озаглавленный Марксом: **«Vorläufige Rekapitulation of trigonometric developments»** (**«Предварительное повторение тригонометрических выводов»**), представляет собой подробный конспект упомянутого учебника Хайнда и книги: Hall Th. G., «A Treatise on Plane Trigonometry», London, 1833, гл. I. Речь идет о выводе обычных формул тригонометрии, которые могут понадобиться при дифференцировании тригонометрических функций.

Стр. 1a и 41 этой тетради содержат обычное доказательство теоремы о дифференциале произведения.

Последняя, не занумерованная Марксом страница тетради, по содержанию относящаяся уже к следующей тетради, озаглавленной: **«B (продолжение A). II»**, и представляющая собой начало первого наброска работы о дифференциале, заканчивается словами: **«Sieh weiter Heft II, p. 9»** (**«См. дальше тетрадь II, стр. 9»**). Эта страница публикуется в настоящей книге (см. стр. 78—81).

«II. ТЕТРАДЬ I»

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТЕХ ЖЕ МАТЕРИАЛОВ

Ед. хр. 4037

Тетрадь, озаглавленная Марксом: **«II. Heft I»** (**«II. Тетрадь I»**). Заполнено 18 страниц. Это — конспекты учебников Бушарла и Хайнда по дифференциальному исчислению.

Лл. 1—3. Начинаются с заголовка: **«I. A) Maxima et Minima of functions of one variable»** (**«I. A. Максимум и минимум функций от одной переменной»**), за которым следует римская цифра «I». Конспект §§ 91—101 (стр. 64—70), относящихся к разделу под тем же заглавием учебника Бушарла (французское издание 1838 г.).

Лл. 4—18. Начинаются с заголовка: **«II. Zusätzliches über Maxima und Minima»** (**«II. Дополнительно о максимуме и минимуме»**). Конспект главы VII (§§ 109—120 и 123—124; стр. 147—171, 173—177) учебника Хайнда. Из последнего § 124 Маркс конспектирует только пример 1; последние три страницы (177—179) главы VII остаются незаконспектированными.

ТЕТРАДЬ «В (Продолжение А). II»

ПЕРВЫЕ НАБРОСКИ СОБСТВЕННОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАРКСА НА СУЩНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И НАБРОСКИ ИСТОРИЧЕСКОГО ОЧЕРКА

Ед. хр. 4038

Тетрадь, в которой заполнено 39 страниц, озаглавлена Марксом: **«B (Fortsetzung von A). II»** (**«В (Продолжение А). II»**) (крупная римская цифра II написана так же и тем же карандашом, что и цифра I в тетради под заголовком: **«A. I»**; см. рукопись 4036). Первая страница не занумерована, затем идут в нумерации Маркса стр. 1—37; тетрадь заканчивается еще одной незанумерованной страницей.

Л. 1 (стр. без номера). Содержит указатель имен, дат жизни и названий трудов классиков дифференциального исчисления, публикуется в настоящей книге под заголовком: **«Листок, приложенный к тетради «В (Продолжение А). II»** (см. стр. 138—139, а также вклейку между страницами 136, 137).

Лл. 2—8 (у Маркса 1—7). Под заголовком: **«IV (Fortsetzung von IV A). Differentiation trigonometrischer Funktionen»**. (**«IV (Продолжение IV A). Дифференцирование тригонометрических функций»**) Маркс помещает конспекты параграфов, посвященных дифференцированию тригонометрических функций, последовательно из курсов: Сори (том III, § 27, стр. 36—37), Холла (гл. II, §§ 29—31, стр. 18—19), Хайнда (?) (гл. I, § 18, стр. 22—23), Хемминга (?) (гл. III, § 30, стр. 23), Хайнда (гл. IV, §§ 47—48, стр. 46—47), Бушарла (§§ 43—51, стр. 30—33).

(Вопросительные знаки означают, что источник не установлен с полной достоверностью.)

Начиная свой конспект с § 27 из учебника Сори (Сори придерживался еще метода Лейбница, и для него поэтому синус бесконечно малой дуги был просто равен самой дуге), Маркс излагает этот пункт под заголовком (стр. 1):

«a) Eine der einfachsten Formen der Darstellung *auf Boden des Differentialcalculs* selbst.»

(«а) Одна из простейших форм изложения *на почве* самого *дифференциального исчисления*.»

В курсе Холла (который исходит из метода Лагранжа) наращенное значение функции u выражается в виде

$$u+\frac{du}{dx}h+Uh^2;$$

по этому поводу Маркс замечает в скобках (л. 3, пункт b)):

(wo U Repräsentant aller späteren Koeffizienten affiziert mit höheren Potenzen of h).

(где U — представитель всех дальнейших коэффициентов с более высокими степенями h).

Следующий метод, конспектируемый Марксом в пункте c), основан на равенстве

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\cos\frac{1}{2}(x_1+x)\frac{\sin\frac{x_1-x}{2}}{\frac{x_1-x}{2}},$$

где $u=\sin x$, и переходе к пределу при $x_1\to x$. Такой метод применяется Хайндом в § 18 на примере дифференцирования функции $u=\sin 2x$, иллюстрирующем определение производной. Маркс применяет этот же метод к отысканию производной от функций $u=\sin x$ и $u=\cos x$. Служил ли здесь для Маркса источником этот параграф из книги Хайнда или в его распоряжении был еще какой-нибудь источник, не установленный нами, трудно сказать.

Переходя далее к методу, излагаемому им в пункте d), Маркс пишет (л. 4):

d) Die vorige Methode (c) unterstellt der Basis des Differentialcalculs nur bei der *letzten Übersetzung in seine Sprache* für ein Resultat, das *ohne ihn* gefunden wird. Noch vollständiger [ist] dies der Fall in folgender Methode wo direkt von den *finite differences* ausgegangen wird, die zuletzt in differentials verwandelt werden.

d) Предыдущий метод (c) предполагает базис дифференциального исчисления лишь при *последнем переводе на его язык* результата, который получается *без помощи этого* исчисления. Еще полнее это имеет место в следующем методе, где исходят прямо из *конечных разностей*, обращающихся под конец в дифференциалы.

Здесь речь идет о методе, использующем формулу

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Выписав эту формулу, Маркс продолжает (л. 4):

Vom Standpunkt der definite differences wird weiter geschlossen.

Wenn Bogen Δx *sehr klein*, so $\cos(x+\Delta x)$ *nearly* $=\cos x$ und $\sin\frac{\Delta x}{2}=\frac{\Delta x}{2}$ nearly.

С точки зрения конечных разностей заключает далее:

Если дуга Δx *очень мала*, то $\cos(x+\Delta x)=\cos x$ *приближенно*, а $\sin\frac{\Delta x}{2}=\frac{\Delta x}{2}$.

Also	Следовательно,

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x \ \overset{\text{oder}}{\underset{\text{или}}{}}\ \Delta\sin x = 2\cos x\cdot\frac{\Delta x}{2} = \cos x\cdot\Delta x \ \overset{\textit{nearly.}}{\underset{\textit{приближенно.}}{}}$$

Dies *übersetzt in die Differentialform gibt* $d\sin x = \cos x\, dx$, wo bloss d für Δ und $=$ für *nearly* $=$ [gesetzt].	*Переведенное в дифференциальную форму*, это *дает* $d\sin x = \cos x\, dx$, где просто Δ заменена на d, а знак *приближенного* равенства — на знак равенства.

Откуда Маркс мог заимствовать этот (совсем уже нестрогий) вывод, не установлено. В курсе Хемминга, который также начинает с вышеприведенного равенства, вывод из него формулы $dy = \cos x\, dx$, где $y = \sin x$, получается путем деления Δy (т. е. $\Delta \sin x$) на Δx и перехода к пределу.

Переходя к следующему пункту, Маркс пишет (л. 5):

e) Diese (Differential) Methode unterscheidet sich von den vorigen, vom Differentialcalculus ausgehenden (also a) und b)) dadurch, dass der Zuwachs nicht sofort als Differential gefasst wird.	e) Этот (дифференциальный) метод отличается от предыдущих, исходящих из дифференциального исчисления (т. е. от a) и b)), тем, что приращение не рассматривается тотчас же как дифференциал.

Здесь речь идет о методе Хайнда (§§ 47, 48, стр. 46, 47), в курсе которого функция $u = \sin p$, где p — в свою очередь функция от x, дифференцируется, исходя из равенств

$$\frac{u_1-u}{h} = 2\cos\left(p+\frac{1}{2}i\right)\frac{\sin\frac{1}{2}i}{h} = \left[\cos\left(p+\frac{1}{2}i\right)\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\right]\frac{i}{h},$$

посредством перехода к пределу при $h\to 0$. Приращения i и h переменных p и x здесь действительно не отождествляются непосредственно с дифференциалами dp и dx.

В последнем пункте f) этого раздела под заголовком: **«f) (Boucharlat)»** (**«f (Бушарла)»**) (в других случаях Маркс не указывает здесь своих источников) конспектируются §§ 43—51 (стр. 30—33) учебника Бушарла. Здесь исходным является равенство

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h},$$

которое преобразуется в равенство

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\frac{\sin h\cos x}{h}.$$

При $h=0$ оба члена этого равенства обращаются в $\frac{0}{0}$, и Бушарла, которому нужно вычислить фактически $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}$, говорит в этой связи (приводим запись из конспекта Маркса, л. 6):

«Der term $\left[\frac{\cos h - 1}{h}\right]$ muss also unter irgendeine *andre Form* gesetzt werden».

«Этому члену $\left[\frac{\cos h - 1}{h}\right]$ нужно придать, следовательно, *другую форму*».

После этого Бушарла преобразует выражение $\cos h - 1$ в $-\frac{\sin^2 h}{\cos h + 1}$ и далее осуществляет переход к пределу простым полаганием $h = 0$ и $\frac{\sin 0}{0} = 1$.

Лл. 9—16 (у Маркса стр. 8—15). Текст начинается с указания Маркса (л. 9): **«(Sieh Anfang hiervon, aus Heft I, wiederholt p. 10 dieses Hefts)»** (**«(См. начало этого в тетради I, повторено на стр. 10 этой тетради)»**). Маркс имеет здесь в виду последнюю страницу (без номера) из рукописи 4036.

Публикуемый в настоящем издании (стр. 78—105) текст представляет собой первый набросок работы о дифференциале. Он занимает у Маркса последнюю незанумерованную страницу тетради «A. I» (начало) (л. 42), (л. 11, стр. 10 настоящей тетради под заголовком: **«Hier der Anfang von p. 8»** (**«Здесь начало страницы 8»**), л. 12 (стр. 11) до слов **«(weiter p. 8 oben und p. 9)»** (**«(далее стр. 8 выше и стр. 9)»**), л. 9 (стр. 8), после которого идет текст оставшейся части л. 12 (стр. 11), л. 10 (стр. 9) и лл. 13—16 (стр. 12—15).

Лл. 16—35 (у Маркса стр. 15—34). Наброски очерка истории дифференциального исчисления. Публикуются в настоящем издании (стр. 137—189) под заголовком: «Об истории дифференциального исчисления».

Лл. 36—38 (у Маркса стр. 35—37). Содержат начало заметки Маркса, от продолжения которой он, однако, отказался, даже не сформулировав еще ясно, что именно он хотел сказать. Начало заметки гласит (начало л. 36):

f) *Das Geheimnis des Differentialcalculs.*

1) Da in der gewöhnlichen Methode die Differenz $x_1 - x$ (also auch $y_1 - y$) von vornherein als ihr *Gegenteil*, nämlich als eine *Summe* $x + \Delta x$ dargestellt wird, so kann auch nicht aus ihr das Geheimnis des Differentialcalculs unmittelbar entwickelt werden, sondern nur aus der entgegengesetzten Methode, wo die angewachsne Grösse x nur als x_1 auftritt, also die Differenz auch in der Entwicklung ihrer Differenzform $x_1 - x$ behält. Es muss also der Witz —

f) *Секрет дифференциального исчисления.*

1) Так как в обычном методе разность $x_1 - x$ (а следовательно, и $y_1 - y$) с самого начала представляются как ее *противоположность*, именно: [x_1 представляется] как некоторая *сумма* $x + \Delta x$, то из нее нельзя непосредственно извлечь секрет дифференциального исчисления; это можно получить лишь из противоположного метода, где наращенное значение x выступает только как x_1, т. е. и в дальнейшем выводе разность сохраняет свою разностную форму

das Geheimnis — aufgesucht werden, das in der von uns angewandten Methode versteckt liegt.

$x_1 - x$. Нужно, следовательно, раскрыть сущность — секрет, который содержится в скрытом виде в примененном нами методе.

Смысл дальнейшего текста недостаточно ясен. Можно только предположить, что Маркс намеревался объяснить, почему при получении производной следует сначала образовывать отличную от нуля разность $x_1 - x$, а затем снимать ее. Действительно, здесь Маркс, рассматривая функцию x^2, образует сначала разность $x^2 - x^2$, которую представляет в виде $(x + x)(x - x)$, откуда, деля обе части на $x - x$, получает далее $x + x = 2x$, после чего он пишет (л. 37):

Aber obgleich wir soweit richtig ableiteten, dass wir aus x^2 die Differenz $x^2 - x^2$ entwickelten, aus dieser Differenz $(x - x)(x + x)$, und aus letzterem den Divisor $x - x$ fanden, also immer nur aus dem ursprünglichen x^2 selbst abgeleiteten Ausdrücke anwandten, vergassen wir jedoch rechtzeitig, dass $x - x = 0$ in dem Ausdruck $(x - x)(x + x)$, also auch $0 \cdot (x + x) = 0$, bevor irgendeine weitere Division durch $x - x$ vorgehn kann. Nichtsdestoweniger hat uns diese Entwicklung bewiesen:

1) Durch hartnäckig fortgesetzte Behandlung von x^2 und x^2 daher auch von x und x, als verschiedner Grössen, also auch von $x^2 - x^2$ und $x - x$ als *wirkliche Differenzen*, gelang es uns, die Abgeleitete von x^2, nämlich $2x$ zu finden. Aber wie?

2) Nachdem wir durch Verletzung der Algebra im Ausdruck $(x - x)(x + x)$ noch zu guter Letzt $x - x$ als eine wirkliche Differenz behandelt, also verfahren, als ob das erste x eine von dem zweiten x unterschiedne Grösse sei, und daher auch

Но хотя мы до сих пор правильно выводили, когда от x^2 переходили к разности $x^2 - x^2$, из этой разности получали $(x - x)(x + x)$, а из последнего — делитель $x - x$, т. е. все время применяли только выражения, выведенные из самого первоначального x^2, мы, однако, вовремя забыли, что $x - x = 0$ в выражении $(x - x)(x + x)$, а значит, и в $0 \cdot (x + x) = 0$, прежде чем может произойти какое-нибудь дальнейшее деление на $x - x$. Тем не менее это развитие показало нам:

1) Упорно настаивая на трактовке x^2 и x^2, отсюда также x и x, как различных величин, а значит, также $x^2 - x^2$ и $x - x$ как *действительных разностей*, нам удалось найти производную от x^2, именно $2x$. Но как?

2) После того, как, нарушая законы алгебры, мы еще напоследок в выражении $(x - x)(x + x)$ трактовали $x - x$ как некоторую действительную разность, т. е. поступали так, как будто первая x есть отличная от второй x вели-

erlaubten $(x - x)(x + x)$ durch $(x - x)$ zu dividieren, erinnern wir uns plötzlich, sobald nun vor uns der positive Ausdruck $(x + x)$, mit keinem Faktor ausser 1, [dasteht], dass x und x keine verschiednen, sondern identische Grössen sind, daher $x + x = 2x$.

чина, и позволили себе поэтому разделить $(x - x)(x + x)$ на $(x - x)$, мы вдруг вспомнили, как только у нас получилось положительное выражение $x + x$ без всякого другого множителя, кроме 1, что x и x совсем не различные, а тождественные величины и поэтому $x + x = 2x$.

На этом заметка обрывается; далее на л. 38 следует под заголовком: «3) **ad. S. 35**» («**3, к стр. 35**») повторение (в несколько других выражениях) написанного на л. 36 вывода производной $2x$ из x^2 путем образования разностей $x^2 - x^2$ и $x - x$.

Последняя незанумерованная страница тетради (л. 39) содержит только выкладки, относящиеся к выводу подкасательной для параболы.

РАЗРОЗНЕННЫЕ ЛИСТКИ С МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ВЫКЛАДКАМИ

Ед. хр. 4040

Двойной листок писчей бумаги (стр. 1—3), содержащий сводку формул дифференциального исчисления. Источник — учебник Хайнда, главы I, II.

Ед. хр. 4048

Разрозненные листки (всего 10), содержащие выкладки, относящиеся к разным вопросам, затрагиваемым Марксом в его конспектах. Чего-либо нового по сравнению с этими конспектами не содержат. На одном листке выписаны общие уравнения для кривых второго и третьего порядка.

ЗАМЕТКИ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЕ МЕТОД ДАЛАМБЕРА НА ПРИМЕРЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Ед. хр. 4143

Рукопись, состоящая из 14 страниц, занумерованных Марксом строчными латинскими буквами от a до n.

Лл. 1—7 (у Маркса страницы от a до g) содержат заметки Маркса, иллюстрирующие метод Даламбера на примере дифференцирования сложной функции. Публикуются в настоящем издании под заглавием: **«Анализ метода Даламбера еще на одном примере»** (см. стр. 226—237).

Лл. 8—9 (у Маркса страницы h, i) озаглавлены: **«Lagrange» («Лагранж»)**. Содержат выкладки, относящиеся к дифференцированию произведения двух функций u и z по методу Лагранжа, т. е. с помощью представления произведения наращенных значений функций в виде произведения двух рядов

$$u+ph+\frac{1}{2}qh^2+\ \ldots \quad \text{и} \quad z+p_1h+\frac{1}{2}q_1h^2+\ \ldots$$

и отыскания коэффициентов при h в первой степени. Источник — Хайнд, § 96 (стр. 126—127).

Лл. 10—14 (у Маркса страницы от k (с оборотом) до n) посвящены дифференциалам второго порядка. Здесь специально обсуждается вопрос о том, как следует дифференцировать выражения вида $f'(x)\,dx$. Так, на лл. 12 и 13 мы читаем:

I

$$x^3, \quad 3x^2=f'(x), \quad 6x=f''(x).$$

I) $3x^2$ oder $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Wird nun von $f'(x)$ als $\varphi(x)$ ausgegangen, i. e. $\varphi(x)=3x^2$ gesetzt, so erhalten wir auf früherem Weg:

I) $3x^2$ или $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Если же исходить из $f'(x)$ как $\varphi(x)$, т. е. полагать $\varphi(x)=$ $=3x^2$, то, идя вышеуказанным путем, мы получим:

II) $6x = \varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$. Das φ hier nur gebraucht, um es vom ersten $f'(x)$ zu unterscheiden.

II) $6x = \varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$. Здесь φ пишут лишь для того, чтобы отличить это от первой $f'(x)$.

$$d(3x^2) = d(f'(x)) = d\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$dy = f'(x)\,dx, \quad d(dy) \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{oder}}{\text{или}} d^2y = d(f'(x)\,dx).$$

If dx constant, $= d(f'(x))\,dx$.

Если dx — постоянная, то $= d(f'(x))\,dx$.

$$\therefore \frac{d^2y}{dx} = d(f'(x)).$$

Aber $d(f'(x)) = f''(x)\,dx$, $\therefore \frac{d^2y}{dx} = f''(x)\,dx$ oder $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 6x$.

[Nehmen wir $3x^2$ als erste Abgeleitete, so es gleich $f'(x)$ und $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Daher:]

a) $3x^2 = f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Also $dy = f'(x)\,dx$. Daher:

Но $d(f'(x)) = f''(x)\,dx$, $\therefore \frac{d^2y}{dx} = f''(x)\,dx$ или $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$.

[Если мы возьмем $3x^2$ как первую производную, то это равно $f'(x)$ и $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Поэтому]

a) $3x^2 = f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Итак, $dy = f'(x)\,dx$. Поэтому

$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = f''(x)\,dx^2.$$

b) $6x = f''(x)$.

Wird dx als konstant angenommen, so:

b) $6x = f''(x)$.

Если принять dx за постоянную, то

$$d^2y = d(f'(x))\,dx,$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(f'(x))}{dx}, \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{aber}}{\text{но}} \quad d(f'(x)) = f''(x)\,dx.$$

Daher

Отсюда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Bei diesem Verfahren kommt die Formel $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ nur heraus

При этом методе формула $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ получается только благоdank der Hypothese, dass

$$d\,(f'(x)\;dx) = d\,(f'(x))\;dx,$$

i. e. dass dx als konstant angenommen wird. Der Beweis kann nur der sein, wenn die Annahme nicht willkürlich, dass dx konstant in dem Resultat $dy = f'(x)\,dx$ war, wo diesmal dx nicht als dx genommen $= d\,(f\,(x))$, sondern als Differentielle der Grösse x. Kommt es als konstant bei der ersten Differentiation heraus, so bleibt es dasselbe bei der 2-ten.

даря гипотезе, что

т. е. что dx принимается за постоянную. Приведенное может служить доказательством лишь в том случае, если нет произвольности в гипотезе, что dx была постоянная, в результате $dy = f'(x)\,dx$, где на этот раз dx рассматривается не как $dx = d\,(f\,(x))$, а как дифференциал величины x. Если он оказывается постоянной при первом дифференцировании, то это же имеет место и при втором.

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ТЕРМИНОВ «ПРЕДЕЛ» И «ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ». СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ДАЛАМБЕРА С АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

Ед. хр. 4144

Заметки на 8 листах, занумерованных Марксом латинскими буквами от A до H. Состоят из двух частей (A — D и E — H) и публикуются в настоящем издании соответственно под заглавиями: «О неоднозначности терминов «предел» и «предельное значение» (стр. 212—217) и «Сравнение метода Даламбера с алгебраическим» (стр. 218—225).

ЧЕРНОВЫЕ ЗАПИСИ О РАЗЛИЧИИ МЕТОДА МАРКСА И ДАЛАМБЕРА

Ед. хр. 4145

Два листа черновых записей, посвященных выяснению того, что различие методов Маркса и Даламбера не сводится просто к тому, что вместо h пишется $x_1 - x$. С этой целью Маркс дифференцирует функцию $f(x) = x^2$, представляя сначала ее наращенное значение в виде $f(x + h)$, а затем в виде $f(x + (x_1 - x))$. Применяя в обоих случаях теорему о биноме, он получает производную как коэффициент при h в первой степени, соответственно при $(x_1 - x)$. После этого Маркс находит производную той же функции, представляя сначала разность $x_1^2 - x^2$ в виде произведения $(x_1 - x)(x_1 + x)$, а затем деля ее на $x_1 - x$ и полагая, наконец, $x_1 = x$. В этой связи Маркс по поводу первого метода замечает:

Wir haben hier die gesuchte Function $2x$ gleich in der ersten Abgeleiteten fix und fertig als Koeffizient von $(x_1 - x)$; sie ist direkt erhalten durch binomischen Lehrsatz.

Мы имеем здесь искомую функцию $2x$ сразу же в готовом виде в первой производной как коэффициенте при $(x_1 - x)$; она получена прямо с помощью биномиальной теоремы.

По поводу второго метода Маркс пишет на полях фразу, так и оставшуюся незаконченной: за нею в рукописи следует многоточие.

Hence, wenn gilt es nicht nur $x_1 - x$ zu entfernen, sondern durch Setzen von $x_1 = x$ oder $x_1 - x = 0$, wird $x_1 + x = 2x$, also die Funktion $2x$ abgeleitet durch die Reduktion von $(x_1 - x)(x_1 + x)$ . . .

Следовательно, когда требуется не только удалить $x_1 - x$, но когда полагание $x_1 = x$, или $x_1 - x = 0$, дает $x_1 + x = 2x$, т. е. выводится функция $2x$ посредством сведѐния $(x_1 - x) \times \times (x_1 + x)$ . . .

ЧЕРНОВЫЕ РУКОПИСИ О ПОНЯТИИ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Ед. хр. 4146

Рукопись на 9 листах содержит:

а) черновик рукописи «О понятии производной функции» (см. настоящее издание, стр. 28—45, и ниже описание рукописи 4147), лл. 1—8 (занумерованы Марксом 1—6, 5 и две страницы без номера); имеющиеся разночтения между черновиком и рукописью «О понятии производной функции», публикуемой в первой части настоящего издания, приводятся там в подстрочных примечаниях;

б) на л. 9 имеется заметка, которая публикуется ниже полностью.

О ЗАМЕНЕ СИМВОЛА $\frac{0}{0}$ СИМВОЛОМ $\frac{dy}{dx}$

I

Gezeigt, dass z. B.	Показано, что, например:
1) Wenn	1) Если

$$y = x^m = f(x), \quad y_1 = x_1^m,$$

wir erhalten	[то] мы получаем

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder / или } \frac{0}{0} = mx^{m-1}.$$

Ward gezeigt, das die abgeleitete Funktion $f'(x)$ oder mx^{m-1} erhalten wurde aus der ursprünglichen	Было показано, что производная функция $f'(x)$ или mx^{m-1} получена из первоначальной

$$f(x) = x^m,$$

indem $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$ gesetzt ward.	посредством полагания $x_1 = x$, т. е. $x_1 - x = 0$.

Dieselbe Setzung von $x_1 - x = 0$ oder $x_1 = x$, verwandelte aber $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ in $\frac{0}{0}$, und wir setzten $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle, um zu zeigen, welchen Ursprungs dies $\frac{0}{0}$ ist, d. h. welches Verhältnis wirklicher Differenzen — im obigen Fall $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ sich schliesslich in $\frac{0}{0}$ verwandelt.

Dies ist um so berechtigter, als wir zum Resultat erhalten

Но это же полагание $x_1 - x = 0$, или $x_1 = x$, превращает $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ в $\frac{0}{0}$, и мы пишем вместо последнего $\frac{dy}{dx}$, чтобы показать, каково происхождение этого $\frac{0}{0}$, т. е. какое отношение действительных разностей, — в приведенном выше случае $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ превращается в конце концов в $\frac{0}{0}$.

Это тем более оправдано, что мы в результате получаем

$$\frac{0}{0} = mx^{m-1} = f'(x),$$

und dies Resultat $\frac{0}{0}$ auf der linken Seite der Gleichung erzeugt wurde durch die Bewegungen, die von der Variablen x auf der rechten Seite ausgingen.

$\frac{0}{0}$ kann = jeder Grösse X sein, da

и этот результат $\frac{0}{0}$ на левой стороне уравнения был получен благодаря движениям, которые исходили от переменной x, находящейся на правой стороне.

$\frac{0}{0}$ может быть равно любой величине X, поскольку

$$0 = X \cdot 0 = 0.$$

Da also hier $\frac{0}{0}$ nicht gleich beliebigen X, sondern $= mx^{m-1}$, so wird durch $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{df(x)}{dx}$ angezeigt, aus welchen Bewegungen der unabhängigen Variablen x in einer bestimmten $f(x)$ das Symbol $\frac{0}{0}$ entsprungen ist.

2) Nachdem aber so ein für allemal die Bedeutung von $\frac{dy}{dx}$ fixiert ist, dessen Spezialwert natürlich wechselt mit der

Так как здесь $\frac{0}{0}$ равно не произвольному X, но $= mx^{m-1}$, то посредством $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df(x)}{dx}$ может быть указано, вследствие каких движений независимой переменной x в некоторой определенной функции $f(x)$ возник символ $\frac{0}{0}$.

2) Однако после того, как смысл $\frac{dy}{dx}$, частные значения которого, естественно, меняются в зависимости от определенного

bestimmten Gestalt von $f(x)$ selbst, und sobald wir einmal auf dem Boden des Differentialcalculs stehn, stellt sich die Aufgabe umgekehrt so dar, dass wir für $\frac{dy}{dx}$ seinen Spezialwert, wie oben $= mx^{m-1}$, oder die abgeleitete Funktion durch Differentiation finden sollen, der es entspricht.

вида самой $f(x)$, раз навсегда зафиксирован и как только мы уже вступили на почву дифференциального исчисления, задача оборачивается. Именно, требуется посредством дифференцирования найти для $\frac{dy}{dx}$ его частное значение, как, например, выше $= mx^{m-1}$, т. е. производную, которой он соответствует.

О ПОНЯТИИ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Ед. хр. 4147

Первая из работ Маркса 1881 г. о природе и истории дифференциального исчисления. В ней Маркс вводит понятие алгебраического дифференцирования и соответствующую символику для процесса отыскания производной для некоторых классов функций. К рукописи, написанной на 8 листах почтовой бумаги, в виде письма Энгельсу приложен конверт с надписью: **«Für General»** (**«Для генерала»**) (л. 9). Публикуется полностью в первой части настоящего издания (стр. 28—45) под заглавием: **«О понятии производной функции»**. Об этой рукописи см. также предисловие и примечание [1].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ НАБРОСКИ И ВАРИАНТЫ РУКОПИСИ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ

Ед. хр. 4148

Этой архивной единицей объединены три группы листков фотокопий, описываемые ниже в пунктах а), б) и в).

а) Шесть фотокопий двойных листков писчей бумаги, лл. 1—14 (занумерованных Марксом 5—15 (14 — дважды)), и две отдельные фотокопии страниц 16 и 17. Они опубликованы в настоящей книге: лл. 1—10 (стр. 5—14 (первая)) под заголовком: «Второй набросок» (см. стр. 106—123 и примечание [41]), лл. 11—14 (стр. 14 (вторая) — 17) под заголовком: «Третий набросок» (см. стр. 124—129). Фотокопии страниц 1—4 второго наброска отсутствуют (см. примечание [41]).

б) Лл. 15—27 (в нумерации Маркса стр. ad3, еще одна ad3, 4—9, б/н, 11—13) — черновик рукописи «О дифференциале» (см. ниже рукопись 4150). Разночтения с этой рукописью приведены в подстрочных примечаниях к ней (см. стр. 46—75). Приводимый ниже абзац из черновика отсутствует в рукописи 4150. Им заканчивается в черновике пункт 4), соответствующий пункту 4) раздела I чистовой рукописи (л. 20).

Der ursprüngliche Gang war durch die Entwicklung von $f(x_1)-f(x)$ erst

Первоначальный ход состоял в том, чтобы через преобразование разности $f(x_1)-f(x)$ получить сначала

$$\Delta f(x)=\Delta y,$$

dann $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu entwickeln, um daraus endlich durch Setzen von $y_1-y=0$ die Abgeleitete $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ und endlich $dy=f'(x)\,dx$ abzuleiten. dy, das *letzte* symbolische Resultat der Differenzform. Jetzt umgekehrt

а затем $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ с целью, наконец, вывести отсюда, полагая $y_1-y=0$, производную $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ и в заключение $dy=$ $=f'(x)\,dx$. dy — *последний* символический результат формы разности. Теперь, наоборот, dy

dy zum Ausgangspunkt wie früher Δy. Durch Operationen, die es anzeigt, $f'(x)\,dx$ gewonnen und schließlich aus $dy = f'(x)\,dx$ gewonnen $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, während in der ursprünglichen Ableitung $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ als letztes Resultat ergab $dy = f'(x)\,dx$, i. e. das Differential von y.

[становится] исходным пунктом, как раньше Δy. С помощью операций, которые он указывает, получается $f'(x)\,dx$, и в заключение из $dy = f'(x)\,dx$ мы получаем $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, между тем как в первоначальном выводе из $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ получался в качестве последнего результата $dy = f'(x)\,dx$, т. е. дифференциал от y.

Этот абзац написан на отдельной странице, занумерованной Марксом цифрой 6. Вслед за ним на этой странице находится только фраза, которой начинается следующий пункт 5).

5) Sehn wir uns jetzt das Differential $dy = f'(x)\,dx$ an.

5) Рассмотрим теперь дифференциал $dy = f'(x)\,dx$.

В чистовой рукописи, где пункту 5) соответствует пункт 1) раздела II, этой фразы нет. В этой связи, быть может, имеет смысл отметить, что остальная часть стр. 6 черновика — пустая, т. е. что в чистовой рукописи эта страница целиком отсутствует.

в) Лл. 28—30, по содержанию относятся к дифференцированию произведения двух функций и к отысканию второго дифференциала и второй производной. Листки не занумерованы Марксом и носят характер незаконченных отрывков. Чего-либо нового по сравнению с публикуемым материалом не содержат.

ЧЕТЫРЕ ВАРИАНТА НАБРОСКОВ ДОПОЛНЕНИЯ К РУКОПИСИ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ

Ед. хр. 4149

Наиболее полно первоначальный план этого дополнения к рукописи «О дифференциале» (см. описание рукописи 4150, стр. 491) отражен в первом наброске, игравшем, по-видимому, роль черновика. Этот набросок содержит десять страниц и состоит из четырех разделов, озаглавленных Марксом:

Лл. 1—4. **«A) Nachträgliches über Differentiation von xy»** (**«А. Дополнительно о дифференцировании xy»**), стр. 1 — начало стр. 4.

Лл. 4—5. **«B) Die Gleichung $y^2=ax$»** (**«В. Уравнение $y^2=ax$»**), стр. 4—5.

Лл. 6—9. **«C) Differentiation von $\frac{u}{z}$»** $\Big($**«С. Дифференцирование $\frac{u}{z}$»**$\Big)$, стр. 6—9.

Лл. 9—10. **«D) Implizite Form»** (**«D. Неявная форма»**), конец стр. 9—стр. 10.

Во втором наброске, лл. 11—16 (у Маркса стр. 1—5 и одна страница без номера), первые два раздела (лл. 11—13 и 13—15) переписаны начисто. Прежде всего, здесь Маркс исправил описку в заголовке раздела А), зачеркнув xy и написав uz. Однако и здесь в конце каждого раздела много зачеркиваний. Очевидно, и новая редакция не удовлетворила Маркса.

В этой связи представляет интерес то обстоятельство, что в следующих двух набросках (третьем и четвертом) этих первых двух разделов вообще нет. Маркс, по-видимому, отказался в дальнейшем от намерения включить их в свое дополнение. Наброски третий и четвертый состоят каждый только из двух разделов:

«A) Differentiation von $\frac{u}{z}$» $\Big($**«А. Дифференцирование $\frac{u}{z}$»**$\Big)$, стр. 1—3.

«B) Differentiation einer impliziten Funktion» (**«В. Дифференцирование одной неявной функции»**)*, конец стр. 3 — стр. 5.

И третий и четвертый наброски почти не содержат перечеркиваний, но к первому из них добавлен ряд черновых выкладок, относящихся к разложению дроби $\frac{y}{y-x}$ в ряд.

---

* В третьем наброске: **«B) Differentiation impliziter Funktionen»** (**«В. Дифференцирование неявных функций»**).—*Ред.*

Описание всех четырех набросков здесь будет дано одновременно. В основу его положены четыре раздела, намеченные Марксом в первом наброске, но содержание каждого из них будет освещаться в основном по более тщательно отредактированному Марксом варианту. (Все существенные разночтения с другими вариантами будут при этом приводиться в подстрочных примечаниях.)

Начнем с содержания раздела А) первых двух набросков.

Пункт 1) этого раздела публикуется в настоящей книге (см. стр. 130—133 и примечание [47]) по второму наброску, где он переписан Марксом начисто.

В следующих пунктах 2) и 3) Маркс хотел, по-видимому, выяснить, нельзя ли освободиться от допущения, что обе переменные u и z являются функциями от одной и той же независимой переменной x: нельзя ли исходить только из предположения, что u и z взаимно зависимы? Действительно, Маркс пишет (цитируем по второму наброску):

2) Mit Bezug auf den Ursprung symbolischer Differentialkoeffizienten innerhalb der «Abgeleiteten» $f'(x)$ war $d(uz)$ aber auch entwickelbar *ohne die Gleichung*

2) Что же касается происхождения символического дифференциального коэффициента внутри «производной» $f'(x)$, то $d(uz)$ могло быть также развернуто *без уравнения*

$$y = uz,$$

nämlich als isoliert betrachtete Funktion uz. Unterstellen wir zunächst, dass u *und* z *von* x *abhängen*; dann

a) uz;

wenn x zu x_1 wird:

b) $u_1 z_1$.

Daher, wenn a) von b) subtrahiert:

именно как изолированно рассматриваемая функция uz. Предположим сначала, что u *и* z *зависят от* x; тогда

a) uz;

если x становится x_1:

b) $u_1 z_1$.

Поэтому, вычитая a) из b):

$$u_1 z_1 - uz;$$

in Factoren zerlegt *:

разложенное на множители *,

$$z_1 (u_1 - u) + u (z_1 - z);$$

da beide von x abhängen:

c) $\frac{z_1 (u_1 - u)}{x_1 - x} + \frac{u (z_1 - z)}{x_1 - x}$; wenn $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$ gesetzt:

d) $z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$.

так как оба зависят от x:

c) $\frac{z_1 (u_1 - u)}{x_1 - x} + \frac{u (z_1 - z)}{x_1 - x}$; полагая $x_1 = x$, т. е. $x_1 - x = 0$:

d) $z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$.

---

* «Разложение на множители» здесь относится Марксом к преобразованию разностей $u_1 z_1 - u z_1$ и $u z_1 - uz$ в произведения $z_1 (u_1 - u)$ и $u (z_1 - z)$. —*Ред.*

3) Wir konnten endlich auch *ohne* x entwickeln und voraussetzen, dass u und z *wechselseitig voneinander abhängen*.

3) Мы могли, наконец, развивать и *без* x и предположить, что u и z *взаимно зависят друг от друга*.

Однако точно поставить задачу Марксу здесь не удалось, и возможно, что именно поэтому он и отказался в дальнейшем от включения разделов А) и В) первых двух набросков в дополнение к работе «О дифференциале».

Раздел В) приводится ниже по первому наброску, в котором он изложен более подробно. Именно из этого наброска видно также, что, хотя на той стадии работы, к которой относятся рукописи «О понятии производной функции» и «О дифференциале», а затем и дополнения к ним, Маркса интересовала прежде всего «чисто аналитическая», как он и сам говорил, сторона дифференциального исчисления, тем не менее вопрос о геометрических приложениях последнего (как именно *геометрических*) также занимал его. Первоначально Маркс, по-видимому, имел в виду заняться им уже в первых набросках дополнения к рукописи «О дифференциале», но затем решил отложить это до одного из дальнейших «выпусков», считая, очевидно, вопрос достаточно серьезным, чтобы о нем говорить не мимоходом, а посвятить ему особый выпуск. К сожалению, этого намерения Марксу уже не удалось осуществить.

Текст этого раздела дается по первому наброску (лл. 4—9).

B) DIE GLEICHUNG $y^2 = ax$

В) УРАВНЕНИЕ $y^2 = ax$

1) Wird diese Gleichung behandelt als Gleichung der Parabel *, so ist der durch den Zweck selbst gebotene Weg ** sie umzukehren. Wenn $y^2 = ax$, so notwendig auch:

$ax = y^2$, wo x abhängige und y unabhängige Variable.

Es ist dies der gebotene Weg, weil die *allgemeine Formel der Subtangenten der Kurven* $= y\frac{dy}{dx}$, also in der *besonderen* Gleichung der Parabel schliesslich dx in y ausgedrückt werden muss, um es dann in die allgemeine Formel hineinzusetzen.

1) Если это уравнение трактуется как уравнение параболы *, то самой этой целью подсказывается путь **, требующий его обернуть. Если $y^2 = ax$, то необходимо также:

$ax = y^2$, где x — зависимая, а y — независимая переменная.

Это и есть должный путь, так как *общая формула для подкасательной кривых* $= y\frac{dy}{dx}$, следовательно, в данном *частном* уравнении параболы dx должен быть окончательно выражен в y и подставлен затем в общую формулу.

* Во втором наброске здесь добавлено: «was in dieser Lieferung noch nicht geschieht» («чего в этом выпуске еще не происходит»).— *Ред.*

** К решению задачи о подкасательной к параболе (см. дальнейший текст). — *Ред.*

$ax = y^2$ gibt durch Division durch a: $x = \frac{y^2}{a}$, eine Gleichung mit einer Abhängigen im ersten Grad, und dazu in einer der elementarsten Funktionen der Unabhängigen y. Mit Bezug aber auf die geometrische Anwendung behalte ich das für später vor, da ich selber noch einige allgemeine Bemerkungen über die von mir angewandte Methode vorschicken werde *. Für jetzt soll:

$ax = y^2$ дает при делении на a: $x = \frac{y^2}{a}$, уравнение с одной зависимой в первой степени. и к тому же как одну из самых элементарных функций от независимой y. Это мы сохраним, однако, для последующего геометрического приложения, так как я лично хочу предпослать еще некоторые общие замечания о примененном мной методе *. Теперь

2) $y^2 = ax$ nur rein analytisch betrachtet werden.

2) $y^2 = ax$ будет рассматриваться лишь чисто аналитически.

$y_1^2 = ax_1$, sobald x zu x_1 wird. Also:

$y_1^2 = ax_1$, когда x обращается в x_1. Следовательно,

$$y_1^2 - y^2 = a(x_1 - x), \qquad (y_1 - y)(y_1 + y) = a(x_1 - x).$$

Dividieren [wir] $x_1 - x$ auf der rechten Seite durch sich selbst, so erhalten wir $a \cdot 1 = a$; auf der linken aber $\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)(y_1 + y)$; also:

Если мы разделим $x_1 - x$ на правой стороне само на себя, то получим $a \cdot 1 = a$; на левой же стороне $\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)(y_1 + y)$; следовательно,

$$\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)(y_1 + y) = a. \qquad [(1)]$$

Dies unser erstes Resultat ist im Auge zu halten, weil es schlagend beweist, dass ganz wie in unserem allerersten Beispiel $y = ax$, wo wir erhielten

Этот наш первый результат нужно не выпускать из виду, так как он ярко показывает, что точно так же, как в нашем самом первом примере, где было $y = ax$ и мы получили

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a,$$

die *ganze Differentialoperation einseitig* auf der symbolischen

вся дифференциальная операция односторонне происходит на

* Эта фраза во втором наброске отсутствует. Вместо нее написано: «Hier nicht weiter anzugehen» («Здесь мы этого далее не будем касаться»).—*Ред.*

linken Seite vorgeht*. Setzen wir in (1) nun auf der linken Seite $x_1=x$, also $x_1-x=x-x=0=dx$, so wird mit einem Schlag $y_1=y$, also y_1+y zu $y+y$, zu $2y$, y_1-y zu $y-y$, zu 0, zu dy, und wir erhalten:

3) $\frac{dy}{dx}\cdot 2y=a.$

Die Form $2y\frac{dy}{dx}$ unterscheidet sich in keiner Art von den sub A) 2) entwickelten Formen $z\frac{du}{dx}$ oder $u\frac{dz}{dx}$, und ist daher sofern weiter nichts über ihre Ableitung zu sagen.

Der Unterschied ist der, dass an xy** entwickelt, wie die symbolischen Differentialkoeffizienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ auf der rechten Seite, als Faktoren von abhängigen Variablen u und z auftauchen, während an y^2 umgekehrt gezeigt, wie auf der linken Seite eine einzige Variable y als Faktor neben dem Differentialkoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ auftaucht, was sich einfach daraus erklärt (*siehe oben* B) 2a)), dass die Differenz y_1-y von vornherein den Faktor (y_1+y) besitzt, daher durch die Gleichsetzung von $y_1=y$, ebensosehr das positive

символической, левой стороне*. Если мы теперь в (1) положим на левой стороне $x_1=x$, следовательно, $x_1-x=x-x=0=dx$, то тем самым будет $y_1=y$, следовательно, y_1+y обратится в $y+y$, в $2y$, y_1-y в $y-y$, в 0, в dy, и мы получаем:

3) $\frac{dy}{dx}\cdot 2y=a.$

Форма $2y\frac{dy}{dx}$ ничем не отличается от развитых sub A) 2) форм $z\frac{du}{dx}$ или $u\frac{dz}{dx}$, и в этой связи о ее выводе поэтому ничего больше не требуется говорить.

Различие состоит в том, что $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, развитые на xy** в качестве символических дифференциальных коэффициентов, возникают как множители при зависимых переменных u и z на правой стороне; оперируя же с y^2, мы видим обратное: на левой стороне возникает одна-единственная переменная y в качестве множителя при дифференциальном коэффициенте $\frac{dy}{dx}$; это объясняется просто тем (*см. выше* B) 2a)), что разность y_1-y с самого начала имеет множителем (y_1+y), в силу чего полагание $y_1=y$ должно

* Вместо всей этой большой фразы во втором наброске говорится только: «Die nun folgende *Differentialoperation geht*, *einseitig* auf der symbolischen, i. e. *der linken Seite vor*» («Следующая теперь за этим *дифференциальная операция происходит односторонне* на символической, т. е. на *левой стороне*»).— *Ред.*

** Должно было быть «на *uz*».— *Ред.*

Resultat $2y$, die doppelte Abhängige y, als das negative Resultat $y_1 - y = y - y = dy$ geliefert werden muss.

дать в равной мере как положительный результат $2y$, т. е. удвоенную зависимую y, так и отрицательный результат $y_1 - y = y - y = dy$.

Раздел C) первого наброска посвящен дифференцированию частного $\frac{u}{z}$, которое Маркс осуществляет сначала (в пункте a)), пользуясь готовой формулой для дифференциала произведения.

В пунктах b) и c) Маркс находит дифференциал частного $\frac{u}{z}$, теперь уже не пользуясь этой формулой, а исходя непосредственно из определения производной. При этом для **«сокращения процедуры»** (**«ein abgekürztes Verfahren»**) он принимает z за независимую переменную, замечая (стр. 9):

Es wäre aber ein Irrtum hieraus zu schliessen, dass der Ausdruck des allgemeinen Abhängigkeitsverhältnisses des auf der linken Seite stehenden y von der unabhängigen Variablen x, das wir früher für den symbolischen Differentialkoeffizienten erhielten, in seiner endlichen Form $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, in seiner Differentialform $\frac{dy}{dx}$ jetzt verdrängt worden sei durch eine andere Form des Abhängigkeitsverhältnisses.

Но было бы ошибкой заключить отсюда, что выражение общего отношения зависимости, стоящего на левой стороне, y от независимой переменной x, которое мы раньше получили для символического дифференциального коэффициента, в его конечной форме $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, в его дифференциальной форме $\frac{dy}{dx}$, теперь было вытеснено какой-нибудь другой формой отношения зависимости.

Не ясно ли отсюда, что и вообще Маркс не собирался, по-видимому, заменить обычные математические способы выражения зависимости между переменными какими-нибудь другими (обобщенными) способами выражения их «взаимозависимости»?

В пункте b), образовав разность $\frac{u_1}{z_1} - \frac{u}{z}$ и преобразовав ее к виду $\frac{z(u_1 - u) - u(z_1 - z)}{zz_1}$, Маркс полагает затем $z_1 = z$ (в силу чего у него и $u_1 = u$) и получает сразу

$$d\frac{u}{z} = \frac{z\,du - u\,dz}{z^2}. \qquad [(1)]$$

В пункте c) этот же дифференциал получается, начиная с деления разности $\frac{u_1}{z_1} - \frac{u}{z}$ на $z_1 - z$, т. е. посредством предварительного отыскания производной частного. Это находится в полном соответствии с методом, которым обычно пользуется Маркс. Тем не менее, получив в пункте b) правую часть формулы (1) без предварительного деления разности $\frac{u_1}{z_1} - \frac{u}{z}$ на $z_1 - z$, Маркс замечает тут же (л. 8):

Das Verfahren absolut dasselbe wie früher; erst im Resultat erscheint das Neue, dass die Differenz der unabhängigen Variablen $z_1 - z$ im Zähler steht, während der positive Ausdruck der Gleichsetzung von $z_1 = z$ im Nenner steht, unter der Form z^2.

Метод абсолютно тот же, как и раньше; только в результате есть нечто новое, состоящее в том, что разность независимой переменной $z_1 - z$ стоит в числителе, между тем как положительное выражение приравнивания $z_1 = z$ находится в знаменателе в виде z^2.

Если рукопись «О дифференциале» была начисто переписана Марксом до посылки ее Энгельсу, то дополнения к ней были, по-видимому, прочитаны кем-то (скорее всего Энгельсом или Муром) еще в черновике (которым является первый набросок дополнения). Приведенное выше место вызвало, очевидно, критическое замечание читателя, в ответ на которое Маркс и написал последние два варианта дополнения. Разделы C) и D) первого наброска легли при этом в основу, как уже было отмечено, третьего и четвертого набросков, где они превратились в разделы A) и B).

Раздел A) в третьем наброске, посвященный дифференцированию частного $\frac{u}{z}$, написан непосредственно в виде ответа на критическое замечание. В своем ответе Маркс разъяснял, что получившееся у него выражение $\frac{z\,du - u\,dz}{z^2}$ было не производной от $\frac{u}{z}$, а дифференциалом $d\frac{u}{z}$. (Напомним, что у Маркса — как и у Эйлера, см. Приложение, «Об исчислении нулей Леонарда Эйлера» (стр. 577—580) — количественно дифференциал вообще был равен нулю.)

В четвертом наброске, представляющем собой отредактированную начисто последнюю ступень работы над Дополнениями, раздел A) утерял характер ответа на критическое замечание. Чтобы отразить весь ход работы Маркса, мы приводим поэтому не только текст по четвертому наброску, но и (в подстрочных примечаниях) все существенные разночтения с третьим наброском.

Раздел A) состоит из трех пунктов: 1), 2), 3). Первые два из них приводятся ниже полностью. Что же касается пункта 3), то он помещен на стр. 132—135 настоящей книги по третьему (в этом пункте более полному) наброску.

A) DIFFERENTIATION VON $\frac{u}{z}$

A) ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ $\frac{u}{z}$

1) Unterstellt, dass in $\frac{u}{z}$ die unabhängige Variable z, die abhängige u.

1) Допустим, что в $\frac{u}{z}$ независимая переменная z, зависимая u.

Der Abwechslung halber behandeln wir diesmal — was immer geschehn kann — die in algebraischem Ausdruck (worin einbegriffen der in Sinus und Kosinus etc., in Logarithmen, in exponential expression wie a^x gegebne Ausdruck) gegebne Funktion ohne irgendeine Gleichungsform *.

a) $\frac{u}{z}$; wächst z zu z_1, so **:

b) $\frac{u_1}{z_1}$; a) abgezogen von b):

c) $\frac{u_1}{z_1} - \frac{u}{z}$; unter selben Nenner gebracht: $\frac{zu_1 - uz_1}{z_1 z}$; Zähler in [Differenz von Produkten] zerlegt:

d) $\frac{z(u_1 - u) - u(z_1 - z)}{z_1 z}$. Wird $z_1 = z$, also $z_1 - z = 0$, so ***:

e) $\frac{z\,du - u\,dz}{z^2}$ ****.

Для разнообразия рассмотрим на этот раз — что всегда может случиться — данную в алгебраическом выражении (в число которых включаются выражения, содержащие синусы, косинусы и т. д., логарифмы, показательные выражения, как a^x) функцию независимо от какой бы то ни было формы уравнения *.

a) $\frac{u}{z}$; если z возрастает до z_1, то **:

b) $\frac{u_1}{z_1}$; вычитая a) из b):

c) $\frac{u_1}{z_1} - \frac{u}{z}$; приводя к общему знаменателю: $\frac{zu_1 - uz_1}{z_1 z}$; разлагая числитель [в разность произведений]:

d) $\frac{z(u_1 - u) - u(z_1 - z)}{z_1 z}$. Если теперь становится $z_1 = z$, следовательно, $z_1 - z = 0$, то ***:

e) $\frac{z\,du - u\,dz}{z^2}$ ****.

---

* Вместо этой фразы в третьем наброске читаем: «Der Abwechslung halber behandeln wir diesmal $\frac{u}{z}$ als Funktion von u und z, ohne sie in Gleichungsform mit einer 3-ten, von $\frac{u}{z}$ abhängigen Variablen zu setzen» («Разнообразия ради рассмотрим на этот раз $\frac{u}{z}$ как функцию от u и z, не связывая ее формою уравнения с некоторой третьей, зависящей от $\frac{u}{z}$ переменной»).— *Ред.*

** В третьем наброске: «wächst z zu z_1, so u zu u_1, also:» («если z возрастает до z_1, то u до u_1, следовательно:»).— *Ред.*

*** В третьем наброске: «Wird $z_1 = z$, so $z_1 z$ zu zz oder z^2, $z_1 - z = dz$, $u_1 - u = du$, also:» («Если становится $z_1 = z$, то $z_1 z$ превращается в zz или z^2, $z_1 - z = dz$, $u_1 - u = du$, следовательно:»).— *Ред.*

**** В третьем наброске после этого добавлено: «Also (следовательно) $d\frac{u}{z} = \frac{z\,du - u\,dz}{z^2}$».— *Ред.*

Dieser Ausdruck scheint befremdlich, in der Tat durch eine *totale Änderung der Methode* hervorgebracht, weil — see d) — $z_1 - z$ sich im Zähler statt im Nenner befindet, und die Verwandlung von d) in seinen Differentialausdruck e) nur hervorgebracht, weil wir das im *Zähler* befindliche $z_1 - z$ reduziert auf $z_1 - z = 0$ *.

Ausserdem, obgleich unterstellt wurde, dass in $\frac{u}{z}$ u abhängige Variable und z die unabhängige, erreichten wir dasselbe Resultat, wenn wir im Zähler von d) $z(u_1 - u) - u(z_1 - z)$ (wo $z_1 - z$ durchaus keinen andern Platz einnimmt wie $u_1 - u$) $u_1 = u$, $u_1 - u = 0$ setzten und annähmen, dass z von u abhängt **.

Zwar konnten wir den Prozess so erklären. In d) wird der Nenner z_1z zu zz, also $z_1 = z$ gesetzt, also auch $z_1 - z = 0$, wodurch sich einerseits im Zähler das $z_1 - z$ in dz verwandelt, andrerseits $u_1 - u$ in du (weil u von z abhängt, also sobald z_1 im Nenner $= z$ wird, so $u_1 = u$, also $u_1 - u = u - u = du$).

Это выражение кажется странным, полученным на самом деле ценою *полного изменения метода*, ибо — см. d) — $z_1 - z$ вместо того, чтобы быть в знаменателе, находится в числителе, и превращение d) в его дифференциальное выражение e) осуществлено лишь благодаря тому, что мы находящееся в *числителе* $z_1 - z$ свели к $z_1 - z = 0$ *.

Кроме того, хотя и было предположено, что в $\frac{u}{z}$ u — зависимая переменная, а z — независимая, мы получили бы тот же самый результат, если бы в числителе выражения d) $z(u_1 - u) - u(z_1 - z)$ (где роль $z_1 - z$ абсолютно ничем не отличается от роли $u_1 - u$) положили $u_1 = u$, $u_1 - u = 0$ и допустили, что z зависит от u **.

Мы можем, правда, так разъяснить весь процесс. В d) знаменатель z_1z превращается в zz, т. е. полагается $z_1 = z$, а значит, и $z_1 - z = 0$, отчего, с одной стороны, в числителе $z_1 - z$ превращается в dz, с другой, $u_1 - u$ в du (так как u зависит от z, т. е. когда в знаменателе $z_1 = z$, то $u_1 = u$, т. е. $u_1 - u = u - u = du$).

---

* В третьем наброске вместо последнего абзаца: «What has struck you, is the appearance of this result. I suppose this, because otherwise you would not have thought that the differentiation of $\frac{u}{z}$ presented a peculiar case in the development of which the method was undergoing some modification» («Что поразило тебя — это внешний вид этого результата. Я предполагаю это, ибо иначе ты не подумал бы, что дифференцирование $\frac{u}{z}$ представляет особый случай, который требует некоторой модификации метода»).— *Ред.*

** Этого абзаца нет в третьем наброске.— *Ред.*

Mit Bezug auf den Zähler wäre so die Methode gerettet, aber nur um sie völlig preiszugeben. Ihr allgemeines Resultat war nämlich, dass sich das Abhängigkeitsverhältnis einer Variablen von der andern darstellen muss als $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, wenn y als Abhängige, x als Unabhängige unterstellt *.

2) Wenden wir wieder die Gleichungsform an **.

В отношении числителя метод был бы таким образом спасен, однако, лишь для того, чтобы полностью отказаться от него. Ведь его общим результатом было, что отношение зависимости некоторой переменной от другой переменной должно представляться как $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, если y предполагается зависимой, x — независимой переменной *.

2) Применим снова форму уравнения **.

$$\text{a)}\quad y=\frac{u}{z};$$

$$\text{b)}\quad y_1=\frac{u_1}{z_1};\quad y_1-y=\frac{u_1}{z_1}-\frac{u}{z};$$

$$\text{c)}\quad \frac{y_1-y}{z_1-z}=\frac{\frac{u_1}{z_1}-\frac{u}{z}}{z_1-z}=\frac{\frac{zu_1-uz_1}{z_1z}}{z_1-z}=\frac{(zu_1-uz_1)\cdot\frac{1}{z_1z}}{z_1-z};$$

$$\text{d)}\quad \frac{y_1-y}{z_1-z}=\frac{(z\,(u_1-u)\;-u\,(z_1-z))\cdot\frac{1}{z_1z}}{z_1-z}.$$

---

* В третьем наброске вместо последних двух абзацев: «In der Tat findet sich dz (e) (in seiner endlichen Form $z_1 - z$ (d)), die Differentielle der unabhängigen Variablen z, als Faktor von u im Zähler, während z selbst in der positiven Form z^2 (in der endlichen Form z_1z (d)) sich im Nenner befindet. Es scheint also, daß wir von dem endlichen Verhältnis sub d) zu dessen Differentialausdruck sub e) kommen, indem wir sub d) im *Zähler* $z\,(u_1 - u) - u\,(z_1 - z)$ $z_1 = z$, also $z_1 - z = 0$ setzen and this looks like a reversal of the method um so mehr als dadurch der *Nenner*, statt die aufgehobene Differenz $z_1 - z = dz$ zu werden, vielmehr aus z_1z zu z^2 verwandelt wird».

(«Действительно, dz ((e) в своей конечной форме $z_1 - z$ (d)), дифференциальная частица независимой переменной z находится в числителе как множитель при u, в то время как сама z в положительной форме z^2 (в конечной форме z_1z (d)) обретается в знаменателе. Таким образом, кажется, что мы приходим от конечного отношения sub d) к его дифференциальному выражению sub e), полагая sub d) в *числителе* $z\,(u_1 - u) - u\,(z_1 - z)$, $z_1 = z$, следовательно $z_1 - z = 0$, и это выглядит как изменение метода, тем более что при этом *знаменатель* вместо того, чтобы сделаться снятой разностью $z_1 - z = dz$, превращается скорее из z_1z в z^2»).— *Ред.*

** В третьем наброске: «Das Mysterium löst sich, sobald wir wieder die ursprüngliche Gleichungsform anwenden» («Тайна разъясняется, как только мы снова применим первоначальную форму уравнения»).— *Ред.*

Wird nun auf der rechten Seite $z_1 = z$ gesetzt, also $z_1 - z = 0$ etc. etc. so:

Если теперь на правой стороне положим $z_1 = z$, следовательно, $z_1 - z = 0$ и т. д. и т. д., то:

$$\text{e)}\quad \frac{dy}{dz} = \frac{(z\,du - u\,dz)\cdot\frac{1}{z^2}}{dz}$$

und / и

$$\text{f)}\quad dy \ \underset{\text{или}}{\text{oder}}\ d\frac{u}{z} = (z\,du - u\,dz)\cdot\frac{1}{z^2};$$

hence: / следовательно,

$$dy = \frac{z\,du - u\,dz}{z^2}.$$

Die Schwierigkeit entsprang also nur, weil das *Differential* für den *Differentialkoeffizienten* versehn wurde *.

Трудность, следовательно, возникла лишь оттого, что место *дифференциального коэффициента* занял *дифференциал* *.

Vergleichen wir (sieh das vorige Manuskript), so gefunden bei Differentiation von uz:

Сравним (см. предыдущую рукопись) с найденными при дифференцировании uz:

$$\text{A)}\quad \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} \quad \underset{\text{и}}{\text{und}} \quad \text{B)}\quad dy = z\,du + u\,dz.$$

Der Unterschied zwischen:

Различие между

$$\text{a)}\quad d(uz) = z\,du + u\,dz \quad \underset{\text{и}}{\text{und}} \quad \text{b)}\quad d\frac{u}{z} = (z\,du - u\,dz)\cdot\frac{1}{z^2},$$

entspringt bloss aus dem Unterschied der differenzierten Funktionen selbst.

возникает лишь из различия самих дифференцируемых функций.

Разделы D) первого наброска и B) третьего и четвертого набросков посвящены дифференцированию неявной функции. В первом наброске Маркс рассматривает заимствованный из курса Хайнда (стр. 23, пример 8) пример отыскания производной по x функции $y\,(x)$, заданной неявно уравнением второй степени $y^2 - 2yx + \frac{b}{c} = 0$ (у Хайнда $u^2 - 2ux + a^2 = 0$).

В третьем и четвертом набросках Маркс уже рассматривает функцию $y\,(x)$, заданную неявно однородным уравнением

$$y^2 - 2yx = 0.$$

* В третьем наброске вместо этого абзаца: «Das ganze Rätsel hat sich gelöst. Das *Differentialkoeffizient* ist dargestellt sub e), aber das in 1) e) und hier unter f) erhaltene Resultat ist das *Differential*» («Загадка полностью разрешилась. *Дифференциальный коэффициент* представлен sub e), полученный же в 1) e) и здесь sub f) результат есть *дифференциал*»).— *Ред.*

Полученное решение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$$

Маркс затем (в третьем и четвертом набросках) разлагает в ряд нием углом:

$$\frac{y}{y-x}=1+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^3}+\ldots,$$

и выясняет, что в данном случае он получил, таким образом,

$$2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

поскольку из уравнения $y^2-2yx=0$ (при $y\neq 0$) следует, что $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ

Ед. хр. 4150

Вторая из работ Маркса, относящаяся к 1881 г.,— о природе и истории дифференциального исчисления. В ней Маркс осуществляет собственный метод дифференцирования, используя теорему о производной произведения. К рукописи на 13 листах почтовой бумаги приложен конверт (л. 14) с надписью: **«Für Fred» («Для Фреда»)**. Публикуется полностью в первой части настоящего издания (стр. 46—75) под заглавием: «О дифференциале». Об этой рукописи см. также предисловие и примечание [13].

* ВЫКЛАДКИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К МЕТОДУ ЛАГРАНЖА

Ед. хр. 4300

Лл. 1—8 содержат подробно выполненные выкладки, относящиеся к разделу «О методе Лагранжа доказывать принципы дифференциального исчисления без рассмотрения пределов, бесконечно малых или каких-нибудь исчезающих количеств» учебника Бушарла. (В имеющемся у нас пятом издании это §§ 244—254, стр. 168—176; об их содержании см. Приложение, «Теорема Тейлора и Маклорена и теория аналитических функций Лагранжа, в источниках, которыми пользовался Маркс» стр. 597.)

Материал по-своему систематизирован Марксом, разделившим его на шесть частей. которые он занумеровал римскими цифрами I—VI с дополнительными индексами внутри каждой части.

Каких-либо существенных дополнений к изложению Бушарла, а также к рукописям Маркса 4000 и 4001 (см. Описание, стр. 412 и 441) рукопись не содержит. Ниже поэтому приводится только следующее замечание Маркса, представляющее интерес с точки зрения понимания им «бесконечности» ряда.

Выписав в части II формулу

$$f(x+h) = f(x) + ph \text{ (или } f'(x)\,h) + qh^2 + rh^3 + sh^4 + th^5 + \ldots$$

и поставив задачу: выяснить закон последовательного образования «производных» функций p, q, r, s, t и т. д., начиная с первоначальной функции $f(x)$, Маркс подытоживает уже проделанное в следующих словах (л. 3):

Das erste Resultat	*Первый результат*
1) gibt uns at all events, dass	1) дает во всяком случае, что

$$f(x+h) = f(x) + ph \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f'(x)\,h\right) + \begin{matrix}\text{Glieder mit}\\ \text{члены с}\end{matrix}\ h^2,\ h^3, \ldots,$$

2) *dass die Reihe gradlos*, i. e. ihrer Natur nach stets fortsetzbar.	2) *что ряд не имеет степени*, т. е. по самой своей природе всегда может быть продолжен.

ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА ПО ХОЛЛУ И БУШАРЛА

Ед. хр. 4301

В руководствах, которыми располагал Маркс, теорема Тейлора доказывалась двумя разными способами:

1) посредством уже готового аппарата дифференциального исчисления, но исходя из допущения, что «в общем случае», при любых x и h,

$$f(x+h)=f(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots, \tag{1}$$

где A, B, C, ... — неизвестные функции от x, которые требовалось определить (что и делалось в учебниках Бушарла и Хайнда с помощью метода неопределенных коэффициентов);

2) методом Лагранжа, т. е. без аппарата дифференциального исчисления, а наоборот, определяя *производную* как коэффициент при первой степени h в разложении (1), обосновать которое «чисто алгебраически» и хотел Лагранж (в учебнике Холла эта попытка Лагранжа излагалась в форме, которую ей придал Пуассон, пытавшийся усовершенствовать ее).

Критикуя доказательства теоремы Тейлора, приводившиеся в учебниках Хайнда и Бушарла, Маркс отмечал (см. в настоящем издании стр. 192—203, 441—452, а также стр. 204—209, 498—562) необоснованность их исходного допущения.

В настоящей рукописи он излагает доказательство теоремы Тейлора по Бушарла, но хочет воспользоваться методом Пуассона для обоснования справедливости исходного допущения этого доказательства.

Рукопись имеется в двух экземплярах (оба на английском языке): черновом и переписанном начисто, по содержанию идентичных. Чистовик (стр. 1—4 в нумерации Маркса) состоит из четырех пунктов, обозначенных римскими цифрами I—IV, в то время как в черновике (стр. 1—4 и еще одна без номера) этот же материал разбит на пять пунктов (I—V). Содержание рукописи и все цитаты из нее приводятся ниже по чистовому экземпляру.

Как уже было отмечено, Маркс думал, что не только формулировка теоремы Тейлора, но и приводившееся в курсах Бушарла и Хайнда доказательство ее принадлежали самому Тейлору. Ни в одном из этих курсов никаких библиографических указаний не было. То обстоятельство, что Маркс разыскал тем не менее название соответствующей работы Тейлора и, говоря о Тейлоре, приводил библиографическую справку, заставляет предполагать, что он собирался проверить эту гипотезу по первоисточнику, чего, к сожалению, не успел выполнить.

В соответствии с этим Маркс так формулирует в пункте I исходное допущение Бушарла:

Taylors theorem may be considered as the résumé of his «*Methodus incrementorum etc.*» (London, 1715—1717). He proceeds from the following *supposition*:

If $y=f(x)$ and $y_1=f(x+h)$, then this latter function may be developed as a series according to the ascending powers of h, thus:

Теорема Тейлора может рассматриваться как резюме его «*Метода приращений и т. д.*» (Лондон, 1715—1717). Он исходит из следующего *допущения*:

Если $y=f(x)$ и $y_1=f(x+h)$, то эта последняя функция может быть разложена в ряд по возрастающим степеням h, так:

$$y_1=y\ \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ yh^0\right)+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots,$$

where A, B, C etc. are unknown functions of x.

где A, B, C и т. д. — неизвестные функции от x.

Поэтому возникают две задачи: 1) доказать справедливость «допущения Тейлора», 2) отыскать неизвестные коэффициенты A, B, C, ...

Как известно, класс функций, которыми занимались математики XVIII и первой половины XIX века, был таков, что могло казаться естественным, будто только в «исключительных случаях» функция может не быть представимой степенным рядом. Ссылаясь на Лагранжа, который пытался доказывать это, Лакруа в своем большом «Трактате» (стр. 160) писал: «Мы употребим с этой целью очень элегантный анализ, выполненный в 1772 г. Лагранжем и пополненный затем весьма остроумными замечаниями Пуассона». (В списке литературы Лакруа указывает в этой связи статью Пуассона в третьем номере журнала «La Correspondance sur l'École Polytechnique».)]

Именно по Пуассону начинал свой курс Холл, учебник которого и использует Маркс в пункте I, посвященном обоснованию «допущения Тейлора».

Вслед за приведенным выше Маркс пишет:

But Poisson and other French mathematicians have afterwards *proved*: if $y=f(x)$ and $y_1=f(x+h)$, then: y_1-y or $f(x+h)-f(x)$ is expressible by a series of the form $Ah+Bh^2+Ch^3+$ etc., hence:

Но Пуассон и другие французские математики *доказали*: если $y=f(x)$ и $y_1=f(x+h)$, то y_1-y или $f(x+h)-f(x)$ выразимо рядом вида $Ah+$ $+Bh^2+Ch^3+$ и т. д., следовательно,

$$y_1=y+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots, \tag{1}$$

the chief object of the differential calculus being to find the values of the coefficients A, B, C etc. I shall not give here the general demonstration, but an example.

причем главной целью дифференциального исчисления является отыскать значения коэффициентов A, B, C и т. д. Я не буду приводить здесь общего доказательства, но ограничусь примером.

Далее Маркс приводит по Холлу (§ 7, стр. 3—4) пример (за номером 3) на разложение в ряд по возрастающим степеням h значения функции

$$y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \text{ и т. д.}$$

при подстановке $x + h$ вместо x.

Пункт I завершается следующим замечанием Маркса (л. 2), относящимся к приводимому Холлом «общему доказательству»:

The demonstration of Poisson etc. offers moreover the great adventage that it cannot be given without stating already the cases in which the serial development with ascending integral powers of h and unknown or indeterminate functions of x leads to irrational results — thus predeterminating the limits of the applicability of Taylor's theorem, its so-called «*failures*».

Доказательство Пуассона обладает, кроме того, большим преимуществом: его нельзя дать, не установив уже случаев, в которых разложение в ряд по возрастающим целым степеням h и с неизвестными или неопределенными функциями от x ведет к иррациональным результатам, предопределяя таким образом границы применимости теоремы Тейлора, ее так называемые «*исключения*».

В пунктах II и III Маркс приводит по учебнику Бушарла решение второй задачи: об отыскании неизвестных функций A, B, C и т. д. в разложении (1) методом неопределенных коэффициентов. В пункте II конспектируется *лемма*: «Если в некоторой функции y от x переменная x изменяется в $x + h$, то мы получим один и тот же дифференциальный коэффициент, независимо от того, будет ли x переменная, а h постоянная или же h переменная, а x постоянная» (Бушарла, § 55, стр. 34).

В пункте III с помощью дифференцирования разложения (1) сначала по h, а затем по x и применения леммы пишутся уравнения, из которых и определяются коэффициенты A, B, C и т. д. (см. Приложение, стр. 599). Полученная таким образом теорема Тейлора применяется затем к отысканию разложения в ряд Тейлора функции $\log(x + h)$ (в черновике этот пример выделен в особый пункт IV).

Пункт III заканчивается следующими словами Маркса (л. 4):

Since all transcendental functions of x — exponential, logarithmic, trigonometrical — (in fact *all* functions of x save those

Так как все трансцендентные функции от x — показательные, логарифмические, тригонометрические (в действительности *все* posessing a common algebraic form) — refuse by their nature their expression in a finite number of algebraic terms, it is self-evident that the *differential coefficients of such functions of x* can only be expressed by an infinite number of terms, whence it follows that the *corresponding functions of $x+h$* — or Taylor's series — can also in general be but expressible by a series of terms indefinitely continued.

функции от x, кроме обладающих обычной алгебраической формой) — по самой своей природе не допускают разложения в конечное число алгебраических членов, то ясно, что для выражения *дифференциальных коэффициентов от таких функций от x* должно потребоваться бесконечное число членов, откуда следует, что *соответствующие функции от $x+h$* — или ряд Тейлора — в общем случае также может быть выражен только неограниченно продолжаемым рядом членов.

Taylors theorem may also be written *

Теорему Тейлора можно также записать в виде *

$$f(x+h) = fx + \frac{d(fx)}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2(fx)}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3(fx)}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{d^n(fx)}{dx^n}\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

This is without any doubt the formula which has led Lagrange to his *theory of functions*. Other fellows denote the successive differential coefficients by p, q, r etc., and write then:

Именно эта формула, несомненно, и привела Лагранжа к его *теории функций*. Некоторые обозначают последовательные дифференциальные коэффициенты через p, q, r и т. д. и пишут при этом:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm p\frac{h}{1} + q\frac{h^2}{1\cdot 2} \pm r\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Само собою разумеется, что если $f(x+h)$ разложима в ряд Тейлора, то $f(x)$ имеет производные любого порядка. Лагранж пытался доказать, что «в общем случае» дело обстоит именно так, т. е. $f(x+h)$ разлагается в ряд Тейлора, а его последователи — авторы учебников, которыми пользовался Маркс,— вообще не сомневались в том, что всякая функция дифференцируема, и притом бесконечное число раз. Только многочлен, с их точки зрения, имел конечное число производных. В этой связи неудивительно, что Маркс различал два случая: функций, выразимых конечным, и функций, выразимых бесконечным рядом.

* В принятых Марксом обозначениях.— *Ред.*

В последнем, четвертом пункте Маркс излагает по Бушарла (в пятом издании это шестое приложение, стр. 501—502) теорему о методе неопределенных коэффициентов. Доказательству этой теоремы предшествуют следующие слова Маркса:

As the *method of indeterminate coefficients* is of frequent use in the differential calculus, I shall add a very simple demonstration by *Boucharlat* (Frenchman).

Так как *метод неопределенных коэффициентов* часто употребляется в дифференциальном исчислении, я добавлю очень простое доказательство *Бушарла* (француз).

Время написания настоящей рукописи не установлено, однако имеются основания предполагать, что она была написана после рукописей 4000 и 4001, но раньше рукописи 4302 (см. ниже, стр. 498). В самом деле, в рукописях 4000 и 4001, подытоживавших первые результаты работы над теоремами Тейлора и Маклорена и теорией аналитических функций Лагранжа, идеи, развитой в рукописи 4301, еще нет. Попытка использовать метод Лагранжа — Пуассона не как предшествующий дифференциальному исчислению, а в самом этом исчислении, с тем чтобы с помощью его устранить недостатки в доказательстве теоремы Тейлора, завершающей построение дифференциального исчисления, является новой. В то же время из последней неоконченной рукописи Маркса, в которой он критикует «доказательства», приводившиеся в курсах Холла и Бушарла, видно, что и эта попытка не удовлетворила Маркса.

НЕОКОНЧЕННАЯ РУКОПИСЬ «ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА»

Ед. хр. 4302

Датировка рукописи не представляет трудностей, так как Маркс в ней ссылается на посланные Энгельсу рукописи как «на первые две» (имеются в виду рукописи «О понятии производной функции» и «О дифференциале»). Следовательно, она написана не ранее 1881 г., по-видимому, в 1882 г.

Рукопись (45 листов) имеется только в черновике, и притом еще очень сыром. Поскольку Маркс много раз возвращался к началу и другим местам рукописи, сквозной его нумерации страниц в рукописи нет. Для ее описания естественно выделить в ней следующие части.

I. Лл. 1—4 (в нумерации Маркса стр. 1—3 и первые 4 строки страницы 4). Эта часть озаглавлена Марксом: «**Der Taylorsche Lehrsatz**» (**«Теорема Тейлора»**).

II. Лл. 4—7 (стр. 4—7) (до черты на стр. 7). Озаглавлена: «**Ad p. 1) Zusätzliches**» (**«К стр. 1. Дополнительно»**).

III. Л. 7 (стр. 7 под чертой). Начинается словами: «**Die ganze Sache besser so anzufangen**» (**«Все это лучше начать так»**) и кончается указанием в скобках: «**Fortsetzung p. 11^a**» (**«Продолжение на стр. 11^a»**).

IV. Лл. 8—9 (стр. 9, 8). Под заголовком: «**Vorläufiges über sukzessive Differentiation (Gehört vor p. 1)**» (**«Предварительное о последовательном дифференцировании (Предпослать странице 1)»**). Страница 9 кончается словами в скобках: «**Contin. vorige Seite 8**» (**«Продолжение на предыдущей стр. 8»**).

V. Л. 10 (стр. 10). Под заголовком: «**Ad p. 5**» (**«К стр. 5»**).

VI. Лл. 11—18 (стр. 11—17 и еще раз 17). Страница 11 начинается словами: «**Contin. von p. 9 u. 8**» (**«Продолжение стр. 9 и 8»**).

VII. Лл. 19—23 (стр. 11^a, 11^b, 11^7 *, 11^8, 11^9 (верхняя половина)). Продолжение текста, начатого на стр. 7. Страница 11^8 начинается заголовком (в левом верхнем углу после зачеркнутого): «**Ad. p. 11^a**» (**«К стр. 11^a»**).

VIII. Лл. 23—25 (стр. 11^9 начиная с заголовка: «**Eingang zu Seite 1 (Taylorsche Theorem)**» (**«Вступление к стр. 1; теорема Тейлора»**), стр. 1 и страница без номера). Два листа, на которых Маркс писал одновременно, продолжая

---

* 11^7, вероятно, потому, что предыдущую страницу 11^b Маркс принял по ошибке за 11^6.— *Ред.*

некоторые места со стр. 1 на страницу без номера, которую он называл **«противоположной страницей»** (**«Sieh die entgegenstehende Seite»**). Начинается с римской цифры I, под которой написано: «a)». Это, по-видимому, номер формулы для разложения $(x + h)^5$.

IX. Лл. 26—38 (стр. a, b, c, d, e, f, g, h, i, снова h, снова i, j, k). Страница «a» начинается словами: **«Ad. p. 1 (Taylorsche Theorem)»** (**«К стр. 1; теорема Тейлора»**). На стр. «c» (четвертая строка сверху) Маркс начинает новый раздел, озаглавленный: **«Das Taylorsche Theorem»** (**«Теорема Тейлора»**). Страница «k» озаглавлена: **«Das Mac Laurinsche Theorem»** (**«Теорема Маклорена»**).

X. Лл. 39—40 (стр. o, p). Под заголовком: **«Sukzessive Differentiation»** (**«Последовательное дифференцирование»**).

XI. Л. 41 (стр. s). Под заголовком: **«Ad p. 1 (Taylor's Theorem)»** (**«К стр. 1; теорема Тейлора»**).

XII. Лл. 42—45. Четыре отдельные страницы, из которых первые три занумерованы Марксом карандашом цифрами 1—3, последняя без номера. Страница 1 озаглавлена: **«Zu Taylor's Theorem, p. 1»** (**«К теореме Тейлора, стр. 1»**). Страница 2 имеет надпись: **«Ad Taylor's Theorem (p. 1)»** (**«К теореме Тейлора; стр. 1»**). На стр. 3 заголовок карандашом: **«Ad Taylor's Th., p. 1, Gl. III»** (**«К теор. Тейлора, стр. 1, ур. III»**).

Уже из приведенного перечня видно, что Маркс по меньшей мере 8 раз возвращался к началу своей рукописи, т. е. что это начало не удовлетворяло его. Такое количество вариантов, а также то обстоятельство, что все они носят характер черновых, непроверенных набросков (местами встречаются явно ошибочные выкладки и заключения), делают затруднительным даже установление намеченного Марксом плана рукописи.

Более внимательное ознакомление с рукописью, текст которой почти полностью приводится ниже, дает, однако, достаточные основания для того, чтобы можно было сделать следующие заключения об идеях и намерениях Маркса.

1) Для Маркса ясна неудовлетворительность всех способов обоснования теоремы Тейлора в руководствах Бушарла, Хайнда, Холла и др. Намеченная в рукописи 4301 попытка исправить недостатки в доказательстве Бушарла с помощью обоснования его исходного допущения также теперь не удовлетворяет Маркса, поскольку он видит, что исходное допущение Бушарла вообще неверно: не всякую функцию $f(x + h)$ можно разложить в ряд по возрастающим целым степеням h.

2) Маркс считал поэтому теорему Тейлора полученной посредством обобщения биномиальной теоремы Ньютона, позволяющей разложить $(x + h)^m$ в указанный ряд. Такое обобщение должно было выделить класс функций $f(x + h)$, для которых это разложение возможно, пусть даже, в свою очередь, лишь в некотором обобщенном смысле. Но с такого рода обобщением связаны трудности, которые и подчеркивает Маркс. Прежде всего, здесь необходим переход («скачок» даже, как его называет Маркс) от конечного многочлена к бесконечному (неограниченно продолжаемому) ряду. В биномиальной теореме, далее, $x + h$ есть просто сумма произвольных x и h; в дифференциальном же исчислении $x + h$ есть способ выражения локального (как мы сказали бы теперь) изменения переменной x, которое Маркс (см. рукопись «О дифференциале», стр. 46—75) в своем алгебраическом методе дифференцирования выражал с помощью неопределенной разности $x_1 - x$. В связи с этим Марксу приходится специально задумываться над различием между неопределенными разностями $x_1 - x$, соответственно $y_1 - y$, подлежащими «снятию» в процессе дифференцирования

(при переходе к пределу), и отнюдь не подлежащей такому «снятию» фиксированной разностью $f(x+h)-f(x)$ (также обозначаемой через y_1-y), вычисляемой (приближенно) с помощью разложения в ряд Тейлора.

3) Естественно, что Маркс хочет разобраться вообще в путанице, связанной с понятиями постоянной и переменной, с понятиями функции как аналитического выражения (функции «в x») и функции как соответствия (функции «от x»), с последовательным дифференцированием. Особый интерес в этой связи представляет выделенная нами под заголовком «О слове «функция»» заметка Маркса (см. ниже на стр. 504), помещенная в разделе рукописи, посвященном последовательному дифференцированию.

Черновой и отрывочный характер набросков, из которых состоит рукопись, очень затрудняет ее чтение и описание. Трудности связаны уже с самим расположением частей рукописи, особенно поскольку Маркс неоднократно возвращается к началу и к некоторым другим ее частям. Все соответствующие указания Маркса по возможности учтены ниже. В других случаях тексты объединяются по вопросам, которые в них рассматриваются (но всегда с указанием номера части в приведенном на стр. 498—499 перечне, с тем чтобы читатель мог восстановить содержание каждой из этих частей, если пожелает). Некоторые части рукописи, содержащие только выкладки (которые, кстати сказать, легче выполнить самому, чем следить за тем, как их выполняет другой), опущены. Опущены также (но с указанием сущности ошибки) некоторые явно ошибочные места. Встречающиеся описки исправлены.

В соответствии с указанием Маркса начнем с части IV (л. 8), затем перейдем к части VI приведенного выше перечня.

VORLÄUFIGES ÜBER SUKZESSIVE DIFFERENTIATION (GEHÖRT VOR P. 1)

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ (ПРЕДПОСЛАТЬ СТРАНИЦЕ 1)

We know, that if we have: $y=f(x)$, so $df(x)=f'(x)\,dx$. Also:

1) $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)$; wird $f'(x)$ seinerseits differenziert, so $df'(x)=f''(x)\,dx$; also:

2) $\frac{df'(x)}{dx}=f''(x)$; weiter: $df''(x)=f'''(x)\,dx$; also:

3) $\frac{df''(x)}{dx}=f'''(x)$; weiter: $df'''(x)=f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx$; also:

4) $\frac{df'''(x)}{dx}=f^{\mathrm{IV}}(x)$ usw.

A. Die «abgeleiteten» Funktionen können ihrerseits behandelt

Мы знаем, что если у нас имеется: $y=f(x)$, то $df(x)=$ $=f'(x)\,dx$; следовательно:

1) $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)$; в свою очередь $f'(x)$, будучи продифференцирована, дает $df'(x)=$ $=f''(x)\,dx$; следовательно:

2) $\frac{df'(x)}{dx}=f''(x)$; далее: $df''(x)=f'''(x)\,dx$; следовательно:

3) $\frac{df''(x)}{dx}=f'''(x)$; далее: $df'''(x)=f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx$; значит:

4) $\frac{df'''(x)}{dx}=f^{\mathrm{IV}}(x)$ и т. д.

A. «Производные» функции в свою очередь могут рассмаwerden, ohne alle Verkettung mit der Originalfunktion, andrerseits wieder als «Abgeleitete» von einer früheren Originalfunktion darstellbar. In diesem Fall erschienen dieselben Funktionen:

1) y oder $f(x)$ mit der abgeleiteten $f'(x)$, also wie vorher: $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$; diese selbständig $= \varphi(x)$;

2) y oder $\varphi(x)$ und ihre abgeleiteten: $d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$; diese wieder selbstständig als $F(x)$;

3) y oder $F(x)$ und die abgeleiteten: $dF(x) = F'(x)\,dx$ und $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.

Wir haben also:

1) $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$;

2) $f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$; setzen wir hierin den Wert von $f'(x)$, so wird's:

триваться независимо от всей цепочки функций, связывающей их с первообразной функцией; с другой стороны, каждую из них можно представить также как «производную» от некоторой прежней первообразной функции. В этом случае те же функции выступали как:

1) y или $f(x)$ с производной $f'(x)$, следовательно, как и прежде: $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$; эта функция сама по себе $= \varphi(x)$;

2) y или $\varphi(x)$ и выведенные из нее: $d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$ и $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$; эта функция в свою очередь является самостоятельной функцией, как $F(x)$;

3) y или $F(x)$ и выведенные из нее: $dF(x) = F'(x)\,dx$ и $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.

Таким образом, у нас имеется:

1) $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$;

2) $f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$; если подставить сюда значение $f'(x)$, то у нас будет

$$\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(df(x))}{dx^2};$$

also

следовательно,

$$f''(x) = \frac{d(df(x))}{dx^2},$$

Ausdruck worin wir den Sinn des Zählers unbestimmt lassen pro tanto.

(Contin. vorige Seite 8.)

выражение, где смысл числителя мы оставляем пока неопределенным.

(Продолж. на стр. 8.)

На стр. 8 (л. 9) Маркс продолжает эту процедуру, пока не получает:

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{d\left(\frac{d\cdot d\cdot df(x)}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{d(d\cdot d\cdot df(x))}{dx^4}.$$

следовательно,

$$f^{IV}(x) = \frac{d \cdot d \cdot d \cdot df(x)}{dx^4}.$$

На этом часть IV рукописи (в нашем перечне) заканчивается.

Часть VI, которой предшествуют на стр. 11 слова: **«Contin. von p. 9 u. 8»** (**«Продолжение стр. 9 и 8»**), начинается с повторения всей последней процедуры, после чего (л. 11) Маркс пишет:

Wir haben gesehn, wie diese verschiedenen Formeln als *symbolische Ausdrücke* für die *abgeleiteten Funktionen* erhalten worden sind, also als *Symbole vollbrachter Operationen*, und aus dem früher Entwickelten versteht sich jetzt von selbst, dass sie umgekehrt zu *symbolischen Operationsformeln* werden, zu Formeln, welche erst zu *vollbringende Operationen* anzeigen, also die Findung der ihnen entsprechenden realen Äquivalente oder abgeleiteten Funktionen. Wir haben aber die Formeln selbst noch näher zu betrachten.

1) Betrachten wir zunächst die Zähler der symbolischen Differentialkoeffizienten von $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, nämlich $df(x)$, $d(df(x))$, $d(d(df(x)))$, $d(d(d(df(x))))$ etc.

Diese Ausdrücke entstehn nur, weil die verschiedenen Funktionen in ihrer Ableitungskette von der Originalfunktion und voneinander auftreten, daher als *sukzessiv abgeleitete Funktionen*, wovon jede stets aus der nächst vorhergehenden entspringt. Sie treten aber auch in andern Gleichungen selbst ihrerseits als die Originalfunktionen auf, daher ohne alle Verkettung mit einander und mit der ursprünglichen

Мы видели, как эти различные формулы были получены в виде *символических выражений* для *производных функций*, следовательно, как *символы уже выполненных операций*, а из ранее изложенного само собой разумеется, что, и обратно, они становятся *символическими оперативными формулами*, формулами, указывающими лишь *подлежащие еще выполнению операции* для отыскания соответствующих им реальных эквивалентов или производных функций. Но самые формулы следует еще подробнее проанализировать.

1) Рассмотрим сначала числители символических дифференциальных коэффициентов для $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, а именно: $df(x)$, $d(df(x))$, $d(d(df(x)))$, $d(d(d(df(x))))$ и т. д.

Эти выражения возникают лишь потому, что различные функции выступают в цепочке их вывода из первоначальной функции и друг из друга, т. е. как *последовательно выведенные функции*, каждая из которых происходит всегда из непосредственно ей предшествующей. Но они выступают и в других уравнениях, в свою очередь сами как первообразные функции, т. е. без какой бы то ни было цепочки

Originalfunktion, welche letztere wieder dies Muttermal einer anderen Originalfunktion tragen kann, deren Abgeleitete sie ursprünglich ist.

связей друг с другом и с исходной первообразной функцией, которая в свою очередь может носить это родимое пятно какой-нибудь другой первообразной функции, производной которой она первоначально является.

Ohne Zusammenhang erscheinen dieselben Funktionen so: z. B. y oder $f(x) = 5x^4$ (welche Originalfunktion selbst auf den ersten Blick als *erste abgeleitete von* x^5 erkennbar). Hence

Вне взаимной связи эти функции выступают так: например, y или $f(x) = 5x^4$ (в самой этой первообразной функции можно с первого взгляда опознать *первую производную от* x^5). Отсюда

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \begin{array}{c}\text{oder}\\ \text{или}\end{array} \frac{dy}{dx} = 5 \cdot 4 \cdot x^3.$$

Diese Abgeleitete selbständig auftretend heisse $= \varphi(x)$.

Doch vorher noch dies zu bemerken:

Эту производную, самостоятельно выступающую, назовем $\varphi(x)$.

Но предварительно нужно заметить еще следующее:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \begin{array}{c}\text{oder}\\ \text{или}\end{array} \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

nachdem letztes reduziert auf $\frac{dy}{dx}$ durch Setzung von $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$.

Um dies festzuhalten wollen wir das $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$. sobald es diese Metamorphose durchlaufen, schreiben $\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)$, wo also die Klammern bezeichnen, dass $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ zu $\frac{dy}{dx}$ geworden.

Wir erhalten also

после того, как последнее будет сведено к $\frac{dy}{dx}$ благодаря приравниванию $x_1 = x$, или $x_1 - x = 0$.

Чтобы зафиксировать это, мы будем обозначать претерпевшее уже эту метаморфозу [выражение] $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ через $\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)$, где, следовательно, скобки обозначают, что $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ превратилось в $\frac{dy}{dx}$.

Таким образом, мы получили

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \begin{array}{c}\text{oder}\\ \text{или}\end{array} \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right).$$

Und hier ist noch eine Bemerkung zu machen über das Wort *Funktion*.

Но здесь нужно сделать еще некоторое замечание о слове *функция*.

Так как следующая за этим вставка представляет и самостоятельный интерес, независимо от вопроса о последовательном дифференцировании, она приводится ниже в виде отдельной заметки (л. 12—13).

ÜBER DAS WORT «FUNKTION»

Ursprünglich wird das Wort «Funktion» in die Algebra eingeführt bei Behandlung der so g. indeterminierten Gleichungen, deren Anzahl geringer als die der in ihnen vorhandenen Unbekannten. Hier wird z. B. der Wert von y verändert, je nachdem man z. B. x die numerischen Werte 3, 4, 5 etc. supponiert. y hiess hier Funktion von x, weil es ihm Order parieren muss, wie jeder Funktionär, selbst der grosse Wilhelm I, von somebody abhängt.

Im Differentialcalcul wurde demgemäss das Wort «Funktion» in diesem Sinn auf die abhängige Variable, z. B. y übertragen.

y oder $f(x)$, also y oder $5x^4$ in unserem Beispiel, meinte also die Funktion *von* x, und zwar die Funktion von x, das im bestimmten Ausdruck $5x^4$ gegeben ist, weil der Wert von y wechselt mit den Wert] wechseln, die x durch seine Variation in seinem eigenen Ausdruck $5x^4$ produziert.

Eine bis heute fortdauernde Konfusion trat aber ein, sobald Lagrange die Bestimmung der «abgeleiteten» Funktionen einführte und damit die der Originalfunktion, wovon sie abgeleitet. Lagrange's Funktion ging in alle modernen Behandlungen des Calculus über, wo jedoch die überkommene Bedeutung des Worts

О СЛОВЕ «ФУНКЦИЯ»

Первоначально слово «функция» вводится в алгебру при рассмотрении так называемых неопределенных уравнений, число которых меньше числа входящих в них неизвестных. Здесь значение y, для примера, меняется, когда на место x, например, подставляются численные значения 3, 4, 5 и т. д. Тут y называется функцией от x, потому что он должен подчиняться его приказу, как каждый функционер, хотя бы сам великий Вильгельм I тоже от кого-нибудь зависит.

В дифференциальном исчислении слово «функция» в соответствии с этим было перенесено в этом смысле на зависимую переменную, например на y.

y или $f(x)$, т. е. y или $5x^4$ в нашем примере, означало, следовательно, функцию *от* x, и притом ту функцию от x, которая дана определенным выражением $5x^4$, потому что значение y меняется вместе с изменениями значений, которые x при своем варьировании производит в своем собственном выражении $5x^4$.

Однако, когда Лагранж ввел определение «производных» функций, а вместе с тем и определение первообразной функции, из которой они выведены, возникла продолжающаяся и до сих пор путаница. Функция по Лагранжу вошла во все современные трактовки исчисления, где, однако, слово «функция»

«Funktion» gleichzeitig überlebt: so z. B.

wenn $y = 5x^4$, so haben wir:

y oder $f(x)$ oder noch näher spezifiziert y *oder* $f(x)$ *oder* Funktion $5x^4 = f(x)$ *oder* $5x^4$.

Die Konfusion ist nur dadurch zu beseitigen, dass wir lesen:

y, die Funktion *von* x, also die Abhängige von x in jedem partikularen case oder die *Funktion von* x *in dessen bestimmtem Ausdruck* $5x^4$, ist = der Originalfunktion *in* x: $5x^4$; ebenso mit Bezug auf die Abgeleiteten, y stets Funktion *von* x, sie dagegen Funktion *in* x. Das Wort «Funktion» im letzteren Sinn meint, für die *Originalfunktion*, die algebraische Kombination, worin x ursprünglich erscheint, z. B. als $5x^4$, für die *abgeleitete Funktion*, die neuen Werte, welche an die Stelle von $5x^4$ treten infolge Variationen von x und der ihnen entsprechenden Differentiationen [165].

Bei Lagrange dagegen hat der Ausdruck $f(x)$, sobald er auf der linken Seite des algebraischen Ausdrucks in x steht, nur die Bedeutung des *allgemeinen*, daher *unbestimmten Ausdrucks* gegenüber dem *partikulären* [166]; und $f(x+h)$ den Sinn des allgemeinen, unentwickelten Ausdrucks gegenüber seinem entwickelten Ausdruck der Entwicklungsreihe, wie z. B. in der Algebra $(x+a)^m$ der allgemeine, unentwickelte Ausdruck, während auf der rechten [Seite] der Entwicklungsreihe steht $x^m +$ etc.

употребляется одновременно и в прежнем смысле: так, например,

если $y = 5x^4$, то мы имеем:

y, или $f(x)$, или, еще более специфицированно, y, *или* $f(x)$, *или* функция $5x^4 = f(x)$, *или* $5x^4$.

Путаницу можно устранить лишь читая:

y как функция *от* x, т. е. как зависимая от x в каждом частном случае или как *функция от* x *в его определенном выражении* $5x^4$, равна первоначальной функции *в* x, т. е. $5x^4$; точно так же относительно производных: y всегда функция *от* x, они же функции *в* x. Слово «функция» в последнем смысле означает для *первообразной функции* ту алгебраическую комбинацию, в которой x первоначально появляется, например, как $5x^4$, а для *производной функции* те новые значения, которые выступают вместо $5x^4$ в результате варьирований x и соответствующих им дифференцирований [165].

У Лагранжа же выражение $f(x)$, когда оно стоит на левой стороне алгебраического выражения в x, имеет только смысл *общего* и поэтому *неопределенного выражения*, противостоящего *частному* [166]; а $f(x+h)$ — смысл общего неразвернутого выражения, противостоящего его развернутому выражению, разложению в ряд, как, например, в алгебре $(x+a)^m$ — общее неразвернутое выражение, в то время как на правой [стороне] — стороне разложения в ряд — стоит $x^m +$ и т. д.

Dies ist für gewisse Zwecke vollständig hinreichend und adäquat; aber dennoch kann der Unterschied zwischen Funktion *von* x und Funktion *in* x nicht entbehrt werden, weil nur er einschliesst, dass die Funktion *von* x eine konkret von der Funktion *in* x unterschiedene Existenz haben kann, wie z. B. die der Ordinate, wenn x die Abszisse ist, [und die Originalfunktion in x bloss ein Ausdruck in x] etc.

Это для определенных целей вполне достаточно и адекватно; тем не менее нельзя отказаться от различения функции *от* x и функции *в* x, так как лишь из этого различения следует, что функция *от* x может иметь конкретное, отличное от функции *в* x существование, как, например, существование ординаты, когда x есть абсцисса, [а первоначальная функция в x — просто выражение в x] и т. д.

Затем Маркс переходит к выяснению смысла выписанных им в числителях выражений $df(x)$, $d(df(x))$, $d(d(df(x)))$ и т. д., т. е. дифференциалов теперь уже любого порядка. С этой целью он прежде всего последовательно дифференцирует функцию $y = x^5$, пользуясь введенным им новым обозначением $\left(\frac{y_1-y}{x_1-x}\right)$ для производной $\frac{dy}{dx}$, которое распространяет и на дифференциал, обозначая дифференциал dy через взятую в скобки разность $y_1 - y$, т. е. через «$(y_1 - y)$». Если $y = f(x)$, то Маркс пишет при этом $(y_1 - y) = (f(x_1) - f(x))$ или — как он говорит, «при другом методе» — $(y_1 - y) = (f(x+h) - f(x))$, заменяя, таким образом, x_1 на $x + h$. Здесь мы читаем (л. 13—14):

Lassen wir die verschiedenen *abgeleiteten Funktionen* ihrerseits sofort wieder als Originalfunktionen auftreten, d. h. betrachten wir sie nicht als verkettet, so:

If wir haben

1) $y = f(x) = x^5$, so $y_1 = f(x_1) = x_1^5$.

Bezeichnen wir $y_1 - y$, sobald es dy wird, weil $x_1 - x = 0$, mit $(y_1 - y)$, und ebenso $x_1 - x$ durch $(x_1 - x)$, also auch $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ durch $\frac{(f(x_1)-f(x))}{(x_1-x)}$, sobald $x_1 - x = 0$, so

Если каждую из различных *производных функций* мы будем тотчас же рассматривать в свою очередь как первообразную функцию, т. е. независимо от всей цепочки их вывода, то:

Если мы имеем:

1) $y = f(x) = x^5$, то $y_1 = f(x_1) = x_1^5$.

Обозначив $y_1 - y$, когда оно, вследствие того что $x_1 - x = 0$, становится dy, через $(y_1 - y)$ и точно так же $x_1 - x$ через $(x_1 - x)$, а значит, и $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ через $\frac{(f(x_1)-f(x))}{(x_1-x)}$, коль скоро $x_1 - x = 0$, мы будем иметь:

$$\frac{(y_1-y)}{(x_1-x)} \text{ oder (или) } \frac{(f(x_1)-f(x))}{(x_1-x) \text{ oder (или) } h} = f'(x) = 5x^4$$

und	и

$$dy \ \overset{\text{oder}}{\text{или}} \ (y_1 - y) \ \overset{\text{oder}}{\text{или}} \ (f(x_1) - f(x)) =$$
$$= f'(x)(x_1 - x) \ \overset{\text{oder}}{\text{или}} \ f'(x)\,dx = 5x^4(x_1 - x) \ \overset{\text{oder}}{\text{или}} \ 5x^4\,dx.$$

Und in der andern Methode:	И в другом методе:

$$\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right) \ \overset{\text{oder}}{\text{или}} \ \frac{(f(x+h) - f(x))}{(x_1 - x)} = f'(x) = 5x^4.$$

und ebenso	и так же

$$dy \ \overset{\text{oder}}{\text{или}} \ (y_1 - y) \ \overset{\text{oder}}{\text{или}} \ (f(x+h) - f(x)) =$$
$$= f'(x)(x_1 - x) = 5x^4(x_1 - x) = 5x^4\,dx.$$

Обозначив, далее, полученную производную $5x^4$ через $\varphi(x)$, Маркс проделывает для нее в точности то же самое, что было сделано для функции $f(x)$, т. е. для x^5. Это же он повторяет еще раз для функции $F(x)$, полученной в результате дифференцирования $\varphi(x)$, после чего заключает (лл. 14—15):

Wir sehen hier, dass	Мы видим здесь, что
1) dy oder $(y_1 - y) =$ $= (f(x_1) - f(x))$,	1) dy или $(y_1 - y) =$ $= (f(x_1) - f(x))$,
2) dy oder $(y_1 - y) =$ $= (\varphi(x_1) - \varphi(x))$,	2) dy или $(y_1 - y) =$ $= (\varphi(x_1) - \varphi(x))$,
3) dy oder $(y_1 - y) =$ $= (F(x_1) - F(x))$	3) dy или $(y_1 - y) =$ $= (F(x_1) - F(x))$
etc.	и т. д.
oder in der andern Ausdrucksweise:	или при другом способе выражения:
1) dy oder $(y_1 - y) =$ $= (f(x+h) - f(x))$,	1) dy или $(y_1 - y) =$ $= (f(x+h) - f(x))$,
2) dy oder $(y_1 - y) =$ $= (\varphi(x+h) - \varphi(x))$,	2) dy или $(y_1 - y) =$ $= (\varphi(x+h) - \varphi(x))$,
3) dy oder $(y_1 - y) =$ $= (F(x+h) - F(x))$	3) dy или $(y_1 - y) =$ $= (F(x+h) - F(x))$
etc.,	и т. д.,
dass also dy oder $(y_1 - y)$ die aufgehobene Differenz *unterschiedener Funktionen von x* ausdrückt, und zwar in 1), 2), 3) etc. jedesmal durch *Differentiation der respektiven Originalfunktionen in x*, gewonnenen *unterschiedenen Funktionen*,	что, следовательно, dy или $(y_1 - y)$ выражает снятую разность *различных функций от x*, и притом *различных функций*, полученных в 1), 2), 3) и т. д. всякий раз *посредством дифференцирования соответствующих первообразных функций в x*,

$$f(x) = x^5, \quad \varphi(x) = 5x^4, \quad F(x) = 5 \cdot 4x^3.$$

Das dy oder (y_1-y) in 1), 2), 3) hat also 3 ganz verschiedene Werte, wie sich das auch in den *Differentialen* darstellt:

Таким образом, dy или (y_1-y) в 1), 2), 3) имеет 3 совершенно различных значения, что представляется и *дифференциалами*:

$$1)\ dy \ \overset{\text{oder}}{\underset{\text{или}}{}}\ (y_1-y)=f'(x)(x_1-x),$$

$$2)\ dy \quad » \quad (y_1-y)=\varphi'(x)(x_1-x),$$

$$3)\ dy \quad » \quad (y_1-y)=F'(x)(x_1-x).$$

Dagegen bleibt im Ausdruck des *symbolischen Differentialkoeffizienten*

Напротив, в выражении *символических дифференциальных коэффициентов*

$$1)\ \frac{(f(x_1)-f(x))}{(x_1-x)},\quad 2)\ \frac{(\varphi(x_1)-\varphi(x))}{(x_1-x)},\quad 3)\ \frac{(F(x_1)-F(x))}{(x_1-x)},\ \ldots$$

das x_1-x *dasselbe*, daher auch in den *Differentialen*, wo es in allen drei Gleichungen als derselbe Faktor erscheint. Dies ist aber selbstverständlich. Nehmen wir die Funktionen $f'(x)$, $\varphi'(x)$, $F'(x)$ in dem beispielsweise gegebenen konkreten Ausdruck, so:

x_1-x при этом *одно и то же*, что и в *дифференциалах*, где x_1-x выступает во всех трех уравнениях как один и тот же множитель. Но это само собой разумеется. Если мы возьмем функции $f'(x)$, $\varphi'(x)$, $F'(x)$ в заданном для примера конкретном выражении, то:

$$1)\ f'(x)=5x^4,\quad 2)\ \varphi'(x)=5\cdot 4x^3,\quad 3)\ F'(x)=5\cdot 4\cdot 3x^2.$$

Obgleich alle drei verschiedene *Funktionen* in x sind, haben sie alle das gemein dass sie *Funktionen in derselben Variablen x sind*. Sie alle sind durch *Differentiation* geworden, nämlich dadurch, dass $x_1=x$ gesetzt, also auch $x_1-x=0$, $(x_1-x)=dx$.

Хотя все три — различные *функции* «в x», они все имеют то общее, что являются *функциями в одной и той же переменной x*. Они все получены *дифференцированием*, т. е. посредством полагания $x_1=x$, а значит, и $x_1-x=0$, $(x_1-x)=dx$.

Вслед за этим Маркс переходит к получению этих же производных с помощью оперативных формул дифференциального исчисления, т. е. начиная не с производных, а с символических формул для дифференциалов. Здесь Маркс пишет (л. 15):

Gehen wir nun von der Operationsmethode aus, wo das wirklich symbolische aus den *Differentialkoeffizienten entspringen-*

Если мы будем теперь исходить из оперативного метода, где действительно символический, *возникающий* из *дифферен-*

de Differential zum *Ausgangspunkt* dient, um umgekehrt die erstern zu finden, so z. B.

циальных коэффициентов, дифференциал служит *исходным пунктом*, чтобы, наоборот, найти эти первые, то, например,

$$1)\ dy \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}}\ (y_1 - y) = f'(x)(x_1 - x);$$

daher

поэтому

$$\frac{dy}{dx} \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}}\ \frac{(y_1 - y)}{(x_1 - x)} = f'(x).$$

Ebenso:

Точно так же:

$$2)\ dy \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}}\ (y_1 - y) = \varphi'(x)(x_1 - x);$$

also

следовательно,

$$\frac{(y_1 - y)}{(x_1 - x)} = \varphi'(x), \ \ldots$$

Im Differential erscheint $(x_1 - x)$ oder dx als Faktor der ersten abgeleiteten Funktion in x, resp. von $f'(x)$, $\varphi'(x)$, $F'(x)$ etc. Letztere werden also nur erhalten, indem sie durch Division von ihrem Faktor befreit, in andern Worten dadurch, dass $(y_1 - y) = dy$ dividiert wird durch $(x_1 - x)$ oder dx.

$(x_1 - x)$ или dx выступает в дифференциале как множитель при первой производной функции «в x», соответственно при $f'(x)$, $\varphi'(x)$, $F'(x)$ и т. д. Последние получаются, таким образом, лишь с помощью освобождения их посредством деления от сопровождающего их множителя, другими словами, посредством того, что $(y_1 - y) = dy$ делится на $(x_1 - x)$ или dx.

Далее (лл. 17—18) Маркс проделывает все это последовательное дифференцирование еще раз для функции $f(x) = x^5$ вплоть до отыскания третьей производной, начиная всякий раз с формулы для дифференциала, т. е. с формулы вида $d\Phi(x) = \Phi'(x)\,dx$ (здесь в вычислениях он допускает ряд описок). Подводя итог, Маркс пишет (л. 17):

Vergleichen wir dies nun mit den (p. 11 *) durch *Substitution gewonnenen Ausdrücken*, so, wenn wir die verschiedenen Ausdrücke dort und hier für $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, oder dans l'espèce für $5x^4$, $5\cdot 4x^3$, $5\cdot 4\cdot 3x^2$

Если мы сравним это теперь с *полученными подстановкой* (на стр. 11 *) *выражениями*, то, приравняв там и здесь различные выражения для тех же $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ или, как в нашем примере, $5x^4$, $5\cdot 4x^3$,

* См. настоящее издание, стр. 502.— *Ред.*

gleichsetzen, so:

$5\cdot 4\cdot 3x^2$, будем иметь:

$$1)\ \frac{df(x)}{dx}=f'(x)\left(\begin{matrix}\text{resp.}\\ \text{соотв.}\end{matrix}\ 5x^4\right)=\frac{dy}{dx},$$

$$2)\ \frac{d(df(x))}{dx^2}=f''(x)\left(\begin{matrix}\text{resp.}\\ \text{соотв.}\end{matrix}\ 5\cdot 4x^3\right)=\frac{dy'}{dx},$$

$$3)\ \frac{d(d(df(x)))}{dx^3}=f'''(x)\left(\begin{matrix}\text{resp.}\\ \text{соотв.}\end{matrix}\ 5\cdot 4\cdot 3x^2\right)=\frac{dy''}{dx}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite heisst also nichts als sub. 1) dass die ursprüngliche Funktion *zum erstenmal differenziert*, sub 2) dass sie zum zweitenmal, sub 3) dass sie zum drittenmal differenziert; und da wir diese erste Differentiation bezeichnen durch $df(x)$, so können wir die zweite $d(df(x))$ bezeichnen durch $d^2f(x)$, und $d(d(df(x)))$ durch $d^3f(x)$, wo [die] d, d^2, d^3 nichts ausdrücken, als dass $f(x)$ zum ersten Mal differenziert, das dadurch erhaltne Resultat wieder differenziert usf.

Таким образом, выражение на левой стороне не означает ничего иного, кроме sub 1) что первообразная функция *дифференцируется в первый раз*, sub 2)—во второй раз и sub 3) что она дифференцируется в третий раз; а так как это первое дифференцирование мы обозначаем через $df(x)$, то мы можем второе $d(df(x))$ обозначить через $d^2f(x)$, а $d(d(df(x)))$ — через $d^3f(x)$, где d, d^2, d^3 не означают ничего иного, кроме того, что $f(x)$ дифференцируется в первый раз, полученный при этом результат снова дифференцируется и т. д.

Wir erhalten also:

Мы получаем, таким образом:

$$1)\ \frac{df(x)}{dx}=\frac{dy}{dx},\quad 2)\ \frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{dy'}{dx},\quad 3)\ \frac{d^3f(x)}{dx^3}=\frac{dy''}{dx},\ \ldots$$

Da $f(x)=y$, so können wir auf der linken Seite schreiben überall y für $f(x)$, und wir erhalten:

Так как $f(x)=y$, то на левой стороне мы можем всюду вместо $f(x)$ писать y, и мы получаем:

$$1)\ \frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad 2)\ \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{dy'}{dx},\quad 3)\ \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)=\frac{dy''}{dx}.$$

Der Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken [in jeder Gleichung] nur scheinbar.

Auf der linken Seite alle Ableitungen ausgedrückt als Ableitungen aus der Originalfunktion $f(x)$;

[В каждом из этих уравнений] различие между обоими выражениями — только кажущееся.

На левой стороне все производные выражены как производные от первообразной функции $f(x)$;

auf der rechten nicht nur als aus der Originalfunktion abgeleitet, sondern auch jede der Abgeleiteten aus ihrer Vorhergehenden.

1) Aber $dy = (y_1 - y) = (f(x_1) - f(x)) = df(x)$,

2) Ebenso $dy' = (y'_1 - y') = (f'(x_1) - f'(x))$.

Also wenn sub 1) die *aufgehobene Differenz zwischen dem Original* $f(x)$ und $f(x_1)$ dargestellt, so sub 2) *die aufgehobene Differenz zwischen der ersten Abgeleiteten* $f'(x)$ *und ihrer durch das Wachsen von* x *zu* x_1 *veränderten Funktion* $f'(x_1)$.

Aber

на правой стороне они выражены не только как производные из первообразной функции, но и каждая производная — из ей предшествующей.

1) Но $dy = (y_1 - y) = (f(x_1) - f(x)) = df(x)$,

2) точно так же $dy' = (y'_1 - y') = (f'(x_1) - f'(x))$.

Таким образом, если sub 1) представлена *снятая разность между первообразной* $f(x)$ и $f(x_1)$, то sub 2) — *снятая разность между первой производной* $f'(x)$ *и ее измененной вследствие возрастания* x *до* x_1 *функцией* $f'(x_1)$.

Но

$$d^2 f(x) = d(d(f(x)))$$

drückt nichts andres aus; denn $df(x)$ ist das *Differential* der Originalfunktion $f(x)$, ist gleich $f'(x)\,dx$ und $d(df(x))$, daher das Differential des ersten Differentials $f'(x)\,dx$ *.

$d(f(x))$ ist das erste Differential der Originalfunktion $f(x)$.

$d(df(x))$ oder $d^2f(x)$ ist das zweite Differential mit Bezug auf die Originalfunktion, aber das erste Differential mit Bezug auf das erste Differential $f'(x)\,dx$.

Ebenso mit $d(d(df(x)))$ etc.

$d(y'dx)$ ist d^2 mit Bezug auf y und ebenso $d(y''dx^2)$ ist d^2 mit Bezug auf dy, also d^3 mit Bezug auf y.

Also die für die Rechnung brauchbarste Form daher

не выражает ничего иного; ибо $df(x)$ есть *дифференциал* от первообразной функции $f(x)$, он равен $f'(x)\,dx$, а $d(df(x))$ поэтому — дифференциал от первого дифференциала $f'(x)\,dx$ *.

$d(f(x))$ — это первый дифференциал первообразной $f(x)$.

$d(df(x))$ или $d^2f(x)$ — второй дифференциал по отношению к первообразной, но первый дифференциал по отношению к 1-му дифференциалу $f'(x)\,dx$.

Так же с $d(d(df(x)))$ и т. д.

$d(y'dx)$ есть d^2 по отношению к y и так же $d(y''dx^2)$ есть d^2 по отношению к dy, следовательно, d^3 — по отношению к y.

Таким образом, получена наиболее пригодная для вычис-

* Здесь в рукописи описка (она несколько раз повторяется и ниже): вместо слова «дифференциал» Маркс пишет «производная». Эти описки здесь исправлены.— *Ред.*

gewonnen: if $f(x) = y$, so

ления форма: если $f(x) = y$, то

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \ \ldots$$

Als Ausdruck der Konfusion, die noch aus den Zeiten der Newton-Leibnizschen Methoden überlebt, bei modernen Mathematikern, die nicht nur... *.

Выражением путаницы, являющейся пережитком Ньютоно-Лейбницевых методов у современных математиков, которые не только...*.

На этом текст части VI (в нашем перечислении) обрывается. Можно думать, что, говоря о путанице, являющейся пережитком методов Ньютона — Лейбница, Маркс имел в виду оперирование с выражениями вида $\frac{d^ny}{dx^n}$, как с обыкновенными дробями в случаях, когда x не является независимой переменной. Источником информации о такой путанице для Маркса мог, например, быть учебник Хемминга. Действительно, об обозначениях $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ Хемминг пишет (см. примечание на стр. 65): «Эти выражения употребляют иногда вместо $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д. и в случаях, когда x не есть независимая переменная. Но в этом случае ясно, что числители не представляют уже последовательных дифференциалов от y и что эти выражения в действительности перестают быть дробями, но становятся просто символами, эквивалентными $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$». Заметим в этой связи, что во всем приведенном тексте у Маркса x — всегда *независимая* переменная.

Изложение собственно теоремы Тейлора начинается с части I (в приведенном выше перечислении; лл. 1—4). При чтении этой части — она полностью приводится ниже — нужно помнить, что Маркс употребляет термин «ableiten» («выводить») в более широком, чем это принято теперь, смысле: у Маркса производная «выводится» из первообразной функции (т. е. получается из нее по определенным правилам), теорема Тейлора «выводится» из биномиальной теоремы Ньютона (т. е. возникает как обобщение этой теоремы, допустимость которого при этом нужно еще обосновать).

DER TAYLORSCHE LEHRSATZ
ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА

Nehmen wir

Возьмем

$$1)\ (x+h)^m = x^m + mx^{m-1}\frac{h}{1} + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Dies das *binomische Theorem*.

Это есть *теорема о биноме*.

Nehmen wir nun an, in $(x+h)^m$ sei x Variable und h

Если мы теперь предположим, что в $(x+h)^m$ x — переменная,

* В рукописи фраза не закончена.— *Ред.*

sein Inkrement, so, wenn $h = 0$, $(x + h)^m = (x + 0)^m = x^m$.

Die Originalfunktion in x, bevor es wuchs, daher x^m oder

a) $x^m = f(x) = y$,

b) $(x+h)^m = f(x+h) = y_1$.

Die obige Gleichung verwandelt sich daher in

а h — ее приращение, то, когда $h = 0$, $(x + h)^m = (x+0)^m = x^m$.

Поэтому первоначальная функция в x до его возрастания есть x^m, или

а) $x^m = f(x) = y$,

b) $(x+h)^m = f(x+h) = y_1$.

Приведенное выше уравнение преобразуется поэтому в

$$2)\ f(x+h) \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y_1 = x^m + mx^{m-1}\frac{h}{1} + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Setzen wir auf der zweiten Seite $h = 0$, so wird es auch auf der ersten Seite gleich 0 und wir erhalten wieder $y = x^m$ oder $= f(x)$ (sieh a)). Das erste Glied der Entwicklungsreihe von y_1 oder $f(x+h)$ ist also notwendig $= f(x) = y$.

Die Gleichung 2) verwandelt sich also in

Если мы на второй стороне положим $h = 0$, то оно станет равным 0 и на первой стороне, и мы снова получим $y = x^m$ или $= f(x)$ (см. а)). Таким образом, первый член ряда разложения для y_1 или для $f(x+h)$ необходимо равен $f(x)$, равен y.

Уравнение 2) преобразуется, следовательно, в

$$3)\ f(x+h) \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y_1 = y + mx^{m-1}\frac{h}{1} + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Was nun die Koeffizienten von h betrifft, so wissen wir, dass

Что касается коэффициентов h, то мы знаем, что

die *Abgeleitete von* / *производная от* $x^m = mx^{m-1}$,

» » » $mx^{m-1} = m(m-1)x^{m-2}$,

» » » $m(m-1)x^{m-2} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$,

» » » $m(m-1)(m-2)x^{m-3} = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$

etc. и т. д.

Gleichung 3) verwandelt sich daher in

Уравнение 3) преобразуется поэтому в

$$4)\ f(x+h) \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}}\ y_1 = y \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}}\ f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Da aber

Но так как

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},\quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots$$

und da wir für die abgeleiteten Funktionen ihre symbolischen Äquivalente setzen können, so:

и так как вместо производных функций можем подставить их символические эквиваленты, то:

$$5)\ f(x+h) \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}}\ y_1 = \substack{\text{oder}\\ \text{или}}\ f(x) f(x) + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4}\,\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots,$$

welches das *Taylorsche Theorem* ist, also eine allgemeine Operationsformel zur Differentiation *jeder* $f(x)$, [wenn x] um ein positives oder negatives Inkrement h wächst [167]. Wir haben dann nur y in gegebenen Funktionen x darzustellen, und nachdem wir für sie ihre $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ usw. entwickelt, die so für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. gefundenen Werte in die obige Formel zu setzen, wo ihre numerischen Faktoren dann modifiziert werden durch die Multiplikation mit h, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$, $\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ etc.

а это и есть *теорема Тейлора*, т. е. общая оперативная формула для дифференцирования *каждой* $f(x)$, [когда x] возрастает на положительное или отрицательное приращение h [167]. При этом нужно только представить y через данные функции x и после того, как мы развернем соответствующие им $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д., подставить найденные таким образом для $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. значения в приведенную выше формулу, модифицировав при этом их численные множители умножением на h, $\frac{h^2}{1\cdot 2}$, $\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д.

Von dem Standpunkt der von uns angewandten algebraischen Methode ist, solang man in der sie charakterisierenden Art verfährt, dies Theorem nicht anwendbar, obgleich es, wie gesagt,

С точки зрения примененного нами алгебраического метода эта теорема, пока мы действуем характерным для него образом, неприменима, хотя она, как уже было сказано, на основе данных, auf Grundlage der von ihr gelieferten Data direkt aus dem binomischen Theorem abgeleitet werden kann. Von ihrem Standpunkt aus ist daher über diese allgemeinste, zusammenfassendste aller Operationsgleichungen des Dufferentialcalculus nur zu bemerken:

a) Um *überhaupt anwendbar* zu sein, erheischt sie (siehe Gleichung 4), dass die Originalfunktion in x entwickelbar sei nicht nur in einer Reihe bestimmter und soweit endlicher Funktionen von x, sondern ausserdem in einer Reihe solcher Funktionen mit dem Faktor h in aufsteigenden, ganzen und positiven Potenzen. Wir kommen hierauf später zurück.

b) Aus Gleichung 5) folgt, dass

полученных с помощью этого метода, может быть непосредственно выведена из теоремы о биноме. Поэтому с его точки зрения об этом наиболее общем, всеобъемлющем из всех оперативных уравнений дифференциального исчисления можно заметить только следующее:

а) Чтобы *вообще быть применимым*, оно требует (см. уравнение 4), чтобы первообразная функция в x была разложима не только в ряд определенных и в этом смысле конечных функций от x, но чтобы, кроме того, это был ряд функций указанного рода с множителем h в возрастающих целых и положительных степенях. Ниже мы еще вернемся к этому.

b) Из уравнения 5) следует что

$$f(x+h)-f(x) \;\overset{\text{oder}}{\underset{\text{или}}{}}\; y_1-y=\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

Aber $y_1 - y$ ist eine endliche Differenz, $= \Delta y$, denn es ist nur die Differenz zwischen der $f(x)$ in ihrem Originalzustand und derselben $f(x)$ in ihrem gewachsenen Zustand. Diese Differenz ist nicht reduziert auf dy. Es folgt daher, dass die endliche Differenz

Но $y_1 - y$ есть конечная разность, $=\Delta y$, потому что это — лишь разность между $f(x)$ в ее первоначальном состоянии и той же $f(x)$ в ее приращенном виде. Эта разность не сведена к dy. Отсюда следует, что конечная разность

$$y_1 - y \;\overset{\text{oder}}{\underset{\text{или}}{}}\; f(x+h)-f(x)$$

darstellbar in einer *Summe von Differentialkoeffizienten*, multipliziert mit h in ascending powers (integral and positiv).

представима *суммой дифференциальных коэффициентов* с множителями h в возрастающих (целых и положительных) степенях.

Diese Summe ist das Inkrement, welches die abhängige Variable y erhält, wenn x um h wächst.

Aber aus Gleichung 4) folgt, dass dies nichts heisst als dass $f(x+h)-f(x)$ (oder y_1-y) dargestellt ist in der Summe der aus $f(x)$ abgeleiteten Funktionen mit dem Inkrement h in ascending etc. powers.

Nun wissen wir aber, dass

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_1-y}{x_1-x}\text{, wo} \\ x_1=x,\ x_1-x,\text{ also auch} \\ y_1-y=0\text{ gesetzt,} \\ f''(x)=\dfrac{(y')-y'}{(x_1-x)}=\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \text{nachdem } x_1-x=0 \text{ gesetzt,} \\ f'''(x)=\dfrac{(y'')-y''}{(x_1-x)}=\dfrac{d^3y}{dx^3}, \\ \text{nachdem } x_1-x=0 \text{ gesetzt,} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{(A)}$$

So erscheint die Sache, wenn wir die verschiedenen abgeleiteten Funktionen als sukzessiv aus $f(x)$, der Originalfunktion, abgeleitet betrachten.

Betrachten wir aber jede der abgeleiteten Funktionen nur mit Bezug *auf ihre eigene unmittelbare Originalfunktion*, d. h. mit Bezug auf die $f(x)$, aus der sie selbst unmittelbar entspringt, so erhalten wir nur eine Reihe von $f(x)$ und $f'(x)$, die in keinem [weiteren] Zusammenhang stehen, also auch nur den Differentialausdruck $\frac{dy}{dx}$ für jeden dieser Differentialkoeffizienten.

Эта сумма и есть приращение, получаемое зависимой переменной y, когда x возрастает на h.

Но из уравнения 4) следует, что это не означает ничего иного, кроме того, что $f(x+h)-f(x)$ (или y_1-y) представима суммой выведенных из $f(x)$ функций с приращением h в возрастающих и т. д. степенях.

Но нам известно, что

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_1-y}{x_1-x}, \\ \text{где положено } x_1=x,\ x_1-x, \\ \text{а значит, и } y_1-y=0, \\ f''(x)=\dfrac{(y')-y'}{(x_1-x)}=\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \text{после того как } x_1-x=0, \\ f'''(x)=\dfrac{(y'')-y''}{(x_1-x)}=\dfrac{d^3y}{dx^3}, \\ \text{после того как } x_1-x=0, \\ \text{и. т. д.} \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Так представляется суть дела, если рассматривать различные производные как функции, последовательно выведенные из первоначальной функции $f(x)$.

Но если мы будем рассматривать каждую из производных только по отношению *к ее собственной непосредственной первообразной функции*, т. е. по отношению к той $f(x)$, из которой она сама непосредственно возникает, то мы получим только ряд функций $f(x)$ и $f'(x)$, не находящихся ни в какой [дальнейшей] связи, а значит, также только дифференциальное выражение $\frac{dy}{dx}$ для каждого из этих дифференциальных коэффициентов.

Zuerst z. B.

Так, например, сначала:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ f(x)=x^3,\\
\qquad f'(x)\ \begin{smallmatrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{smallmatrix}\ 3x^2=\frac{y_1-y}{x_1-x},\ \begin{smallmatrix}\text{wo}\\ \text{где}\end{smallmatrix}\ x_1-x=0,\ \begin{smallmatrix}\text{also}\\ \text{значит}\end{smallmatrix}\ =\frac{dy}{dx};\\
2)\ f(x)=3x^2,\\
\qquad f'(x)=6x=\frac{y_1-y}{x_1-x},\ \begin{smallmatrix}\text{wo}\\ \text{где}\end{smallmatrix}\ x_1-x=0,\ \begin{smallmatrix}\text{also}\\ \text{значит}\end{smallmatrix}\ =\frac{dy}{dx};\\
3)\ f(x)=6x,\\
\qquad f'(x)=6=\frac{y_1-y}{x_1-x},\ \begin{smallmatrix}\text{wo}\\ \text{где}\end{smallmatrix}\ x_1-x=0,\ \begin{smallmatrix}\text{also}\\ \text{значит}\end{smallmatrix}\ =\frac{dy}{dx}.
\end{array}\right\}\ (B)$$

Halten wir uns *an die Verfahrungsweise* (B), so erhalten wir auch jedesmal nur

Если придерживаться *способа оперирования* (B), то каждый раз мы будем получать только

$$f(x+h)\ \begin{smallmatrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{smallmatrix}\ y_1\approx f(x)+f'(x)h^*.$$

Also $y_1-y\approx f'(x)h=\frac{dy}{dx}h$. Nur ist das $f'(x)$, also auch sein symbolisches Äquivalent $\frac{dy}{dx}$, also $f'(x)h=\frac{dy}{dx}h$ jedesmal in einem anderen der $(B)_{1)}$, $(B)_{2)}$ und $(B)_{3)}$. Das y_1-y, welches $\approx f'(x)h=\frac{dy}{dx}h$, behält in allen drei Gleichungen *dieselbe Form*, hat aber ganz *verschiedene Werte*, die hier ebenso wenig verkettet sind, als z. B. die Originalfunktion x^3 z. B. mit irgendeiner früheren, aus der sie abgeleitet; hätten wir z. B. gehabt die Originalfunktion x^4, so

Таким образом, $y_1-y\approx\approx f'(x)h=\frac{dy}{dx}h$. Но только эта $f'(x)$, а значит, и ее символический эквивалент $\frac{dy}{dx}$, т. е. $f'(x)h=\frac{dy}{dx}h$, каждый раз в другом из $(B)_{1)}$, $(B)_{2)}$ и $(B)_{3)}$. y_1-y, которое $\approx f'(x)h=\frac{dy}{dx}h$, сохраняет во всех трех уравнениях *одинаковую форму*, но имеет совершенно *разные значения*, причем цепная связь между ними столь же мала, как, например, у первообразной функции x^3 с какой-либо предшествующей, из которой она выведена; если бы у нас, например, была первообразная функция x^4, то

$$(x+h)^4=x^4+4x^3h+\dots$$

* Так как ясно, что тут речь идет о приближенном равенстве, мы позволили себе употребить здесь и далее современный знак приближенного равенства.— *Ред.*

Die erste abgeleitete $f'(x)$ ist hier $4x^3$, und wir erhalten

Первая производная $f'(x)$ есть здесь $4x^3$, и мы получим

$$4(x+h)^3 = 4x^3 + 4\cdot 3x^2h + 4\cdot 3xh^2 + 4h^3.$$

Dividieren wir beide Seiten durch 4, so

Разделив обе стороны на 4, будем иметь

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

wo x^3 — die *Originalfunktion*, von der wir sub b) ausgingen, — ihrerseits als *abgeleitete Funktion* figuriert. So wenig dies uns störte mit Bezug auf x^3 sub $(B)_{1)}$, so wenig hat es uns mit Bezug auf $3x^2$ zu stören sub $(B)_{2)}$, oder mit $6x$ sub $(B)_{3)}$. Die «Abgeleitete» ist nur abgeleitet relativ zur Funktion, wovon als Originalfunktion ausgegangen wird.

где x^3 — *первообразная функция*, из которой мы исходили sub b), — в свою очередь фигурирует как *производная функция*. Сколь мало это смущало нас по отношению к x^3 sub $(B)_{1)}$, столь же мало должно это нас смущать по отношению к $3x^2$ sub $(B)_{2)}$ или к $6x$ sub $(B)_{3)}$. «Производная» выведена лишь относительно той функции, из которой исходят как из первообразной.

$y_1 - y$ wird also in dem Verfahren (B) nicht als Summe abgeleiteter Funktionen dargestellt, passt hier nicht in den Kram.

Таким образом, $y_1 - y$ при способе (B) не представляется как сумма производных функций и поэтому здесь для нас не подходит.

Andererseits wenden wir uns zu (A), wo die Abgeleiteten als *sukzessiv* aus der Originalfunktion abgeleitete dargestellt und daher als Kette von Abgeleiteten, so

С другой стороны, если мы обратимся к (A), где производные функции представлены как *последовательно* выведенные из первообразной и, следовательно, как цепь производных, то

$$f(x+h) - f(x) \ \underset{\text{или}}{\text{oder}}\ y_1 - y = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

repräsentiert ebenfalls eine Kette von $y_1 - y$ [168].

представляет одновременно цепочку [разностей] $y_1 - y$ [168].

Die Formel

Формула

$$y_1 - y \ \underset{\text{или}}{\text{oder}}\ f(x+h) - f(x) = \ldots$$

heisst hier mit Bezug auf $y_1 - y$ nur, dass wir durch sukzessive Dif-

означает здесь по отношению к $y_1 - y$ только то, что путем послеferentiation von $f(x)$, also auch von $f(x+h)$ oder y_1 jene Reihe erhalten; also durch Differentiation

довательного дифференцирования $f(x)$, а значит, и $f(x+h)$ или y_1 мы получаем этот ряд, откуда путем дифференцирования

$$\begin{array}{llllll} \text{für} & & \text{erhalten} & & \text{oder} & \\ \text{для} & y_1-y & \text{получаем} & f'(x)h & \text{или} & \frac{dy}{dx}h+\ldots, \\ \text{»} & (y')_1-y' & \text{»} & f''(x)h & \text{»} & \frac{d^2y}{dx^2}h+\ldots, \\ \text{»} & (y'')_1-y'' & \text{»} & f'''(x)h & \text{»} & \frac{d^3y}{dx^3}h+\ldots \end{array}$$

Wir betrachten also die Originalfunktion x als potentialiter enthaltend alle ihre «Abgeleiteten», [nicht] als selbst für sich selbständig bestehend, daher auch in $f(x+h)-f(x)$ oder y_1-y potentialiter enthalten nicht nur y_1-y, sondern $(y')_1-y'$, $(y'')_1-y''$ etc.

Wir betrachten hier die Originalfunktion in x, z. B. $x^m=y$ als potentialiter in sich enthaltend alle aus ihr ableitbaren Funktionen, daher auch $f(x+h)-f(x)$ oder y_1-y als ausdrückbar in allen diesen Abgeleiteten an deren Stelle nachher die ihnen äquivalenten Differentialsymbole, d. h. ihre entsprechende symbolischen Differentialkoeffizienten treten.

Таким образом, мы рассматриваем первоначальную функцию x [не] как просто взятую саму по себе, а как потенциально содержащую все ее «производные»; в силу этого и в $f(x+h)-f(x)$ или в y_1-y потенциально содержится не только y_1-y, но и $(y')_1-y'$, $(y'')_1-y''$ и т. д.

Мы рассматриваем здесь первоначальную функцию в x, например $x^m=y$, как потенциально содержащую в себе все выводимые из нее функции, поэтому и приращение $f(x+h)-f(x)$ или y_1-y, как выразимое через все эти производные, вместо которых затем выступают эквивалентные или дифференциальные символы, т. е. соответствующие им символические дифференциальные коэффициенты.

Вслед за этим в рукописи идет ряд добавлений к стр. 1 (к «Теореме Тейлора»), первое из которых написано в нескольких вариантах. В этом добавлении, которое под конец Маркс переделывает во «Вступление к стр. 1», он ставит перед собой задачу перейти от алгебры, где x и h — постоянные, к дифференциальному исчислению, где каждая из них может рассматриваться и как постоянная, и как переменная, причем всякий раз требуется уточнять смысл, в котором она рассматривается. Именно в этой связи Маркс обсуждает и переход от способа выражения изменения переменной x через разность x_1-x к выражению ее через сумму $x+h$.

Ниже все эти варианты первого добавления (в нашем перечислении они входят в части II, V, III и VII) описываются в основном в том порядке, в каком они были последовательно написаны Марксом. Исключение сделано для части V, являющейся у Маркса вставкой к ранее написанному.

Часть II рукописи (см. перечисление на стр. 498—499) начинается так (л. 4):

AD P. 1) ZUSÄTZLICHES

К СТР. 1) ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Nehmen wir als gegeben im folgenden, wo $(x+h)^1$ ein gewöhnliches Binom ist und x daher nicht als variabel gilt,

Примем за уже данное нам ниже, где $(x+h)^1$ есть обыкновенный бином и x поэтому не рассматривается как переменная, что

a) $(x+h)^{m+1}$ oder / или $y = x^{m+1} + (m+1)x^m\frac{h}{1} +$

$$+(m+1)mx^{m-1}\frac{h^2}{1\cdot 2} + (m+1)m(m-1)x^{m-2}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} +$$
$$+(m+1)m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Unsere Methode erlaubt diese Gleichung zu differenzieren, also x als variabel anzunehmen, während h als konstant und nicht als Zuwachs von x gilt, denn $x_1 - x$ existiert für uns nur in dieser Differenzform, nicht als ein $x_1 - x = h$ und daher als eine Summe $x_1 = x + h$.

Наш метод позволяет дифференцировать это уравнение, т. е. принять x за переменную, между тем как h рассматривается как постоянная, а не как приращение x, ибо $x_1 - x$ существует для нас только в этой форме разности, а не как некоторая $x_1 - x = h$ и поэтому не как сумма $x_1 = x + h$.

Вслед за этим Маркс дифференцирует уравнение а) (лл. 4—5) «алгебраически» (т. е. своим методом): он заменяет в нем сначала x на x_1 и соответственно y на y_1, почленно вычитает уравнение а) из полученного уравнения, в каждом двучлене выносит за скобки общие множители и преобразует затем множитель $(x_1^p - x^p)$ к виду

$$(x_1^p - x^p) = (x_1 - x)(x_1^{p-1} + x_1^{p-2}x + \ldots + x_1x^{p-2} + x^{p-1})$$

$(p = m,\ m-1,\ \ldots,\ 1)$, наконец, делит обе части равенства на $x_1 - x$, полагает $x_1 = x$ и получает в результате

$$\frac{0}{0}\left[\text{т. е. } \frac{dy}{dx}\right] = (m+1)x^m + (m+1)mx^{m-1}\frac{h}{1} +$$
$$+(m+1)m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \text{ и т. д.}$$

Обе части полученного равенства он делит затем на $(m+1)$, записывая при этом результат деления на левой стороне в виде $\frac{0}{0\times(m+1)}$. На этом л. 5 (стр. 5 в нумерации Маркса) заканчивается.

На л. 10 под заголовком: **«Ad. p. 5»** (**«К стр. 5»**) (т. е. в части V рукописи) Маркс возвращается к последнему обозначению, замечая: **«Um zu entgehen dem** $\boldsymbol{\frac{0}{0\times(m+1)}}$ **etc.»** (**«Чтобы избежать этого** $\boldsymbol{\frac{0}{0\times(m+1)}}$ **и т. д.»**). После этого он преобразует приведенное выше уравнение к виду

$$\text{A)}\ (m+1)\left(x^m+mx^{m-1}\frac{h}{1}+m(m-1)\,x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+\ldots+\right)=(m+1)\,(x+h)^m$$

и пишет, мотивируя сначала это преобразование:

Dies Binom $(x+h)^m$ (in seiner unentwickelten Form) und in seiner Entwicklungsreihe haben wir aber $(m+1)$-mal. Dieser Faktor $(m+1)$ ist die Nabelschnur, die es als abgeleitet von $(x+h)^{m+1}$..., als Nabelschnur den Faktor $(m+2)$ mit sich, wenn wir sie abgeleitet hätten aus $(x+h)^{m+2}$.

Streichen wir daher den Faktor $(m+1)$ weg in A), so erscheint das Binom $(x+h)^m$ ebenso selbständig, wie seine Ausgangsgleichung $(x+h)^{m+1}$, und wir erhalten:

Но этот бином $(x+h)^m$ (в его неразвернутой форме) и в его разложении в ряд повторяется у нас $(m+1)$ раз. Множитель $(m+1)$ есть пуповина, которая указывает на происхождение производной от $(x+h)^{m+1}$. Точно так же... как множитель $(m+2)$ указывал бы на происхождение производной от $(x+h)^{m+2}$.

Если в A) вычеркнуть множитель $(m+1)$, то бином $(x+h)^m$ выступит столь же самостоятельным, как его исходное уравнение $(x+h)^{m+1}$, и мы получим:

$$\text{B)}\ (x+h)^m=x^m+mx^{m-1}h+m(m-1)\,x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+$$
$$+m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+m(m-1)(m-2)(m-3)\,x^{m-4}\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Вставка к стр. 5, т. е. часть V, заканчивается словами:

Die Gleichung A) liefert uns $(m+1)$-mal das abgeleitete aus $(x+h)^{m+1}$ Binom $(x+h)^m$. Wir haben an einem Exemplar mehr als genug, also an B).

Уравнение A) дает нам $(m+1)$ раз бином $(x+h)^m$, выведенный из $(x+h)^{m+1}$. В качестве примера этого более чем достаточно; итак, перейдем к B).

Таким образом, ясно, что всю эту выкладку Маркс выполнил только для примера. В одном из дальнейших добавлений он пишет, что выполнил ее для того, чтобы получить разложение для $(x+h)^m$ с помощью дифференцирования. хотя в таком случае теорема о биноме Ньютона все равно предполагается уже доказанной, и притом для $(x+h)$ в степени $m+1$.

На стр. 6 своей рукописи Маркс переходит к следующему анализу полученного им уравнения:

Diese Gleichung im m-ten Grad steht einen Grad niedriger als die Gleichung im $m+1$-ten Grad, aus der sie abgeleitet. Nichtsdestoweniger können wir das y *oder* $f(x)$ in y_1 *oder* $f(x_1)$ verwandeln, ohne ein Haar im algebraischen Bestand der Gleichung zu ändern. Wir haben dazu nur

1) $x^m = f(x)$ zu setzen oder $= y$, und wir sind hier um so mehr dazu berechtigt, da wir sobald nach Ableitung von x^m aus x^{m+1} alle folgenden Funktionen erst direkt aus x^m, dann sukzessiv auseinander, also alle als *sukzessiv* aus x^m abgeleitete Funktionen dargestellt haben;

2) h, das in der Ableitung unserer Gleichung eine gewöhnliche konstante Grösse war, wie das a im $(x+a)^m$ der Algebra, als *Inkrement* (positives oder negatives) von x zu betrachten. Auch dazu sind wir berechtigt, da $x_1 - x = \Delta x$ und dies Δx selbst, statt wir in unserem Verfahren als blosses Symbol oder blosses Zeichen für die Differenz x, d. h. für $x_1 - x$, zu dienen, auch behandelt werden kann als der Grössenwert der Differenz $x_1 - x$, der ebenso unbestimmt ist wie $x_1 - x$ und mit seinem Wechsel wechselt. Also $x_1 - x = \Delta x$ oder $=$ der unbestimmten Grösse h. Es folgt daher, dass $x_1 = x + h$ und $f(x_1)$ oder y_1 sich verwandelt in $f(x+h)$.

Это уравнение m-й степени на одну степень ниже уравнения степени $m+1$, из которого оно выведено. Тем не менее мы можем преобразовать y *или* $f(x)$ в y_1 *или* $f(x_1)$, ни на волос не изменив алгебраический состав уравнения. Для этого достаточно

1) положить $x^m = f(x)$ или $= y$, и это здесь тем более оправдано, что тотчас же вслед за выводом x^m из x^{m+1} мы представили все последующие функции как выведенные сначала прямо из x^m, а затем последовательно одна из другой — значит, все как *последовательно* выведенные из x^m;

2) рассматривать h, которое в выводе нашего уравнения было обыкновенной постоянной величиной, такой, как a в $(x+a)^m$ в алгебре, как *приращение* (положительное или отрицательное) от x. Это мы тоже вправе сделать, так как $x_1 - x = \Delta x$, и само это Δx, вместо того чтобы служить, как в нашем способе, простым символом или простым знаком для разности x-ов, т. е. для $x_1 - x$, может трактоваться так же, как величина разности $x_1 - x$, столь же неопределенная, как $x_1 - x$, и изменяющаяся при ее (этой величины) изменении. Итак, $x_1 - x = \Delta x$ или $=$ неопределенной величине h. Отсюда следует, что $x_1 = x + h$, и $f(x_1)$ или y_1 превращается в $f(x+h)$.

Wir erhalten also: $f(x) = x^m$,

Итак, получаем: $f(x) = x^m$,

A) $f(x+h) \underset{\text{или}}{\overset{\text{oder}}{}} y_1 = (x+h)^m =$

$$= x^m + mx^{m-1}h + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots *$$

Betrachten wir jetzt beide Seiten der Gleichung, so zeigt uns die erste, dass x^m oder $f(x)$ zu $(x+h)^m$ oder $f(x_1) = f(x+h)$ geworden ist, weil x um h gewachsen; so ist aus dem Monom x^m das Binom $(x+h)^m$ geworden, das aber jetzt als Ausdruck der Variation von x^m auftritt, nicht wie im gewöhnlichen Binom $(x+a)^m$ als Ausdruck der potenzierten Summe zweier Konstanten. Soweit der *allgemeine*, *unentwickelte Ausdruck* $(x+h)^m$ oder $f(x+h) = y_1$.

In dem entwickelten Ausdruck der Entfaltungsreihe auf der rechten Seite—ist das erste Glied x^m nicht mehr wie im binomischen Theorem das erste Glied des Binoms $(x+h)^m$ in seiner höchsten Potenz; es ist $f(x)$, da $y = x^m$, und die sämtlichen anderen Glieder stellen nur den Zuwachs dar, den $f(x)$ oder y oder x^m durch den Zuwachs x um h erhalten.

Если мы теперь рассмотрим обе стороны этого уравнения, то первая покажет нам, что x^m или $f(x)$ обратилось в $(x+h)^m$ или в $f(x_1) = f(x+h)$, так как x возрос на h; так из монома x^m получился бином $(x+h)^m$, который, однако, теперь выступает как выражение вариации x^m, а не как в обыкновенном биноме $(x+a)^m$ в качестве выражения возведенной в степень суммы двух постоянных. Это можно сказать об *общем*, *неразвернутом выражении* $(x+h)^m$ или $f(x+h) = y_1$.

В развернутом выражении разложения на правой стороне первый член x^m не является уже, как в биномиальной теореме, просто наивысшей степенью первого члена бинома $(x+h)^m$; он есть $f(x)$, так как $y = x^m$, а все остальные члены вместе представляют только приращение, которое получило $f(x)$, или y, или x^m при возрастании x на h.

Вслед за этим Маркс еще раз доказывает, что в данном случае первый член разложения $f(x+h)$ есть $f(x)$ или y (в данном случае x^m). После этого он пишет (л. 7):

Die Gleichung A) daher auch schreibbar:

Поэтому уравнение A) можно еще писать так:

B) $f(x+h) = y_1 =$

$$= y + mx^{m-1}h + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

* Это почти дословно повторено дважды; так как в первый раз Маркс не обозначает полученное уравнение буквой A) (для ссылок в дальнейшем), то здесь приводится только повторение.— *Ред.*

Wir hatten alle diese vorbereitenden Umschweife nötig, weil in unserer Methode y_1 nicht als Summe sich darstellt von $f(x)+$ ihren abgeleiteten Gliedern, sondern umgekehrt, als Differenzen von $f(x_1)$ und $f(x)$ allgemein ausgedrückt durch $y_1 = A(x_1^m - x^m)$, wo A beliebige Konstante darstellen kann[169].

Die eigentliche Differentialmethode dagegen geht aus von $x_1 - x = h$ (i. e. $= \Delta x$); hence $x_1 = x + h$; x_1 figuriert daher von vornherein als $x + h$, d.h. als ein Binom vom ersten Grad, da $x + h = (x + h)^1$, weswegen auch der Differentialausdruck hiervon $(x + dx)$. Mit Ausnahme der Funktion *in* x vom ersten Grad sind daher für alle anderen Funktionen *in* x, sobald x um h wächst, *Binome* vom zweiten Grad an gerechnet, und die Entwicklung selbst besteht in der Anwendung des binomischen Theorems[170].

Hier also selbstverständlich, dass das erste Glied der Entwicklungsreihe, also der binomischen Entwicklung, $= f(x)$ oder y ist, alle anderen Glieder = dem Zuwachs, den diese Funktion dadurch erhielt, dass x zu $x + h$ wurde, und dass also der glückliche Ausdruck der allgemeinen Formel des Binoms $(x + h)^m$ sich sofort darstellt *in Form der Gleichung* B).

Все эти предварительные выкрутасы понадобились нам потому, что в нашем методе y_1 представляется не как сумма $f(x)+$ ее производные члены, а, наоборот, как разности между $f(x_1)$ и $f(x)$, выраженные вообще через $y_1 = A(x_1^m - x^m)$, где A может представлять произвольную постоянную[169].

Собственно же дифференциальный метод исходит из $x_1 - x = h$ (т. е. $= \Delta x$); следовательно, $x_1 = x + h$; x_1 фигурирует поэтому с самого начала как $x + h$, т. е. как бином первой степени, так как $x+h = (x+h)^1$, вследствие чего и дифференциальное выражение его есть $(x + dx)$. За исключением функции *в* x первой степени, для всех остальных функций *в* x, коль скоро x возрастает на h, вычисляются поэтому степени *биномов*, начиная со второй, и самое разложение состоит в применении биномиальной теоремы[170].

Здесь, следовательно, само собой разумеется, что первый член ряда, т. е. биномиального разложения, равен $f(x)$ или y, все же остальные члены равны приращению, которое эта функция получила благодаря тому, что x обратился в $x + h$ и что, следовательно, счастливое выражение для общей формулы бинома $(x+h)^m$ тотчас же представляется *в виде уравнения* B).

То обстоятельство, что теорема о биноме Ньютона для $(x + h)^m$ хотя и была получена с помощью дифференцирования, однако лишь в предположении верности этой же теоремы для $(x + h)^{m+1}$, естественно, не нравится Марксу, и он делает попытку освободиться от этого допущения. Началом этой попытки является нижняя половина страницы 7 (часть III в нашем перечислении). Ниже это начало приводится полностью (л. 7).

Die ganze Sache besser so anzufangen:

Все это лучше начать так:

I

Sei gegeben:

Пусть дано:

$$f(x)=x^6,\quad f(x_1)=x_1^6.$$

Wir zeigten früher (sieh erstes Manuskript [171]), dass wenn $f(x)=x^m$, $f(x_1)=x_1^m$, [so]

Мы показали ранее (см. первую рукопись [171]), что если $f(x)=x^m$, $f(x_1)=x_1^m$, [то]

$$y_1-y=f(x_1)-f(x)=x_1^m-x^m=$$
$$=(x_1-x)(x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x+x_1^{m-3}x^2+x_1^{m-4}x^3+$$
$$+\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{bis zum } m\text{-ten Glied}}{\text{до } m\text{-го члена}}\ x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Dividieren wir nun durch (x_1-x), so

Разделив это на (x_1-x), получим

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{oder}}{\text{или}}\ \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=(x_1^{m-1}+\ldots+x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Wird nun $x_1=x$, also $x_1-x=0$, so

Полагая $x_1=x$, следовательно, $x_1-x=0$, получаем

$$\frac{dy}{dx}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{oder}}{\text{или}}\ \frac{(f(x_1)-f(x))}{(x_1-x)}=mx^{m-1}.$$

Was für die erste *Abgeleitete* von x^m, gilt für alle späteren. Sie werden alle durch *dieselbe Methode* gefunden, die auf dem *algebraischen* Satz beruht, dass, wenn wir eine Differenz von der Form x^m-a^m haben, selber stets dividierbar durch $x-a$, also stets darstellbar als $(x-a)P$.

(Fortsetzung p. 11ª.)

Так же, как была получена первая *производная* от x^m, можно получить и все дальнейшие. Все они находятся *одним и тем же методом*, основанным на *алгебраическом* предложении, что разность вида x^m-a^m всегда делится на $x-a$ и, следовательно, всегда может быть представлена как $(x-a)P$.

(Продолжение на стр. 11ª.)

В содержании следующей за этим части VII (в нашем перечислении (лл. 19—23)) трудно разобраться. Ясно только, что, отыскав последовательные производные y', y'', ... от $y=x^m$, Маркс хотел как-то обосновать необходимость: 1) умножить соответственно y, y', y'', ... на h^0, h^1, h^2, ..., 2) поделить полученные произведения, начиная с $y'h$, на 1, $1\cdot2$, $1\cdot2\cdot3$. ... соответственно,

3) сложить, наконец, все эти частные,— чтобы таким образом получить разложение для $(x+h)^m$, не опираясь на теорему о биноме Ньютона. Но осуществить это намерение Марксу не удалось [172], и он отказался в дальнейшем от обоих вариантов намечавшегося им добавления к стр. 1. Ниже поэтому приводятся только те места из части VII, которые представляют самостоятельный интерес.

Первое из них относится к Марксову обоснованию того, что при m целом и положительном $(x+h)^m$ должно быть разложимо в ряд по степеням h. Маркс мотивирует это (л. 20) так:

Wir wissen aus der Algebra, dass im Binom $(x+h)^m$ ($=(a+c)^m$ z. B., wo m ganze positive Potenz anzeigt) die Ausdrücke in x das letzte Glied des Binoms, hier h, in aufsteigenden Potenzen zu Faktoren haben, [da]

Мы знаем из алгебры, что в биноме $(x+h)^m$ ($=(a+c)^m$, например, где m — целый положительный показатель степени) выражения в x имеют в качестве множителей последний член бинома, здесь h, в возрастающих степенях, [так как]

$$(x+h)^6 \underset{\text{[напр.]}}{\text{[z. B.] ist}} = (x+h)(x+h)(x+h)(x+h)(x+h)(x+h).$$

Ob nun hier x Variable oder die konstante Unbekannte der Algebra oder selbst eine Bekannte wie a in $(a+h)^6$ ist, stets wird das letzte, hier konstante Glied h in aussteigenden ganzen positiven Potenzen h^0 $(=1)$, h^1, h^2 etc. (unter den gegebenen Voraussetzungen) die Faktoren bilden der sukzessiven Ausdrücke [in x], die x als Konstante in der Algebra durch sukzessive Multiplikation mit sich selbst erhält, die Funktionen der Variablen x aber durch Differentiation vermittelter «Abgeleiteten».

Будет ли здесь x переменной, или неизвестной алгебраической постоянной, или даже известной наподобие a в $(a+h)^6$, последний, в данном случае постоянный, член h в возрастающих целых положительных степенях h^0 $(=1)$, h^1, h^2 и т. д. всегда будет (при данных условиях) образовывать множители последовательных выражений [в x], которые получаются для x, как постоянной в алгебре, при последовательном умножении на самое себя, но которые являются функциями переменной x при дифференцировании промежуточных «производных».

Приведем здесь также общее примечание Маркса о способах выражения изменения переменных в «алгебраическом» методе дифференцирования, помещенное Марксом на стр. 11^a в связи с вопросом о значении постоянной как слагаемого или множителя при таком дифференцировании (л. 19).

Notabene: h wird hier nicht nur beim Beginn als eine gewöhnliche *konstante Grösse* eingeführt,

Примечание: h вводится здесь не только в начале, как некоторая обыкновенная *постоянная*, wie etwa $(x+a)^6$, $(x+c)^6$, $(a+0)^6$, $(a+h)^6$ in der Algebra, sondern es muss stets *konstant* bleiben und kann wieder selbst Variable, noch zu einem Inkrement der Variablen auf Basis der hier gewählten algebraischen Methode der Differentiation [werden], da in derselben die Differenz der unabhängigen Variablen $x_1 - x$ (wie entsprechend die der abhängigen Variablen $y_1 - y$ oder $f(x_1) - f(x)$) stets in dieser ihrer ursprünglichen Form bleibt, also $x_1 - x$, wie $y_1 - y$ nie gleich einem Differenzwert, $= \Delta x$ oder h · gesetzt werden kann, also auch nie, wie $x_1 - x = \Delta x$ oder h, $x_1 = x + \Delta x$ oder $= x + h$, noch $y_1 - y = \Delta y$ oder k werden kann. Wenn wir für das Äquivalent der *vorläufig Abgeleiteten* $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ schreiben oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, so dies bei uns nur Zeichen für die unbestimmten $x_1 - x$ und $y_1 - y$, aber nicht [fixierte] *Differenzwerte*, so dass $x_1 - x = \Delta x$, als Wert der unbestimmten Differenz, oder $y_1 - y = \Delta y$ als idem. In der Ableitung aus der $f(x)$ selbst figuriert das angewachsene x stets als x_1, andererseits das angewachsene y als y_1, können daher nicht gleichseitig figurieren als $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

как $(x+a)^6$, $(x+c)^6$, $(a+0)^6$, $(a+h)^6$ в алгебре; она должна всегда оставаться *постоянной* и, на основе принятого здесь алгебраического метода дифференцирования, не может ни сама быть переменной, ни быть приращением переменной, так как в этом методе дифференцирования разность независимых переменных $x_1 - x$ (соответственно зависимых переменных $y_1 - y$ или $f(x_1) - f(x)$) остается всегда в этой ее первоначальной форме и, следовательно, $x_1 - x$, как и $y_1 - y$, никогда не может быть положена равной некоторому значению разности, равному Δx или h, а следовательно, и никогда не может быть представлена в виде $x_1 - x = \Delta x$ или h, $x_1 = x + \Delta x$ или $= x + h$, ни $y_1 - y$ не может стать равной Δy или k. Если для эквивалента *предварительной производной* мы пишем $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то это у нас только знаки для неопределенных $x_1 - x$ и $y_1 - y$, а не [фиксированные] *значения разности*, так что $x_1 - x$ равно Δx, как значению неопределенной разности, или $y_1 - y$ равно Δy, как такому же. Во всем выводе [производной] из $f(x)$ наращенное x всегда фигурирует как x_1 и, с другой стороны, наращенное y — как y_1, они не могут поэтому одновременно фигурировать как $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

Отказавшись от обоих вариантов добавления к стр. 1, Маркс решил обосновать переход от «алгебраической» формы теоремы о биноме Ньютона к ее «дифференциальной» форме по-другому. Этому посвящена следующая (восьмая в нашем перечислении) часть рукописи, которая приводится ниже почти полностью.

Здесь Маркс начинает с того, что под заголовком: **«Eingang zu Seite 1 (Taylorsche Theorem)»** (**«Вступление к стр. 1; теорема Тейлора»**) приводит формулу

I) y_1 или $f(x+h)=(x+h)^m=x^m+mx^{m-1}\frac{h}{1}+$

$$+m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+x^{m-m}h^m,$$

о которой несколькими строками ниже пишет (л. 23):

Als selbständig auftretend sub I) $y_1=x^m+$ etc. können wir sie prima facie als gewöhnlichen algebraischen Ausdruck eines Binoms einfachster Form $(x+h)^m=x^m+$ etc. nehmen, und zwar eines solchen Binoms von ganzer und positiver Potenz, denn dies wurde von Anfang an für den Potenz—Exponent m vorausgesetzt. Wir nehmen sie zunächst in dieser Form als Übergangspunkt zu der Differentialmethode, wo $x_1-x=h$ gesetzt ⟦also auch $y_1-y=k$, soweit dies passt⟧, also auch $x_1=x+h$. Sie bietet uns die Gelegenheit, direkt aus der bisher angewandten Methode, wo x_1-x, y_1-y nur in dieser ihrer universellen Form als Differenzen auftreten und wo ebenfalls auf der rechten Seite der Gleichung x, sobald es wächst, nur als x_1, also in derselben unbestimmten Form wie die ursprüngliche x auftritt, und nie zu $x_1=x+\Delta x$ oder $x+h$ wird, [zu der Differentialmethode überzugehen]. Man würde sich aber irren, wenn man glaubte umgekehrt verfahren zu können

Рассматривая sub I) уравнение $y_1=x^m+$ и т. д. как самостоятельно выступающее, мы можем прежде всего принять его за обыкновенное алгебраическое выражение бинома простейшей формы $(x+h)^m=x^m+$ и т. д., и к тому же именно в целой и положительной степени, как это и предполагалось с самого начала для показателя степени m. Мы берем его сначала в этой форме в качестве переходного пункта к дифференциальному методу, где полагается $x_1-x=h$ ⟦следовательно, и $y_1-y=k$, если это подходит⟧, а значит, и $x_1=x+h$. Это дает нам возможность прямо [перейти к дифференциальному методу] от до сих пор применявшегося метода, где x_1-x, y_1-y выступают только в этой их универсальной форме разностей и где также x на правой стороне уравнения, коль скоро она возрастает, выступает только как x_1, т. е. в той же неопределенной форме, как и первоначальная x, и никогда не превращается в $x_1=x+\Delta x$ или $x+h$. Но было бы ошибкой думать, что можно und dadurch, dass man h wieder $= x_1 - x$ setzen, aus der Differentialmethode in unsere übergehen zu können.

действовать и обратным путем, т. е. полагая, наоборот, h равным $x_1 - x$, перейти от дифференциального метода к нашему.

Весь остальной текст части VIII в нашем перечислении приводится далее полностью (лл. 24—25).

$$\begin{matrix}\text{I)}\\ \text{a)}\end{matrix}\left\{\begin{aligned}&(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 5\cdot 4x^3\frac{h^2}{1\cdot 2} + 5\cdot 4\cdot 3x^2\,\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} +\\ &\qquad\qquad\qquad + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x\,\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + h^5.\end{aligned}\right.$$

Dies ist eine gewöhnliche algebraische Gleichung; einerseits der unentwickelte allgemeine Ausdruck des Binoms zweier Konstanten x und h auf der linken Seite, nämlich $(x+h)^5$; andererseits die Entwicklungsreihe, geliefert durch das binomische Theorem auf der rechten. Setzen wir im allgemeinen Ausdruck $(x+h)^5$ $h = 0$, so erhalten wir statt $(x+h)^5 = (x+0)^5 = x^5$. Betrachten wir jetzt x als variabel, so ist x^5 eine bestimmte Funktion *in* x, also $= f(x)$, x^5 ist aber auch eine Funktion *von* x, dann mit der Variation von x wechselt der Wert der $f(x)$; sofern wir nun die Funktion so als von x abhängige Funktion betrachten, nennen wir sie y; und $f(x)$, soweit es im Sinn dieser Abhängigkeit genommen, ist gleichbedeutend mit y. Andererseits wird $(x+h)^5$, da $x^5 = f(x)$, zu $f(x+h)$ oder y_1.

Wir erhalten also statt I)a):

Это — обыкновенное алгебраическое уравнение: с одной стороны, неразвернутое общее выражение бинома из двух постоянных x и h на левой стороне, именно $(x+h)^5$; с другой стороны, разложение в ряд, доставленное теоремой о биноме на правой стороне. Если в общем выражении $(x+h)^5$ мы положим $h = 0$, то вместо $(x+h)^5$ получим $(x+0)^5 = x^5$. Если мы будем рассматривать теперь x как переменную, то x^5 будет определенной функцией *в* x, именно $f(x)$, но x^5 есть также функция *от* x, потому что с изменением x меняется и значение $f(x)$; рассматривая, таким образом, теперь эту функцию как функцию, зависящую от x, мы называем ее y; и выражение $f(x)$, когда оно берется в смысле этой зависимости, равнозначно с y. С другой стороны, так как $x^5 = f(x)$, то $(x+h)^5$ превращается в $f(x+h)$ или y_1.

Итак, вместо I)a) получаем:

$$y \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \textbf{или}\end{matrix}\ f(x) = x^5,$$

$$y_1 \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x+h) = (x+h)^5 =$$

$$= x^5 + 5x^4h + 5\cdot 4\ x^3\frac{h^2}{1\cdot 2} + 5\cdot 4\cdot 3x^2\,\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + h^5.$$

Setzen wir wieder $h = 0$, so wird diese Reihe reduziert auf x^5, auf der linken Seite aber $f(x + h)$ auf $f(x)$ oder y_1 auf y. Wir haben daher y oder $f(x) = x^5$. Setzen wir diesen Wert von x^5 in die Gleichung I)a), so wird sie zu Gleichung b) * [siehe unten]. Das erste Glied der gewöhnlichen binomischen Entwicklungsreihe zweier Konstanten bleibt auf seinem Platz als erstes Glied, aber es hat total seinen Charakter verändert. Es ist nicht mehr erstes Glied [der Entwicklung] des ordinären Binoms $(x + h)^5$, sondern die ursprüngliche Funktion der Variablen x — nämlich x^5—, bevor sie zu $f(x + h)$ wurde, also auch x^5 zu $(x + h)^5$ wurde.

Die Gleichung wird also jetzt:

Если мы снова положим $h = 0$, то этот ряд сведется к x^5, на левой же стороне $f(x + h)$ сведется к $f(x)$ или y_1 к y. Поэтому мы имеем: y или $f(x) = x^5$. Если это значение от x^5 мы подставим в уравнение I)a), то оно превратится в уравнение b) * [см. ниже]. Первый член ряда в обыкновенном биномиальном разложении двух постоянных остается на своем месте первого члена, но он совершенно меняет свой характер. Это уже не первый член [разложения] обыкновенного бинома $(x + h)^5$, а первообразная функция переменной x — именно x^5 — до того, как она обратилась в $f(x + h)$, а следовательно, и x^5 обратилась в $(x + h)^5$.

Итак, уравнение теперь имеет вид:

$$\text{b)}\ y_1 \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x+h) = y \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x) + \Big(5x^4h + 5\cdot 4x^3\frac{h^2}{1\cdot 2} + \\ + 5\cdot 4\cdot 3x^2\,\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x\,\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + h^5\Big).$$

Andererseits folgt aus b):

С другой стороны, из b) следует:

$$\text{c)}\ y_1 - y \ \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x+h) - f(x) = 5x^4h + 5\cdot 4x^3\,\frac{h^2}{1\cdot 2} + \\ + 5\cdot 4\cdot 3x^2\,\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x\,\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + h^5.$$

Also gleich mit dem ersten Schlag, wodurch das erste Glied x^5 in $f(x)$ verwandelt ward, wird die ganze übrige Reihe des Binoms von ihrem zweiten Glied an zu einer Reihe abgeleiteter Funktionen in x.

Таким образом, тем же ударом, обратившим первый член x^5 в $f(x)$, весь остальной ряд бинома, начиная с его второго члена, был обращен в ряд членов, построенных из последовательных производных функций в x.

* После «b)» в рукописи было написано сначала: «(Sieh die entgegenstehende Seite)» («См. противоположную страницу»). Часть этой фразы зачеркнута.— *Ред.*

Die h, h^2, h^3 etc., welche als Faktoren diese «abgeleiteten» Funktionen behaften, sind jetzt, da $x_1 - x = h$ oder $x_1 = x + h$, aus den zweiten Gliedern des gewöhnlichen Binoms $(x + h)^5$ verwandelt in die verschiedenen Potenzen der Differenz zwischen den Variablen x_1 und x oder zwischen $(x + h)$ und x, denn $((x + h) - x) = h$ — eine Differenz, dadurch entstanden, dass die variable Grösse x zu x_1 oder $x + h$ wuchs. Die *ganze Reihe* ist also jetzt *die Differenz zwischen der Originalfunktion in* x *und der Funktion des zu* $(x + h)$ *angewachsenen* x. Diese Differenz kann auch positiv ausgedrückt werden als das Inkrement, welches die Originalfunktion in x erhalten durch das Wachstum von x zu x_1 oder zu $x + h$.

Durch ein sehr einfaches Manöver hat sich also die *Gesamtentwicklungsreihe von* $(x + h)^5$ in

a) aus dem binomischen Ausdruck zweier konstanten Grössen verwandelt in eine Reihe, deren erstes Glied die Originalfunktion der Variablen x [ist] und deren sämtliche anderen Glieder die Summe der Inkremente, welche diese Originalfunktion erhielt dadurch dass sie aus $f(x)$ zu $f(x + h)$ wurde. Jene Inkremente sind also alle aus ihrer Bewegung entsprungen, nicht als Entwicklungsglieder eines gewöhnlichen algebraischen Binoms. Es folgt daher (sieh oben) Gleichung c).

[b)] Die Setzung von $h = 0$ hat uns aber nicht nur gedient

Все h, h^2, h^3 и т. д., которые в качестве множителей сопровождают эти «производные» функции, превращаются теперь, так как $x_1 - x = h$, или $x_1 = x + h$, из вторых членов обыкновенного бинома $(x + h)^5$ в различные степени разности между переменными x_1 и x или между $(x + h)$ и x, потому что $((x + h) - x) = h$ есть разность, возникшая вследствие того, что переменная величина x возросла до x_1 или $x + h$. Таким образом, *весь ряд* есть теперь *разность между первообразной функцией в* x *и функцией* x, *возросшей до* $(x + h)$. Эта разность может быть и положительно выражена как приращение, которое первообразная функция в x получила при возрастании x до x_1 или $x + h$.

Таким образом, благодаря некоему весьма простому маневру *весь ряд разложения для* $(x + h)^5$

а) из биномиального выражения двух постоянных величин превратился в ряд, первым членом которого является первообразная функция переменной x, а все остальные члены — сумма приращений, полученных этой первообразной функцией благодаря тому, что из $f(x)$ она обратилась в $f(x + h)$. Все эти приращения возникли, следовательно, из ее движения, а не как члены разложения обыкновенного алгебраического бинома. Отсюда следует (см. выше) уравнение с).

[b)] Полагание $h = 0$ послужило нам, однако, не только zur Metamorphose eines gewöhnlichen Binoms zweier Konstanten in Entwicklung der Funktion einer Variablen x, sobald letztere wächst. Sie zeigt uns auch von vornherein *die Methode*, die anzuwenden, einerseits um die bereits fix und fertig enthaltenen sukzessiv abgeleiteten Funktionen in x loszuwickeln von der Entwicklung, worin sie in der Reihe existieren, andererseits die ihnen entsprechenden symbolischen Differentialkoeffizienten zu produzieren.

A) Das erste Glied der Reihe, x^5, wurde setzbar $= f(x)$, 1) weil es selbst zum Faktor $h^0 = 1$ hat, also von Haus aus vom Faktor h frei war; 2) weil durch das Setzen von $h = 0$ alle anderen Glieder vorläufig aus dem Weg geräumt und so die ganze Reihe auf x^5 reduziert wurde. Damit also die abgeleiteten Funktionen $5x^4$, $5 \cdot 4x^3$ etc., in analoge Position wie x^5 kommen, sind sie 1) sukzessiv vom Faktor h, h^2 zu befreien, was nur möglich vermittelst sukzessiver Division mit h; 2) sobald eine «Abgeleitete» so frei von h geworden, also als «abgeleitete» Funktion losgewickelt ist, muss wie beim ersten Glied $h = 0$ gesetzt, d. h. alle ihre Nebenglieder vorläufig aus dem Weg geschafft und die ganze Reihe auf die freigesetzte «Abgeleitete» reduziert werden, wie vorher beim ersten Glied [173].

для превращения обыкновенного бинома двух постоянных в разложение функции одной переменной x, когда эта переменная возрастает. Оно указывает нам также с самого начала *метод*, который следует применить для того, чтобы, с одной стороны, высвободить содержащиеся уже в готовом виде последовательные производные функции в x из окружения, в котором они находятся в ряде разложения, а с другой стороны, породить соответствующие им дифференциальные коэффициенты.

A) Первый член ряда, т. е. x^5, оказалось возможным положить равным $f(x)$, потому что 1) он и сам по себе имеет множителем $h^0 = 1$, т. е. свободен от h; 2) полагание $h = 0$ уже устранило все остальные члены и, таким образом, весь ряд свелся к x^5. Поэтому для того, чтобы производные функции $5x^4$, $5 \cdot 4x^3$ и т. д. оказались в положении, аналогичном x^5, их нужно 1) последовательно освободить от множителей h, h^2 и т. д., что возможно только последовательным делением на h; 2) после того как «производная» освободится от h, т. е. окажется высвобожденной как «производная» функция, нужно, как это было с первым членом, положить $h = 0$, т. е. попутно предварительно убрать с пути все ее побочные члены, и весь ряд будет сведен к высвобожденной «производной», как это уже было с первым членом [173].

B) Das Setzen von $h=0$, verwandelte in der Operation mit dem ersten Glied der Reihe die linke Seite aus $f(x+h)$ oder y_1 in $f(x+0)$ oder y, i. e. in $f(x)$. Da aber die *abgeleiteten Funktionen* nur durch Division mit h ihrer Faktoren in h sich entledigen können, so produziert diese Division jetzt auf der linken Seite

B) Полагание $h=0$ в операции с первым членом ряда превратило левую сторону из $f(x+h)$ или y_1 в $f(x+0)$ или y, иными словами, в $f(x)$. Но так как *производные функции* могут освободиться от своих множителей h только путем деления на h, то в результате этого деления на левой стороне получается

$$\frac{y_1-y}{h}\left(=\frac{y_1-y}{x_1-x}\right) \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Sobald also das h auf der rechten Seite in 0 verwandelt, um die ganze Reihe auf eine freigewordene «Abgeleitete» zu reduzieren, wird notwendig die linke Seite

Когда, следовательно, h на правой стороне обращается в нуль для того, чтобы свести весь ряд к высвобожденной «производной», то левая сторона неизбежно принимает вид

$$\frac{y_1-y}{0}=\frac{0}{0} \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} \frac{f(x+0)-f(x)}{0}=\frac{0}{0}=\frac{dy}{dx}.$$

Die Setzung von $h=0$, produziert also auf der linken Seite den symbolischen Differentialkoeffizienten der «abgeleiteten» Funktion *in* x.

Es ist also jetzt *bewiesen*, dass die erste Operation zur Herstellung des ersten Glieds der Reihe $=f(x)$ oder y, zweierlei mit einem Schlag liefert:

1) die Verwandlung des gewöhnlichen Binoms $(x+h)^5=x^5+\text{etc.}$ in $f(x+h)=f(x)+$ einer Reihe von $f(x)$ abgeleiteten Funktionen, behaftet mit den Faktoren h, h^2 etc., d. h. behaftet mit den Potenzen des Inkrements, welches die unabhängige Variable x erhält, wenn sie aus x zu x_1 wird, also $h=x_1-x$ als ihr Inkrement erhält.

Таким образом, полагание $h=0$ порождает на левой стороне символический дифференциальный коэффициент «производной» функции *в* x.

Теперь, следовательно, *доказано*, что первая операция, посредством которой устанавливается, что первый член ряда равен $f(x)$ или y, дает сразу две вещи:

1) превращение обыкновенного бинома $(x+h)^5=x^5+$ + и т. д. в $f(x+h)=f(x)+$ ряд выведенных из $f(x)$ функций с множителями h, h^2 и т. д., т. е. со степенями приращения, которое получает независимая переменная x, когда из x она обращается в x_1, т. е. получает приращение $h=x_1-x$;

2) Die *Methode*, welche die bereits fix und fertig (tatsächlich produziert vermittelst der Entwicklung eines ordinären Binoms zweier Konstanten x und h) vorhandenen «abgeleiteten» Funktionen in x als solche *freisetzt* und zugleich ihren *symbolischen Differentialausdruck* ihnen gegenübersetzt.

Wir können also jetzt wieder ans Geschäft gehen.

2) *метод*, который *высвобождает* уже готовые «производные» функции в x, как таковые (в действительности полученные посредством разложения обыкновенного бинома двух постоянных x и h), и, наряду с этим, противопоставляет им их *символическое дифференциальное выражение*.

Таким образом, теперь мы можем снова вернуться к делу.

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{I})\\ \mathrm{a})\end{array}\right\{ \begin{array}{l}(x+h)^5=x^5+5x^4h+5\cdot4x^3\frac{h^2}{1\cdot2}+5\cdot4\cdot3x^2\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+5\cdot4\cdot3\cdot2x\frac{h^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+h^5.\end{array}$$

До сих пор в рукописи речь шла фактически только о другом способе представления теоремы о биноме Ньютона: о переводе ее с языка алгебры на язык дифференциального исчисления и, соответственно, о разложении $(x+h)^m$ (m — целое, положительное) в ряд по степеням h. Но теорема Тейлора даже в ее формулировке без остаточного члена верна для гораздо более широкого класса функций, переход к которому связан с переходом от конечного многочлена к бесконечному ряду. Вопрос об этом переходе обсуждается Марксом в следующем за «Вступлением», еще одном добавлении к стр. 1 рукописи, в котором он специально останавливается на трудностях, связанных с распространением полученного для $(x+h)^m$ (при m целом и положительном) разложения на более широкий класс функций. Ниже приводится все это добавление; с него начинается девятая (в нашем перечислении) (лл. 26—28) часть рукописи.

AD P. 1 (TAYLORSCHE THEOREM)

К СТР. 1 (ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА)

Wir haben die Ausgangsgleichung

Само исходное уравнение

$$1)\quad (x+h)^m=x^m+mx^{m-1}h+\ldots$$

selbst abgeleitet durch *Differentiation* aus der Gleichung

мы вывели путем *дифференцирования* из уравнения

$$(x+h)^{m+1}=x^{m+1}+(m+1)\,x^mh+\ldots$$

Aber so nahmen wir immer das *binomische Theorem* als gegebenen Ausgangspunkt: bloss nahmen wir das Binom $(x+h)$ im $(m+1)$-ten Grad zum Ausgangspunkt, um das Binom $(x+h)^m$ durch *Differentiation* zu finden,

Но таким образом мы приняли ту же *биномиальную теорему* за уже данный исходный пункт: мы просто взяли за исходный пункт [теорему о] биноме $(x+h)$ в степени $(m+1)$, чтобы путем *дифференцирования* полуdaher als einen durch Differentiation gegebenen Ausgangspunkt zu erhalten.

Und das *algebraische Binom* kennt überhaupt nur Binome von *bestimmtem Grad* algebraisch betrachtet, wo wir nur mit konstanten Grössen wirtschaften, ist $x+h$ selbst ein Binom von erstem Grad $=(x+h)^1$. Wir können die aus $(a+h)^m$ erhaltene Reihe beliebig verlängern und die Verlängerung durch $+$ $+$ etc. andeuten, wie auch in den Gleichungen 3) und 4) * geschieht, weil m eine algebraische Grösse von *unbestimmtem* Zahlenwert; aber dies hindert nicht die Endlichkeit der Reihe. Wir können sie auch schreiben mit Anfang und Ende:

чить ее для бинома $(x+h)^m$ так, чтобы она могла выступить как данный путем дифференцирования исходный пункт.

Но *алгебраическая* [теорема о] *биноме* относится только к биномам *определенной степени*. С точки зрения алгебры, оперирующей лишь постоянными величинами, $x+h$ сам по себе есть бином первой степени $=(x+h)^1$. Ряд, полученный для $(a+h)^m$, мы можем сколько угодно продолжить и продление его обозначить через $+$, как это и происходит в уравнениях 3) и 4) *, потому что m есть алгебраическая величина с *неопределенным* числовым значением; но это не препятствует конечности ряда. Мы можем также написать его с началом и концом:

$$x^m+mx^{m-1}h+\ldots+mxh^{m-1}+h^m.$$

Das y_1 oder $f(x+h)$, dass wir für den Calculus anwenden, ist und bleibt hier nur ein Symbol für ein Binom $(x+h)$ von einem bestimmten Grad, wenn auch von jedem beliebigen Grad.

Wir haben also nur *formell* durch das Abbrechen mit $+$ etc. eine endlose Reihe, die in der Tat, wie abgebrochen, auch mit Anfang und Ende und mit Intervallen $+$ etc. in der Mitte darstellbar. Das ist aber nicht alles. Die Koeffizienten der Funktionen h^0 (oder 1), h^1, h^2, h^3 etc. zeigen, dass wir $(x+h)^m$ in ganzen, positiven, aufsteigenden

y_1 или $f(x+h)$, которое мы применяем в дифференциальном исчислении, есть и остается здесь лишь символом для бинома $(x+h)$ определенной, хотя и произвольной степени.

Таким образом, лишь *формально*, через обрыв с помощью $+$ и т. д., мы получаем бесконечный ряд, тогда как на самом деле он представим как в оборванном виде, так и с началом и концом и промежутками $+$ и т. д. в середине. Но это еще не все. Коэффициенты функций h^0 (или 1), h^1, h^2, h^3 и т. д. показывают, что мы представили $(x+h)^m$

* См. настоящее издание, стр. 513—514.

[Potenzen von h] dargestellt haben; wir haben also nicht nur das algebraische und daher notwendig in irgendeinem Grad gegebene Binom zu Grund gelegt, sondern selbst nur eine einseitige Form des binomischen Theorems. Ausserdem nicht zu vergessen, dass um h als blossen Faktor der Funktionen in x zu erhalten, wir die Form $(x + a)^m$ (denn h im algebraischen Binom eine Konstante wie a) gewählt haben, wo x erstes Glied und h letzten, statt der Form $(a + x)^m$, wo das Umgekehrte stattfindet.

Wir hätten zwar auch ausgehen können von einem Binom mit negativen oder fraktionellen Potenzen $-m$ oder $\frac{m}{n}$ und damit eine endlose Reihe erhalten.

Wir hätten aber abgesehen von anderen Einschränkungen, die sich später zeigen werden, wieder nur ein Binom von einem bestimmten Grad zu Grunde gelegt, denn $-m$, oder $\frac{m}{n}$ sind ebenso bestimmte Grade wie m. Die endlose Entwicklungsreihe selbst ist hier die Entwicklung eines allgemeinen Ausdrucks von bestimmtem Grad (wie $(x + h)^{-m}$, $(x + h)^{\frac{m}{n}}$), [von bestimmten,] wenn auch negativen oder fraktionellen [Grad].

Das y_1 oder $f(x + h)$, was wir erhalten, bleibt hier immer nur Symbol eines Binoms von irgendeinem Grad, positivem, nega-

разложенным по целым, положительным, возрастающим [степеням h]. Итак, мы положили в основу не только алгебраический и поэтому необходимо в какой-нибудь степени данный бином, но, собственно, лишь некоторую специальную форму биномиальной теоремы. Кроме того, не следует забывать, что для получения h просто как множителя при функциях в x, мы выбрали форму $(x+a)^m$ (так как h в алгебраическом биноме есть постоянная, аналогичная a), где x — первый член, а h — последний, вместо формы $(a + x)^m$, где имеет место обратное.

Мы, правда, могли бы исходить также из бинома с отрицательными или дробными степенями $-m$ или $\frac{m}{n}$ и тем самым получить бесконечный ряд.

Но и в этом случае, не говоря уже о других ограничениях, которые скажутся в дальнейшем, в основу кладется опять-таки только бином определенной степени, так как $-m$ или $\frac{m}{n}$ — такие же определенные степени, как и m. Бесконечный даже в этом случае ряд есть разложение некоторого общего выражения в определенной степени (как $(x+h)^{-m}$, $(x + h)^{\frac{m}{n}}$), [в определенной,] хотя и отрицательной или дробной [степени].

y_1 или $f(x + h)$, полученная нами, всегда остается здесь лишь символом бинома какой-либо степени: положительной, tivem oder fraktionellem; also auch die y_1 oder $f(x+h)$ entsprechende Entwicklungsreihe immer nur verallgemeinerter Ausdruck eines gradigen Binoms, in der Tat nur das *verallgemeinert ausgedrücktes Beispiel eines Binoms* von bestimmter algebraischer Form.

Diesem Misstand ist vielleicht zu entgehen. Wir können vielleicht die Beschränktheit des algebraischen Binoms abschütteln, wenn wir zu der algebraischen Methode der unbestimmten Koeffizienten flüchten. Zunächst bringen wir den Ausdruck in Gleichung 2) wieder auf seine ursprüngliche algebraische Form zurück, nämlich aus

отрицательной или дробной; а значит, и ряд, соответствующий такой y_1 или $f(x+h)$, при этом не что иное, как обобщенное выражение степени бинома, на самом деле только *обобщенно выраженный пример бинома* определенной алгебраической формы.

Этого недостатка, пожалуй, можно избежать. У нас имеется, быть может, возможность освободиться от этой ограниченности алгебраического бинома, прибегнув к алгебраическому методу неопределенных коэффициентов. Сначала приведем выражение в уравнении 2) обратно к его первоначальной алгебраической форме, именно от:

$$2)\quad f(x+h) \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y_1 = x^m + mx^{m-1}\frac{h}{1} + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

[auf] [перейдем к]

$$2a)\quad f(x+h) \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ y_1 = x^m + \left(\frac{m}{1}x^{m-1}\right)h + \left(\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}\right)h^2 + \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{m-3}\right)h^3 + \dots$$

Die Funktionen erscheinen hier nicht mehr als *ganze Funktionen* [174], sondern wie sie sich in der *binomischen Ableitung* ursprünglich darstellen, als

Функции уже не выступают здесь как *целые функции* [174], они представляются так, как это было первоначально в *биномиальном разложении*, как

$$x^m + mx^{m-1}h + \frac{1}{2}m(m-1)x^{m-2}h^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ \frac{1}{6}\right)m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 + \dots$$

und dies [oben] durch die Klammern angedeutet.

Nach dieser formellen Modifikation, wo h, h^2, h^3 etc. von ihren Nennern befreit und die Funk-

и это [выше] указано с помощью скобок.

После этой формальной модификации, состоящей в том, что h, h^2, h^3 и т. д. освобождаются tionen in x sich darstellen wie in ihrer ursprünglichen algebraischen Ableitung, wo nur das zweite Glied mx^{m-1} als ganze Funktion auftritt, das dritte als $^1/_2$ der ganzen Funktion $m(m-1)x^{m-2}$ usw., ersetzen wir nun die Funktionen von x durch unbestimmte Koeffizienten A, B, C etc., und wir erhalten in 3) (also auch für 4))

от их знаменателей и функции в x представляются в том виде, какой они имели в их первоначальном алгебраическом выводе, где только второй член mx^{m-1} выступает как целая функция, третий — как $^1/_2$ целой функции $m(m-1)x^{m-2}$ и т. д., мы заменяем функции от x неопределенными коэффициентами A, B, C и т. д. и получаем для 3) (а следовательно, и для 4))

$$f(x+h) \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}} \ y_1 = f(x) \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}} \ y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \ldots$$

Hier erscheinen A, B, C, D, E u. sf. als Funktionen von x (vergleich 2a)), die aber erst zu finden sind. Die Reihe an sich ist ausserdem, beliebig verlängerbar und während sie nicht mehr auf eine Reihe, deren Ende wie Anfang bestimmbar, reduziert werden kann, da wir beliebig fortschreiben können Fh^6, Gh^7 etc., etc., indem die numerischen Ableitungsverräter, die Koeffizienten $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ etc., unsichtbar geworden sind, mit den abgeleiteten Funktionen selbst in das unbestimmten Koeffizienten A, B, C, D, E, F etc., durch dies Manöver auf der rechten Seite, ist auf der linken $f(x+h)$ oder y_1 verwandelt aus einem Symbol eines algebraischen Binoms von irgendeinem Grad in den allgemeinen unentwickelten Ausdruck jener endlosen Reihe, die keinen Grad anzeigt, obgleich sie jeden Grad einschliesst.

Здесь A, B, C, D, E и т. д. выступают как функции от x (сравни 2a)), которые, однако, надо еще найти. Сам по себе ряд может быть, кроме того, сколь угодно продолжен. И он уже теперь не может быть сведен к ряду, конец которого так же поддается определению, как и начало, так как мы можем сколь угодно далеко писать еще Fh^6, Gh^7 и т. д., и т. д., делая невидимыми в неопределенных коэффициентах A, B, C, D, E, F и т. д., вместе с самими производными функциями, выдающие их происхождение числовые коэффициенты $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ и т. д. В то время как этот маневр осуществляется на правой стороне, на левой $f(x+h)$ или y_1 превращается из символа алгебраического бинома какой-нибудь степени в общее неразвернутое выражение этого бесконечного ряда, не имеющего никакой степени, хотя он и включает каждую степень.

$f(x)$ ist [eine] einer unbeschränkten Entwicklung fähige Funktion [einer] Variablen x; $(x+h)$ der allgemeine unentwickelte Ausdruck dieser Funktion [von] x, das aus x zu $x+h$ wird.

Ferner versteht es sich von selbst, mit Bezug auf Gleichung

$f(x)$ есть [некоторая] доступная бесконечному разложению функция [одной] переменной x; $f(x+h)$ — общее неразвернутое выражение этой функции [от] x, когда последнее из x обращается в $x+h$.

Далее, само собой разумеется по отношению к уравнению

$$3)\quad y_1 \ \overset{\text{oder}}{\underset{\text{или}}{}}\ f(x+h) = y + f'(x)\,h + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

dass für die Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$ [etc.] nicht mehr einfach, wie dies in Gleichung 4) geschieht, ihre symbolischen Äquivalente eingesetzt werden können, sondern dass diese erst durch Differentiation zu finden sind [175].

что для функций $f'(x)$, $f''(x)$ [и т. д.] уже нельзя так просто, как это происходит в уравнении 4), подставить их символические эквиваленты, но что последние еще должны быть найдены с помощью дифференцирования [175].

О том, что правомерность всего этого маневра отнюдь не представлялась Марксу само собою разумеющейся, свидетельствует с полной ясностью следующий за этим добавлением раздел рукописи, посвященный критике известных Марксу доказательств теорем Тейлора и Маклорена. Этот раздел начинается (л. 28) так:

DAS TAYLORSCHE THEOREM

ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА

Taylor's Ausgangsgleichung ist:

Исходное уравнение Тейлора таково:

$$\mathrm{I})\quad y_1 \ \overset{\text{oder}}{\underset{\text{или}}{}}\ f(x+h) = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \ldots$$

Um etwas mit dieser Gleichung anzufangen, ist es nötig, ein selbst wieder durch das Binom geliefertes Manöver anzuwenden, und zwar Anwendung des Binoms auf einen polynomischen Ausdruck desselben.

Чтобы получить возможность действовать с этим уравнением, нужно применить основанный на той же [теореме о] биноме маневр, состоящий в применении этой теоремы к полиномиальному выражению посредством представления его в виде бинома.

Haben wir z. B. $(x+a)^2$ und setzen statt desselben $(x+a+b)^2$, so können wir letzteres entwickeln als $((x+a)+b)^2$ oder als $(x+(a+b))^2$;

Возьмем для примера $(x+a)^2$ и вместо последнего напишем $(x+a+b)^2$. Это мы можем разложить: как $((x+a)+b)^2$ или как $(x+(a+b))^2$;

im ersten Fall erhalten wir:

в первом случае мы получим:

$$(x+a+b)^2=(x+a)^2+2(x+a)b+b^2;$$

im zweiten Fall:

во втором случае:

$$(x+a+b)^2=x^2+2x(a+b)+(a+b)^2.$$

In diesem Beispiel kommt es bloss darauf an, dass ein formeller, wenn auch durchsichtig nur formeller Unterschied zwischen den beiden rechten Seiten existiert; ihre Identität aber von vornherein bewiesen durch die Identität der linken Seiten.

В этом примере существенно то, что между обеими правыми сторонами имеется формальное, хотя и заведомо лишь формальное, различие; их идентичность, однако, с самого начала доказана идентичностью левых сторон.

Написав затем: **«Nun zur Sache»** (**«А теперь к делу»**), Маркс переходит к изложению доказательства теоремы Тейлора по Бушарла. Как мы уже знаем (см., например, Приложение, стр. 598—599), в учебнике Бушарла этому доказательству предшествует лемма (§§ 55, 56, стр. 34—36), утверждающая, что

$$\frac{df(x+h)}{dx}=\frac{df(x+h)}{dh}.$$

С этой леммы здесь и начинает Маркс. Изложив ее доказательство по Бушарла, Маркс замечает (л. 29): **«Die Sache wäre viel einfacher zu beweisen»** (**«Это можно было бы доказать гораздо проще»**).

Приводимое вслед за этим пояснение носит настолько черновой характер, что о ходе мысли Маркса здесь можно только догадываться. Одну из таких догадок мы и приведем.

Чтобы доказать равенство

$$\frac{df(x+h)}{dx}=\frac{df(x+h)}{dh}, \tag{*}$$

можно рассуждать так. Если мы дадим x наращенное значение x_1, то $x+h$ обратится в x_1+h, а $f(x+h)$ в $f(x_1+h)$, и мы будем иметь

$$\frac{\Delta f(x+h)}{\Delta x}=\frac{f(x_1+h)-f(x+h)}{x_1-x}=\frac{f(x_1+h)-f(x+h)}{(x_1+h)-(x+h)}.$$

Аналогично

$$\frac{\Delta f(x+h)}{\Delta h}=\frac{f(x+h_1)-f(x+h)}{h_1-h}=\frac{f(x+h_1)-f(x+h)}{(x+h_1)-(x+h)}.$$

Если теперь, чтобы облегчить рассуждение, мы заменим $x+h$ на z (этого сам Маркс не делает), то всегда будем иметь возможность представить наращенное значение z, т. е. z_1, как в виде x_1+h, так и в виде $x+h_1$. Оба отношения

$$\frac{f(x_1+h)-f(x+h)}{(x_1+h)-(x+h)} \quad \text{и} \quad \frac{f(x+h_1)-f(x+h)}{(x+h_1)-(x+h)}$$

могут быть представлены при этом в виде

$$\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z},$$

и оба будут равны одной и той же «предварительной» производной по z для $f(z)$ (т. е. для $f(x+h)$), если последняя существует. Справедливость равенства (*) отсюда следует очень просто.

Суть дела здесь опять-таки в том, что $z_1 - z$ может быть представлена как в виде $x_1 - x$, так и в виде $h_1 - h$, причем $x_1 - x = h_1 - h$.

О том, что эта догадка действительно соответствует мысли Маркса, можно судить по следующим его словам (л. 29):

Da wir zwei Ausdrücke für die aufgehobene Differenz $(x_1 - x)$ haben, nämlich $(x_1 - x)$ und $(h_1 - h)$ [...], so klar, dass diese zwei, nur formell verschiedenen Formen derselben aufgehobenen Differenz einander gleich sind [176].

Так как мы имеем два выражения для снятой разности $(x_1 - x)$, именно $(x_1 - x)$ и $(h_1 - h)$ [...], то ясно, что эти две лишь формально различные формы одной и той же снятой разности равны между собой [176].

Опущенное здесь пояснение, заключенное Марксом в скобки, содержит описку, устранить которую без какого-нибудь домысла не удается.

Аналогично Маркс поступает далее с основанным на этой лемме «доказательством» теоремы Тейлора по Бушарла: он сначала излагает это доказательство, а затем критикует его.

Доказательство Бушарла (см. § 57, стр. 36—37) состоит в том, что приведенное выше уравнение I) сначала дифференцируется по h и по x, что дает уравнения:

$$\text{II)}\quad \frac{dy_1}{dh} = A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 + 5Eh^4 + \ldots,$$

$$\text{III)}\quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h + \frac{dB}{dx}h^2 + \frac{dC}{dx}h^3 + \frac{dD}{dx}h^4 + \frac{dE}{dx}h^5 + \ldots;$$

ссылаясь на лемму, в силу которой $\frac{dy_1}{dh} = \frac{dy_1}{dx}$, Бушарла приравнивает затем коэффициенты при одинаковых степенях h в уравнениях II) и III) и получает таким образом теорему Тейлора в виде уравнения

$$\text{IV)}\quad y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Всю эту процедуру Маркс подвергает затем критике, которая гласит (л. 30):

Fragen wir uns nun, wodurch ist uns die Verwandlung von I), des durch indeterminate coefficients versteckten Ausdrucks des algebraischen Binoms einfachster Form $(x+h)^m$, in IV) gelungen?

Etwa durch das Kunststück, dass wir I) erst mit Bezug auf h differenziert und dann mit Bezug auf x, dass wir also für y_1 zwei Differentialgleichungen erhiel-

Спрашивается, каким образом удалось нам преобразовать I), замаскированную неопределенными коэффициентами формулу алгебраического бинома простейшего вида $(x+h)^m$, в IV)?

Уж не имел ли здесь решающего значения тот ловкий маневр, который состоял в том, что мы дифференцировали I) сначала по h, а затем по x и получили таким ten, deren [linke Seiten] allgemeine Ausdrücke $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy_1}{dh}$ identisch, deren respektive Entwicklungsreihen daher gleichwertig und daher in ihren einzelnen Gliedern gleichsetzbar sein müssen?

Keineswegs. Das Kriterium, welches uns anzeigt, *welche Funktionen von x in den beiden Gleichungen gleichsetzbar* sind, wird uns geliefert durch die Faktoren h^0 $(=1)$, h^1, h^2, h^3, h^4 etc. Diejenigen Funktionen, welche den Faktor h in derselben Potenz haben, sind allein *gleichsetzbar*; aber was hat uns diese, den ganzen Prozess bedingenden Faktoren h^0, h^1, h^2, h^3 etc. selbst geliefert?

Die Ausgangsgleichung I):

образом для y_1 два дифференциальных уравнения, общие выражения [левых сторон] которых $\frac{dy_1}{dx}$ и $\frac{dy_1}{dh}$ тождественны и соответствующие ряды разложения поэтому равнозначны, в силу чего их отдельные члены могут быть приравнены друг другу?

Отнюдь нет. Критерий, указывающий нам, *какие функции от x в обоих уравнениях могут быть приравнены*, дается нам множителями h^0 $(=1)$, h^1, h^2, h^3, h^4 и т. д. Могут быть *приравнены* только те функции, множителями которых являются одинаковые степени h; но откуда мы взяли сами эти, весь процесс обусловливающие, множители h^0, h^1, h^2, h^3 и т. д.?

Исходное уравнение I) таково:

$$\text{I)}\quad y_1 = yh^0 + Ah^1 + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \ldots$$

Wir haben zwar die aus dem Binom abgeleiteten Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. verkleidet in die *unbestimmten Koeffizienten* A, B, C, D, E etc., von denen wir uns jedoch erinnern dass sie überhaupt Funktionen von x sind, sonst könnten wir sie weder [nach] x noch [nach] h differenzieren — aber wir haben die Faktoren h^0, h^1, h^2, h^3 etc. in der waldursprünglichen Form, worin das binomische Theorem sie geliefert — in unsere Ausgangsgleichung mitgeholt und ohne dies Mitholen hätten wir mit den Kunststücken der zwei einander identischen, aber formverschie-

Мы переодели, правда, выведенные из бинома функции $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ и т. д. [в форму] *неопределенных коэффициентов* A, B, C, D, E и т. д. О последних мы помним, однако, что они вообще — функции от x, иначе мы не могли бы дифференцировать их ни [по] x, ни [по] h; но множители h^0, h^1, h^2, h^3 и т. д. мы захватили в наше уравнение в первобытно девственной форме, какими их дала нам теорема о биноме; а не прихвати мы их с собой в уравнение, никакими трюками с двумя тождественными, но различными по форме переводами уравнения I) в дифференциальную denen Übersetzungen von Gleichung I) in Differentialform keinen Hund vom Ofen gelockt.

форму мы никого не соблазнили бы.

Вслед за этим Маркс переходит к обсуждению попыток доказать методом неопределенных не только коэффициентов A, B, C, но и показателей степени α, β, γ, . . . при h, что h должно входить в разложение $f(x+h)$ в ряд по степеням h именно так, как это было предположено в уравнении I. Здесь он приводит доказательство теоремы Тейлора по Хайнду (см. Хайнд, § 74, стр. 83—84) и подвергает его критике. Поскольку критика Маркса требует знакомства с его трактовкой этого доказательства, изложение его в рукописи приводится ниже полностью (лл. 31—32).

Dies tritt noch schlagender hervor in den postumen Versuchen, der Differentialableitung aus I) eine Form zu geben, worin *auch die Potenzen von h durch Differentiation* gefunden *scheinen*, nicht nur die Funktionen von x. Hier nämlich geschrieben die Ausgangsgleichung:

Еще ярче бросается это в глаза в более поздних попытках придать дифференциальному выводу из I) такую форму, где бы не только функции от x, но *степени h казались* найденными *путем дифференцирования*. Именно здесь пишется исходное уравнение:

$$\text{Ia)}\quad y_1 = y + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + Dh^{\delta} + \ldots$$

Wir erhalten dann:

И мы получаем тогда:

$$1)\quad \frac{dy_1}{dh} = \alpha Ah^{\alpha-1} + \beta Bh^{\beta-1} + \gamma Ch^{\gamma-1} + \delta Dh^{\delta-1} + \ldots,$$

$$2)\quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h^{\alpha} + \frac{dB}{dx}h^{\beta} + \frac{dC}{dx}h^{\gamma} + \frac{dD}{dx}h^{\delta} + \ldots$$

Wir räsonieren dann: die zwei ersten Seiten von 1) und 2) sind gleich, also ihre Entwicklungsreihen gleichwertig, und ihre respektiven analogen Glieder gleichsetzbar; also in erster Instanz: $\alpha Ah^{\alpha-1} = \frac{dy}{dx}$. Da aber $\frac{dy}{dx}$ zu seinem Faktor 1 $(=h^0)$ [hat], so muss $h^{\alpha-1} = h^0$ sein, also $\alpha - 1 = 0$, also $\alpha = 1$.

Затем мы рассуждаем так: обе первые стороны 1) и 2) равны, следовательно, равнозначны и ряды их разложения и их соответствующие аналогичные члены могут быть приравнены; поэтому, прежде всего, $\alpha Ah^{\alpha-1} = \frac{dy}{dx}$. Но так как $\frac{dy}{dx}$ имеет множителем $1(=h^0)$, то $h^{\alpha-1}$ должно быть $=h^0$, и, следовательно, $\alpha - 1 = 0$, значит, $\alpha = 1$.

Wir haben damit drei Vögel mit einer Klappe geschlagen: 1) wissen wir jetzt, da $\alpha = 1$, dass in der Ausgangsgleichung

Таким образом, мы одним выстрелом убили трех зайцев: 1) так как $\alpha = 1$, то теперь мы знаем, что в исходном уравнении

$Ah^{\alpha} = Ah^1 = Ah$ ist; 2) sind uns darin *potentialiter* auch schon die Werte der unbestimmten Potenzen β, γ, δ etc. in h^{β}, h^{γ}, h^{δ} etc. gegeben; 3) ergibt sich, dass da $\alpha A h^{\alpha-1} = \frac{dy}{dx}$, also $\alpha A h^{\alpha-1} = 1 \cdot A h^{1-1} = A$, auch $A = \frac{dy}{dx}$ ist.

Die zweite Gleichung ist $\beta B h^{\beta-1} = \frac{dA}{dx} h^{\alpha}$. Also $h^{\beta-1} = h^{\alpha}$; also $\beta - 1 = \alpha$; da aber $\alpha = 1$, so $\beta - 1 = 1$, und folglich $\beta = 2$, $\beta B h^{\beta-1}$, also $= 2Bh^{2-1} = 2Bh$.

Wir wissen jetzt erstens, dass wir in der Ausgangsgleichung Ia) für Bh^{β} setzen können Bh^2; das ist also *abgeleitet*, nicht von vornherein unterstellt.

Zweitens aber wird $\beta B h^{\beta-1} = \frac{dA}{dx} h^{\alpha}$ zu $2Bh = \frac{dA}{dx} h$ (da $h^{\alpha} = h^1$), also $2B = \frac{dA}{dx}$, also $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{dA}{dx}$; setzen wir hierein den Wert von A, so

$Ah^{\alpha} = Ah^1 = Ah$; 2) тем самым *потенциально* нам уже даны и значения неопределенных показателей степеней β, γ, δ и т. д. в h^{β}, h^{γ}, h^{δ} и т. д.; 3) так как $\alpha A h^{\alpha-1} = \frac{dy}{dx}$, т. е. $\alpha A h^{\alpha-1} = 1 \cdot A h^{1-1} = A$, то и $A = \frac{dy}{dx}$.

Второе приравнивание таково: $\beta B h^{\beta-1} = \frac{dA}{dx} h^{\alpha}$. Следовательно, $h^{\beta-1} = h^{\alpha}$; значит, $\beta - 1 = \alpha$; но так как $\alpha = 1$, то $\beta - 1 = 1$, т. е. $\beta = 2$ и $\beta B h^{\beta-1} = 2Bh^{2-1} = 2Bh$.

Теперь мы знаем, во-первых, что в исходном уравнении Ia) мы можем вместо Bh^{β} поставить Bh^2; это, следовательно, *выведено*, а не предположено с самого начала.

Во-вторых же, $\beta B h^{\beta-1} = \frac{dA}{dx} h^{\alpha}$ превращается в $2Bh = \frac{dA}{dx} h$ (так как $h^{\alpha} = h^1$), откуда $2B = \frac{dA}{dx}$, а $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{dA}{dx}$; если подставить сюда значение A, то

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Es ist nicht nötig, weiter zu gehen.

Распространяться дальше нет нужды.

Критика, которой Маркс подвергает это доказательство, может показаться, правда, основанной на недоразумении. Хайнд предполагает разложимость $f(x+h)$ в ряд «по целым, положительным, возрастающим степеням h» (см. Хайнд, § 74, стр. 83) и в этом предположении доказывает фактически, что если коэффициент при h^k $(k > 0)$ не равен тождественно нулю, то и коэффициенты при $h^1, h^2, \ldots, h^{k-1}$ также не могут быть тождественно равными нулю. (Дело в том, что Хайнд предполагает также, хотя и молча, коэффициенты при h^{α}, h^{β}, h^{γ}, ... «конечными», т. е. отличными как от 0, так и от ∞.) Это доказательство носит, однако, весьма нечеткую форму и может создавать впечатление, будто автор, следуя Лагранжу, хочет доказать разложимость («в общем случае») *всякой* $f(x+h)$ в ряд по степеням $h^0, h^1, h^2, \ldots$; именно так его и понял Маркс. Кроме того, верность исходного предположения Хайнда (насчет свойств показателей степени $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$) нигде не проверяется им для какой-нибудь конкретной функции, т. е., как таковая, она нигде не оказывается нужной ему. В итоге поэтому Маркс правильно упрекает Хайнда в том, что он создает только видимость большей общности его формулировки теоремы Тейлора.

По мысли Маркса, Хайнд напрасно не сформулировал прямо свое исходное допущение как состоящее в том, что теорема Тейлора будет доказываться им для функций $f(x+h)$, допускающих представление в «биномиальной форме», т. е. в виде

$$f(x+h)=f(x)+Ah+Bh^2+\cdots$$

Все критические замечания Маркса в адрес Хайнда приводятся ниже полностью (лл. 32—33).

Diese verbesserte und mehr prätentiöse Auflage der Taylorschen Entwicklung kommt auf folgendes hinaus: der ganze Schlüssel liegt in der Gleichsetzung der ersten Glieder der zwei Gleichungen: $\alpha Ah^{\alpha-1}=\frac{dy}{dx}$; da $\frac{dy}{dx}h^0$ zum Faktor hat, muss $h^{\alpha-1}=h^0$ sein, also $\alpha-1=0$, also $\alpha=1$ und $\alpha Ah^{\alpha-1}=Ah^{1-1}=A$.

Aber suppose, dass* in der Ausgangsgleichung

Это улучшенное и более претенциозное издание Тейлорова разложения сводится к следующему. Ключом ко всему служит приравнивание первых членов обоих уравнений: $\alpha Ah^{\alpha-1}=\frac{dy}{dx}$; а так как $\frac{dy}{dx}$ имеет множителем h^0, то $h^{\alpha-1}$ должно быть $=h^0$, и, следовательно, $\alpha-1=0$, т. е. $\alpha=1$ и $\alpha Ah^{\alpha-1}=Ah^{1-1}=A$.

Но пусть * в исходном уравнении

$$y_1=yh^0+Ah^{\alpha}\,[+\ldots]$$

α negativ sei (und das unbestimmte α kann alles mögliche sein, wie das binomische Theorem in seiner allgemeinsten Entwicklung zeigt), so [wird] Ah^{α} zu $Ah^{-\alpha}$ und $\alpha Ah^{\alpha-1}$ zu $-\alpha Ah^{-\alpha-1}$ **. Setzen wir nun $\alpha=1$, wie es sich aus der vorhergehenden Entwicklung ergab, so $-\alpha Ah^{-\alpha-1}=$

α — величина отрицательная (а неопределенная α может быть чем угодно, как это указывает биномиальная теорема в ее самом общем изложении), тогда Ah^{α} обратится в $Ah^{-\alpha}$ и $\alpha Ah^{\alpha-1}$ в $-\alpha Ah^{-\alpha-1}$ **. Если мы теперь положим $\alpha=1$, как это вытекает из вышеизложенного, то

* Здесь в смысле: «рассмотрим такой случай, когда».— *Ред.*

** Так как у Маркса нет знака абсолютной величины, то, чтобы выразить, что α — отрицательное число, он заменяет α на $-\alpha$, где последняя α положительна.— *Ред.*

$= -Ah^{-1-1} = -Ah^{-2}$. Nach unserem vorigen Räsonnement müssen wir also schliessen, dass da

$-\alpha Ah^{-\alpha-1} = -Ah^{-1-1} = -Ah^{-2}$. Согласно нашему прежнему рассуждению, мы, следовательно, должны заключить, что так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \times 1 \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ h^0\right),$$

$h^{-2} = h^0$, also $-2 = 0$ sein muss, oder, wenn wir es anders ausdrücken wollen, da $\frac{dy}{dx} \cdot h^0 = -\alpha Ah^{-1-1}$, muss $h^{-1-1} = h^0$, also $-1-1 = 0$ sein, was uns das Resultat liefert $-1 = +1$. Dies abgeschmackte Resultat beweist jedoch nur, dass unsere Voraussetzung im geheimen darin bestand, dass h^α bloss ein maskierter Ausdruck für h^1, also $\alpha = +1$ vorausgesetzt ist, und dass unsere Behauptung, die Entwicklungsreihe der Faktoren h^0, h^1, h^2, h^3 etc. nicht einfach vorauszusetzen, sondern ihre respektiven numerischen Potenzen h: 1, 2, 3 etc., durch Differentiationsprozess abzuleiten aus den unbestimmten Potenzen α, β, γ etc., von Haus aus immer Dug und Trug war.

то должно быть $h^{-2} = h^0$, т. е. $-2 = 0$, или, по-другому, так как $\frac{dy}{dx} \cdot h^0 = -\alpha Ah^{-1-1}$, то должно быть $h^{-1-1} = h^0$ и, следовательно, $-1-1 = 0$, что дает в результате $-1 = +1$. Этот нелепый результат доказывает, однако, только то, что втихомолку мы исходили из предположения, что h^α есть только замаскированное выражение для h^1, т. е. что равенство $\alpha = +1$ предполагается нами, а наше намерение не просто предположить разложимость в ряд с множителями h^0, h^1, h^2, h^3 и т. д. а вывести соответствующие числовые степени h: 1, 2, 3 и т. д. — посредством дифференцирования из неопределенных показателей степеней α, β, γ и т. д. с самого начала было сплошным надувательством.

Ferner könnte in Ah^α α kleiner als 1 sein, und dann $\alpha - 1$ ein echter Bruch, sodass wir für [die Potenzen von h], ganz allgemein ausgedrückt, die Form $h^{\frac{m}{n}}$ erhielten. Ebenso könnte α [irrational] sein*.

Далее, в Ah^α могло быть α меньше 1, а тогда и $\alpha - 1$ тоже была бы правильной дробью, так что самым общим выражением для [степеней h] была бы форма $h^{\frac{m}{n}}$. Точно так же α могла бы быть [и иррациональной]*.

* Вместо иррациональной α у Маркса здесь $\log h$, и непонятно как: то ли как *показатель* степени h, то ли как степень h.— *Ред.*

Es bleibt also dabei, dass die Ausgangsgleichung

$$y_1 = y + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + Dh^{\delta} + \ldots$$

entweder nur eine gezierte Verkleidung der aus dem Binom mitgenommenen h^1, h^2, h^3 etc. ist oder dass, wenn wir α z. B. wirklich als *blosses allgemeines Symbol* der Potenz nehmen, also aller möglichen Formen von α, die Glieder der zwei durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen nicht gleichsetzbar, also überhaupt keinen Schuss Pulver wert sind.

Wir wissen aber, dass es Funktionen von x gibt, die sobald x um h wächst, negative und fraktionelle Potenzen desselben liefern.

Resultat also, dass die dem Binom entnommenen [Faktoren] verschiedener sukzessiven abgeleiteten Funktionen in x, nämlich h^0, h^1, h^2 etc. *vorausgesetzt* bleiben müssen, uns durch das Binom geliefert sind und nicht durch die differentielle Entwicklung, dass also die Form des Binoms, von der ausgegangen wird, eine ganz bestimmte ist, nämlich die wo der Faktor h in *ganzen*, *positiven*, *aufsteigenden Potenzen* entwickelt wird *.

При этом, однако, *либо* исходное уравнение

$$y_1 = y + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + Dh^{\delta} + \ldots$$

есть *только приукрашенная маскировка* заимствованных из бинома h^1, h^2, h^3 и т. д., либо что если мы действительно рассматриваем α, например, как *простой общий символ* показателя степени, т. е. всех возможных форм для α, то нельзя будет приравнивать члены двух выведенных путем дифференцирования уравнений, т. е. что они вообще ломаного гроша не стоят.

Но мы знаем, что существуют функции от x, которые при возрастании x на h дают отрицательные и дробные степени последнего.

Результат, следовательно, состоит в том, что заимствованные из бинома [множители] различных последовательных производных функций в x, именно h^0, h^1, h^2 и т. д., должны оставаться *предполагаемыми*, они доставлены нам биномом, а не посредством дифференциального развития; что, следовательно, форма бинома, из которой исходят, вполне определенная, именно та, где множитель h развертывается в *целых*, *положительных*, *возрастающих степенях* *.

Свою критику Маркс продолжает далее. Теперь он останавливается на вопросе о выражении неопределенных коэффициентов A, B, C, D и т. д. через произ-

* «Формой бинома» здесь называется разложение вида

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots \text{ — Ред.}$$

водные функции от $f(x)$ и, соответственно, на случаях, когда «конечная» (по Марксу) производная не существует. Он пишет (лл. 33—34):

Wir sind aber noch nicht zu Ende. Auch mit den in den indeterminate coefficients A, B, C, D etc. verkleideten abgeleiteten Funktionen in x (sieh 3)) $f'(x)$, $f''(x)$ etc. steht es nicht ganz kauscher *.

Dort hatten wir abgeleitet: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$, aber dort hatten wir auch $f(x)=x^m$, daher $f'(x)=$ $=mx^{m-1}$ war, d. h. das $f'(x)$ war wie alle später durch das Binom abgeleitete Funktionen in x ein *bestimmter endlicher Ausdruck in* x; und notabene, die ursprünglichen Funktionen, die vermittelst des Binoms entwikkelt werden, sind in ihrer *allgemeinen Form* stets von einem bestimmten Grad, ebensowohl wenn $f(x)=x^m$ z. B., als wenn es $=\frac{a^m}{x^m-a^m}$.

Die abgeleiteten Funktionen mögen sich in einer endlichen oder endlosen Reihe darstellen, jedes Glied dieser Reihe ist ein bestimmter und sofern *endlicher* Ausdruck in x. Z. B. bei x^4 (oder x^m) ist $4x^3$ (oder mx^{m-1}) ein bestimmter, endlicher Ausdruck, was durchaus nicht seine Entwicklungsfähigkeit als Funktion in der Variablen x beeinträchtigt $4x^3$, dadurch, das x

Но это еще не все. И с переодетыми в неопределенные коэффициенты A, B, C, D и т. д. производными функциями в x (см. 3)) $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д. дело обстоит не вполне кошерно *.

Там мы вывели: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$, но там мы имели также $f(x)=$ $=x^m$, в силу чего было $f'(x)=$ $=mx^{m-1}$, т. е., как и все выведенные позднее с помощью бинома функции в x, $f'(x)$ была *определенным конечным выражением в* x; и, заметим, первоначальные функции, которые разлагаются с помощью бинома, в их *общей форме* всегда имеют определенную степень, как в случае, когда $f(x)=x^m$, например, так и в случае, когда оно $=\frac{a^m}{x^m-a^m}$.

Как бы ни представлялись производные функции: конечным или бесконечным рядом, каждый член такого ряда есть определенное и постольку *конечное* выражение в x. Например, при x^4 (или x^m) $4x^3$ (или mx^{m-1}) есть определенное и конечное выражение, что отнюдь не влияет на возможность его разложения как функции в переменной x. Благодаря тому,

* Это слово Маркс употребляет в ироническом смысле. На древнееврейском языке оно означает строгое соблюдение предписания религии — запрещение пользоваться одной и той же посудой для мясных и молочных продуктов. Здесь, очевидно, Маркс хочет подчеркнуть неудовлетворительность аргументации даже с той точки зрения, которой придерживается сам автор.— *Ред.*

wieder zu $x+h$ wird, wird zu $4(x+h)^3$, obgleich $4x^3$ ein *bestimmter* und soweit *endlicher* Ausdruck.

Ebenso:

что x снова обращается в $x+h$, $4x^3$ преобразуется в $4(x+h)^3$, хотя $4x^3$ есть выражение *определенное* и постольку *конечное*.

Так же:

$$\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\ldots$$

Jeder Ausdruck der Reihe $\frac{x}{a}, \frac{x^2}{a^2}, \frac{x^3}{a^3}$ etc. ist eine *endliche weil bestimmte Funktion* von x, und es ist hierfür total gleichgültig, ob ich die Entwicklungsreihe finde durch Division von a durch $a-x$ oder auf dem kürzeren Weg der sukzessiven Differentiation von $\frac{a}{a-x}$.

Sobald wir aber an der Stelle von $f'(x)$, $f''(x)$ etc. die unbestimmten Koeffizienten A, B etc. setzen, kommen wir wieder zum selben Dilemma wie bei h^0, h^1, h^2 etc., den mit Haut und Haar aus einer speziellen Form des Binoms in der Ausgangsgleichung von Taylor beibehaltenen Faktoren der abgeleiteten Funktionen.

Entweder sind die A, B, C etc.— diese unbestimmten Koeffizienten — nur andere Namen für die aus dem Binom übernommenen *bestimmten* und *soweit «endlichen» abgeleiteten Funktionen in* x, oder A, B, C etc. als allgemeine Symbole von abgeleiteten *Funktionen in* x müssen Symbole sein, nicht nur der abgeleiteten Funktionen, wenn sie bestimmt und endlich, sondern auch, wenn sie $=0$, $=\infty$

Каждый член ряда $\frac{x}{a}, \frac{x^2}{a^2}, \frac{x^3}{a^3}$ и т. д. есть *конечная, потому что определенная, функция* от x, причем совершенно безразлично, нахожу ли я ряд разложения путем деления a на $a-x$ или более кратким путем — последовательного дифференцирования $\frac{a}{a-x}$.

Но когда мы на место $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д. подставляем неопределенные коэффициенты A, B и т. д., мы вновь оказываемся перед той же дилеммой, что и для h^0, h^1, h^2 и т. д., т. е. для целиком перенесенных из некоторой специальной формы бинома в исходное уравнение Тейлора множителей при производных функциях.

Либо A, B, C и т. д., эти неопределенные коэффициенты,— лишь иные названия для заимствованных из бинома *определенных* и *постольку «конечных» производных функций в* x, либо A, B, C и т. д., как общие символы для производных *функций в* x, должны быть символами производных функций не только тогда, когда последние определены и конечны, но и когда они $=0$, $=\infty$ или $=-\infty$.

oder $= -\infty$. Und wir wissen, dass solche faktisch vorkommen.

А мы уже знаем, что такие фактически бывают.

Поскольку на следующих за этим страницах рукописи (стр. i, h, снова i) Маркс подводит итог всему уже сказанному им о теореме Тейлора (лл. 34—36) и выражает, в общих чертах, свое отношение к попытке Лагранжа обосновать исходное допущение, на котором строится доказательство теоремы Тейлора в учебниках Бушарла, Хайнда и др.,— текст этих страниц рукописи помещен в первой части настоящего издания (см. стр. 204—209 и примечание [82]).

Вслед за этим Маркс переходит более подробно к изложению доказательства теоремы Тейлора по Лагранжу. Он пишет (продолжение стр. i и стр. j); (лл. 36—37):

Nehmen wir Taylor's Ausgangsformel:

Если мы возьмем исходную формулу Тейлора:

$$y = f(x),$$

$$\text{I)} \quad y_1 \ \substack{\text{oder}\\\text{или}} \ f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \ldots,$$

so können wir diese schreiben:

то можем записать ее в виде

$$= f(x) + h(A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + Fh^5 + \ldots).$$

Nennen wir den ganzen Ausdruck in Klammern P, so:

Если все выражение в скобках мы назовем P, то

$$\text{1)} \quad y_1 \ \substack{\text{oder}\\\text{или}} \ f(x+h) = f(x) + Ph.$$

Dies, sagt Lagrange, ist der Ausdruck, worauf die ganze Entwicklungsreihe reduzierbar sein muss, sobald die Variable x zu $x + h$, also $f(x)$ zu $f(x + h)$ wird; denn setzen wir $h = 0$, so erhalten wir $f(x + h) = f(x)$, d. h. das $f(x+h)$ ist wieder auf seinen Originalausdruck reduziert. Dies beweist uns also, dass das erste Glied der Entwicklungsreihe von $f(x + h)$ $= f(x)$ oder y setzen muss.

Это, говорит Лагранж, есть то выражение, к которому должен быть сводим весь ряд разложения, коль скоро переменная x обращается в $x + h$ и, следовательно, $f(x)$ в $f(x+h)$; потому что, положив $h = 0$, мы получим $f(x+h) = f(x)$, иными словами, $f(x+h)$ сводится обратно к его первоначальному выражению. Это доказывает нам, таким образом, что при разложении $f(x+h)$ в ряд первый его член должен быть $= f(x)$ или y.

Untersuchen wir nun näher Ph; es ist:

Рассмотрим теперь поближе Ph:

$$Ph = h(A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \ldots);$$

ist also

$$P = A + (B + Ch + Dh^2 + Eh^3 + \ldots)\, h.$$

Setzen wir dies $A = p$ und den Ausdruck in Klauseln $= Q$, so $P = p + Qh$.

Setzen wir nun den Wert von $P = p + Qh$ in

$$1) \quad f(x+h) = f(x) + Ph,$$

so erhalten wir:

$$f(x+h) = f(x) + (p + Qh)\, h = f(x) + ph + Qh^2;$$

also:

$$2) \quad f(x+h) = f(x) + ph + Qh^2.$$

Lagrange betrachtet zunächst nur das zweite Glied ph. Da p nur mit h als Faktor *ausser* sich behaftet (nicht wie Q selbst wieder Funktionen von h *in sich innerhalb seines* befasst), und da wir überhaupt keine Bildungselemente der Reihe haben ausser x und h, so muss p eine Funktion von x sein, und zwar *seine erste Abgeleitete*, die Minimalentwicklung der $f(x)$. Er beweist dann dass p weder $= 0$ oder ∞ sein kann, noch h mit negativen oder fraktionellen Exponenten behaftet [177]. Und das Geniale besteht in diesem Beweis darin, dass gerade, weil in $f(x)$ die *Variable* x unbestimmt, allgemein, also nie einen partikulären Wert $= a$ [178] etc. annimmt und jeden Wachstums fähig bleibt, $f(x+h)$ [die] in seiner Entwicklungsreihe und dem allgemeinen Entwicklungsgesetz, das letztere einschliesst, alle die partikulären casus ausschliesst, die bei Taylor als failures erschei-

следовательно,

Если мы обозначим это A через p, а выражение в скобках через Q, то $P = p + Qh$.

Если теперь подставим значение $P = p + Qh$ в

то получим:

т.е.

Лагранж рассматривает сначала только второй член ph. Так как p имеет h только множителем *вне* себя (в отличие от Q, которое снова содержит функции h *в самом себе*) и так как вообще, помимо x и h, у нас нет иных образующих элементов ряда, то p должно быть функцией от x, притом *его первой производной*, минимальным разложением для $f(x)$. Затем он доказывает, что p не может быть равно ни 0, ни ∞ и не может иметь множителем h с отрицательными или дробными показателями степени [177]. Гениальное в этом доказательстве состоит в том, что как раз, поскольку в $f(x)$ *переменная* x является неопределенной и общей, т. е. никогда не принимает какого-нибудь частного значения $= a$ [178] и т. д. и сохраняет способность любого возрастания, то $f(x+h)$, содержащая это x в ее разложении в ряд и в общем законе разложения, исключает все частные случаи, nen. ⟦Eine andere geniale Seite ist die, dass die Theorie *der abgeleiteten Funktionen*, die mit der Entwicklung von $f(x+h)$ in der Reihe sich verwebt, sofort wieder angewandt wird zur näheren Bestimmung der Glieder dieser Reihe. Doch gehe ich darauf hier nicht näher ein.⟧

Wir haben also bisher

которые у Тейлора выступают как исключения. ⟦Другой гениальной чертой является то, что теория *производных функций*, которая переплетается с разложением $f(x+h)$ в ряд, тотчас же применяется, наоборот, для более точного определения членов этого ряда. Но входить в подробности я здесь не буду.⟧

Итак, до сих пор мы имели:

$$f(x+h)=f(x)+ph\ \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f'(x)h\right)+\ldots$$

Betrachten wir nun näher Qh^2, so ist es

Подробнее проанализировав Qh^2, мы видим, что оно

$$=(B+Ch+Dh^2+Eh^3+Fh^4+\ldots)h^2=$$
$$=Bh^2+h^3(C+Dh+Eh^2+\ldots).$$

Nennen wir $B=q$ und den in den Klauseln eingeschlossenen Ausdruck R, so $Qh^2=(q+Rh)h^2$; also: $Q=q+Rh$.

Setzen wir diesen Ausdruck in 2), so erhalten wir:

Если обозначить B через q, а заключенное в скобки выражение через R, то $Qh^2=(q+Rh)h^2$; следовательно, $Q=q+Rh$.

Подставив это выражение в 2), получим:

$$3)\quad f(x+h)=f(x)+ph+(q+Rh)h^2,$$
$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+Rh^3,$$

und so wird weiter entwickelt, und wir erhalten so:

рассуждая так же дальше, получим:

$$R=r+Sh,\quad S=s+Th,\ \ldots,$$

$$f(x+h)=y\ \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x)\right)+ph\ \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f'(x)h\right)+qh^2+rh^3+sh^4+\ldots$$

Die Reihe kann nicht abschliessen, weil immer von neuem einen Ausdruck erhalten wie sub letzt $S=s+Th$, so $T=t+Uh$, wo U wieder Funktionen von x und h in sich involviert. Die Entwicklungsweise

Этот ряд не может закончиться, потому что всякий раз будет получаться новое выражение: вслед за последним $S=s+Th$ аналогичное $T=t+Uh$, где U вновь включает в себя функции от x и h. Таким образом, этот schliesst also jeden finalen Abschluss der Entwicklungsreihe aus.

способ разложения исключает какое бы то ни было конечное завершение ряда.

В нашем распоряжении нет страниц l, m, n рукописи и не известно, были ли такие у Маркса. На странице k под чертою, с которой начинается страница, находится следующий раздел рукописи, посвященный теореме Маклорена *. Здесь Маркс пишет (л. 38):

DAS MAC LAURINSCHE THEOREM

ТЕОРЕМА МАКЛОРЕНА

I) Was Taylor's Theorem entwickelt, ist $f(x+h)$ oder $f(x_1) = y_1$; Mac Laurin dagegen $f(x)$ oder y; d. h. die Funktion von x selbst soll nicht auf algebraischem, sondern Differentialweg entwickelt werden; dies heisst also in der Tat nichts, als dass *der konstante Koeffizient der* [Potenzen von] x durch Differentiation gefunden werden soll.

II) Haben wir ein Binom, z. B. $(x+c)^4$, so kann es in doppelter Form entwickelt werden, je nachdem ich x oder c zum ersten oder letzten Glied mache:

I) По теореме Тейлора разлагается $f(x+h)$ или $f(x_1) = y_1$; по Маклорену же $f(x)$ или y; т. е. функцию от самого x требуется разложить не алгебраически, а с помощью дифференциального исчисления; это не означает, таким образом, на самом деле ничего иного, кроме того, что *постоянный коэффициент* [степеней] x должен быть найден посредством дифференцирования.

II) Если имеем какой-нибудь бином, например $(x+c)^4$, то его разложение может быть написано в двоякой форме в зависимости от того, какой член, x или c, я приму за первый или последний:

$$\text{a)}\quad (x+c)^4 = x^4 + 4x^3c + 6x^2c^2 + 4xc^3 + c^4,$$

$$\text{b)}\quad (c+x)^4 = c^4 + 4c^3x + 6c^2x^2 + 4cx^3 + x^4.$$

In a) erscheint die Funktion in x entwickelt und c in aufsteigenden ganzen nicht-negativen ** Potenzen, also c^0, c^1, c^2 etc. als blosser Faktor. In b) erscheint umgekehrt die Funktion in c entwickelt und x in aufsteigenden etc. Potenzen als Faktor.

В a) выступает функция в x как разлагающаяся в ряд, а c в возрастающих, целых, неотрицательных ** степенях, т. е. c^0, c^1, c^2 и т. д., просто как множитель. В b), наоборот, функция в c выступает как разлагающаяся в ряд, а x в возрастающих и т. д. степенях как множитель.

---

* Эта страница рукописи перечеркнута карандашом.— *Ред.*

** В рукописи: «positiven» («положительных»).— *Ред.*

Die Gleichung b) ist offenbar die *umgekehrte Gleichung* a), denn lese ich a) rückwärts, so

Уравнение b) есть, очевидно, *обернутое уравнение* a), потому что, читая уравнение a) справа налево, я имею

$$c^4+4c^3x+6c^2x^2+4cx^3+x^4.$$

Wenn also die Ausgangsgleichung von Taylor:

Таким образом, если исходное уравнение Тейлора:

$$\alpha)\quad y_1=y+Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4+\ldots,$$

so, wenn wir c^4 mit A bezeichnen, $4c^3$ mit B, $6c^2$ mit C, $4c$ mit D, [wird die Mac Laurinsche Gleichung]:

то, обозначив c^4 буквой A, $4c^3$ буквой B, $6c^2$ буквой C и $4c$ буквой D, [мы и получим уравнение Маклорена]:

$$\beta)\quad y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$$

In α) sind die unbestimmten Koeffizienten A, B, C etc. Funktionen von x, in β) Funktionen der Konstanten c.

В α) неопределенные коэффициенты A, B, C и т. д. суть функции от x, в β) — функции постоянной c.

III) A) $y \underset{\text{или}}{\overset{\text{oder}}{}} f(x) \underset{\text{или}}{\overset{\text{oder}}{}} (c+x)^m=$

$$=c^m+mc^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}c^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c^{m-3}x^3+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}c^{m-4}x^4+\ldots$$

Da nur *Variable* differenzierbar, scheint die Entwicklung der konstanten coefficients von Funktion [von] x durch Differentiation eine contradictio in adjecto *.

Так как дифференцировать можно только *переменные*, то развертывание постоянных коэффициентов функции [от] x путем дифференцирования представляется как contradictio in adjecto *.

Aber verfahren wir wie bei dem Taylorschen Theorem. Setzen wir $x=0$, so wird

Но поступим так, как мы это делали для теоремы Тейлора. Если мы положим $x=0$, то

$$y \underset{\text{или}}{\overset{\text{oder}}{}} f(x)=(c+x)^m$$

zu

обратится в

$$y \underset{\text{или}}{\overset{\text{oder}}{}} f(0) \underset{\text{или}}{\overset{\text{oder}}{}} (c+x)^m=(c+0)^m=c^m.$$

---

* Здесь в смысле: представляется находящимся в противоречии с самим определением дифференцирования.— *Ред.*

Wenn wir so die m-te Potenz c oder c^m dadurch gefunden dass wir in $(c+x)^m$ $x=0$ gesetzt, so sind alle abgeleiteten Funktionen von c^m in derselben Weise findbar, indem wir erst die Ableitung durch Differentiation von $(c+x)^m$ veranstalten und dann $x=0$ setzen; also, da

После того как мы таким образом нашли m-ю степень c, или c^m, полагая в $(c+x)^m$ $x=0$, все производные от c^m могут быть найдены аналогично, посредством того, что мы находим дифференцированием $(c+x)^m$ производную, а затем полагаем $x=0$; следовательно, так как

$$y \begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix} f(x)=(c+x)^m,$$

so

то

$$\frac{dy}{dx}=m(c+x)^{m-1};$$

setzen wir hier $x=0$, so wird $m(c+x)^{m-1}$ zu

если мы здесь положим $x=0$, то $m(c+x)^{m-1}$ обратится в

$$m(c+0)^{m-1}=mc^{m-1}=f'(0).$$

Und wir erhalten so die Glieder der Reihe nach.

Wir erhalten also:

Так мы и получаем последовательно члены ряда.

Мы получаем, следовательно,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2}+f'''(0)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=$$

$$=(y)_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 x^2+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 x^3+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\left(\frac{d^my}{dx^m}\right)_0 x^m,$$

wo die Klammern $(\ )_0$ zeigen, dass diese symbolischen Differentialkoeffizienten «abgeleiteten» Funktionen entsprechen, worin $x=0$ gesetzt.

где скобки $(\ )_0$ указывают, что эти символические дифференциальные коэффициенты соответствуют «производным» функциям, в которых положено $x=0$.

На этом заканчивается часть IX рукописи (в нашем перечислении).

В следующей за этим части X (стр. o, p в нумерации Маркса, лл. 39—40), озаглавленной: **«Sukzessive Differentiation»** (**«Последовательное дифференцирование»**), Маркс возвращается к вопросу о том, как, имея разложение $f(x+h)$ в ряд по степеням h, извлечь из него последовательные производные от $f(x)$ путем образования разностей $f(x+h)-f(x)$, деления их на h («освобождения» от множителя h — первого члена разложения разности) и полагания, наконец, $h=0$. Этот вопрос уже рассматривался им ранее в применении пока только к первой производной (см. стр. 532 и примечание [173]). Теперь Маркс занимается тем же вопросом для последовательных производных. Речь снова идет о том, как, уже имея разложение $f(x+h)$ в ряд по степеням h, воспользоваться им для того, чтобы извлечь из него все, как говорит Маркс, «потенциально» содержащиеся в нем производные функции от $f(x)$. С этой целью Маркс проделывает те же операции с разложением для $f'(x+h)$, о которых шла речь выше в применении к $f(x+h)$. Однако при получении разложения для $f'(x+h)$ из разложения для $f(x+h)$ Маркс допускает ошибку в выкладках, которую сам замечает в дальнейшем. Поскольку этот вопрос обсуждается им еще раз в следующем за этим добавлении к стр. 1 (часть XI в нашем перечислении), и притом в значительно более ясной форме, ниже приводится только это добавление (л. 41). Так как оно содержит еще ту же ошибку в выкладках (ведущую к тому, что производные оказываются совпадающими с коэффициентами при h в разложении для $f(x+h)$), последняя часть добавления здесь опущена. Читателю не представит труда самому выполнить опущенные выкладки.

AD P. 1 (TAYLOR'S THEOREM)

К СТР. 1 (ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА)

$$\text{I)}\quad y_1 \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}} \ f(x+h) \ \substack{\text{oder}\\ \text{или}} \ (x+h)^m =$$

$$= x^m + mx^{m-1}\frac{h}{1} + m(m-1)\,x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + {}$$
$$+ m(m-1)(m-2)(m-3)\,x^{m-4}\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Setzen wir $h = 0$, so erhalten

Положив $h = 0$, получим

$$f(x) = x^m.$$

Damit schon das Geheimnis gelöst. Das erste Glied des $(x+h)^m$, also x^m wird betrachtet nicht als erstes Glied eines Binoms, sondern als die gegebene Funktion der Variablen x, welche hier x^m. Der ganze Ausdruck sub I) auf der rechten Seite *mit Abzug von* x^m selbst erscheint also als produziert dadurch, dass in x^m die Variable x wächst und zu $x+h$ wird, das x^m zu $(x+h)^m$ oder wie wir schrieben [oben].

Auch die Methode, *wodurch die in der Reihe bereits erhaltenen sukzessiven «abgeleiteten» Funktionen* als solche gefunden werden in dem System, wo x_1 als $x+h$ gefasst, folgt schon aus der ersten Operation, wodurch wir $x^m = f(x)$ gefunden. x^m hat nur h^0

Тем самым загадка уже разгадана. Первый член [разложения] $(x+h)^m$, т. е. x^m, рассматривается не как первый член разложения бинома, а как заданная функция переменной x, которая в данном случае есть x^m. Таким образом, все выражение sub I) на правой стороне, *за вычетом самого* x^m, выступает как порожденное тем, что в x^m переменная x возрастает и обращается в $x+h$, а x^m тем самым обращается в $(x+h)^m$ или в написанное нами [выше].

Но и метод, *с помощью которого уже содержащиеся в ряде последовательные «производные» функции* отыскиваются, как таковые, в системе, где x_1 трактуется как $x+h$, следует уже из первой операции, с помощью которой мы нашли $x^m =$

(oder 1) zum Faktor; sobald daher $h = 0$ gesetzt, verschwinden die anderen Glieder, die mit h behaftet, und nur x^m bleibt als Äquivalent von y_1, das wieder zu y geworden.

Die anderen Funktionen von x müssen also sukzessiv von ihren h's befreit werden, dann $h = 0$ gesetzt werden. Wie in der ersten Operation durch das Nullsetzen von $h f(x+h)$ zu $f(x+0)$ zu $f(x)$ wurde, so wird die linke Seite durch die bezügliche Operation ihre entsprechende Form als symbolischer Differentialkoeffizient erhalten.

$= f(x)$; x^m имеет множителем лишь h^0 (или 1); поэтому, когда мы полагаем $h = 0$, исчезают другие члены, имеющие множителем h, и остается только x^m как эквивалент для y_1, когда он снова обратился в y.

Другие функции от x должны быть, таким образом, последовательно освобождены от своих h, а затем должно быть положено $h = 0$. Как при первой операции посредством приравнивания h к нулю $f(x+h)$ обратилась в $f(x+0)$, т. е. в $f(x)$, так и теперь с помощью аналогичной операции левая сторона получает соответствующую ей форму символического дифференциального коэффициента.

Da / Так как

$$y_1 \begin{pmatrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{pmatrix} f(x+h)\Big) = y \begin{pmatrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{pmatrix} f(x)\Big) + mx^{m-1}h + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

so / то

$$y_1 - y \begin{pmatrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{pmatrix} f(x+h) - f(x)\Big) = mx^{m-1}h + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Dividieren wir beide Seiten durch h, so

Разделив обе стороны на h, получим

$$\frac{y_1 - y}{h} \begin{pmatrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{pmatrix} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\Big) =$$

$$= mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2}\frac{h}{1\cdot 2} + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{h^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

mx^{m-1} nimmt hier dieselbe Stellung ein, wie vorher x^m...

mx^{m-1} играет здесь ту же роль, как ранее x^m...

В части XII рукописи Маркс снова (в последний раз) возвращается к стр. 1. Считая теорему Тейлора наиболее общей оперативной формулой дифференциального исчисления, как логически, так и исторически получаемой с помощью последнего, он полагает необходимым начать с вывода биномиальной теоремы средствами уже готового дифференциального исчисления, т. е. с помощью оперативных формул последнего. С этой целью в отрывке **«Zu Taylor's Theorem, p. 1»** (**«К теореме Тейлора, стр. 1»**) (л. 42) он прежде всего получает производную от x^m (для m целого положительного), пользуясь формулой для дифференциала произведения. Эту формулу он доказывает теперь методами

Ньютона—Лейбница, считая, очевидно, что после того, как мы уже вступили на почву дифференциального исчисления, иными словами, обосновали его методы, мы уже можем пользоваться и методами Ньютона — Лейбница: можем считать их теперь достаточно обоснованными.

В следующем за этим отрывке **«Ad Taylor's Theorem (p. 1)»** (**«К теореме Тейлора (стр. 1)»**) Маркс сличает полученные таким образом последовательные производные от x^m с коэффициентами при степенях h в разложении $(x+h)^m$ по биномиальной теореме и выясняет, в чем состоят различия между ними. Напомним, что из-за ошибки в выкладках, вопреки тому, что Маркс хорошо знал и о чем писал ранее,— см. стр. 537 и примечание [174] — эти различия не были усмотрены Марксом в частях X и XI рукописи. Можно думать поэтому, что целью настоящего отрывка и является устранение этой ошибки. Ниже оба отрывка приводятся полностью (лл. 42—43).

ZU TAYLOR'S THEOREM, P. 1

К ТЕОРЕМЕ ТЕЙЛОРА, СТР. 1

Wenn

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{[1 \cdot 2]} x^{m-2}h^2 + \ldots,$$

so hatte der Differentialcalcul schon unabhängig von Taylor bewiesen, dass if $f(x) = x^m$

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } f'(x) = mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ oder } f''(x) = m(m-1)x^{m-2},$$

etc.

Aber wie?

Nimm das Produkt der Variablen xz z.B.

Variieren sie, so wird es $(x+dx)(z+dz)$, was [im gewissen Sinn] ein *Binom vom zweiten Grad* und sich von $(x+a)(x+a)$ oder $(x+a)^2$ nur dadurch formell unterscheidet, dass wir für das erste $(x+a)$ $(x+dx)$ haben und *für das zweite* $(x+a)$ $(z+dz)$, daher statt $x^2+ax+ax+aa$ erhalten $xz+z\,dx+x\,dz+dx\,dz$; ziehen wir hiervon xz, so: $z\,dx+x\,dz+dx\,dz$; streichen wir letzteres fort, so:

$$z\,dx + x\,dz.$$

Если

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{[1 \cdot 2]} x^{m-2}h^2 + \ldots,$$

то дифференциальное исчисление независимо от Тейлора доказало уже, что если $f(x) = x^m$, то

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } f'(x) = mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ или } f''(x) = m(m-1)x^{m-2},$$

и т. д.

Но как?

Для примера возьмем произведение переменных xz.

Если они варьируют, то это произведение обращается в $(x+dx)(z+dz)$, что [в некотором смысле] есть *бином второй степени* и что отличается от $(x+a)(x+a)$, или $(x+a)^2$, по форме только тем, что вместо первого $(x+a)$ мы имеем $(x+dx)$, а *вместо второго* $(x+a)$ $(z+dz)$, поэтому вместо $x^2+ax+ax+aa$ мы получаем $xz+z\,dx+x\,dz+dx\,dz$; отняв отсюда xz, имеем $z\,dx+x\,dz+dx\,dz$; вычеркнув последний член, получаем

$$z\,dx + x\,dz.$$

Nachdem so durch das Binom entwickelt, dass $d(xz) = z\,dx + x\,dz$, dies anwendbar auf ein beliebiges Produkt von Variablen, z.B.

После того как с помощью бинома получено, что $d(xz) = z\,dx + x\,dz$, это может быть применено к произведению любого числа переменных, например:

$$\frac{d(xzuv)}{xzuv} = \frac{zuv\,dx}{xzuv} + \frac{xuv\,dz}{xzuv} + \frac{uzx\,dv}{xzuv} + \frac{xzv\,du}{xzuv}.$$

Dividiere ich beide Seiten durch, so erhalten:

После сокращения получим:

$$\frac{d(xzuv)}{xzuv} = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} + \frac{dv}{v} + \frac{du}{u},$$

$$\frac{d(x^4)}{x^4} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} = \frac{4\,dx}{x},$$

$$d(x^4) = 4\frac{dx}{x}\cdot x^4 = 4x^3\,dx, \quad \frac{d(x^4)}{dx} = \frac{dy}{dx} = 4x^3\,*.$$

Nimm an, es seien m variable Faktoren statt 4 [Faktoren] des Produkts $xzuvty$ etc. gebildet, so

Представим себе, что в образовании произведения участвовали не 4, а m переменных множителей $xzuvty$ и т. д.; тогда,

$$\frac{d(x^m)}{x^m} = \frac{m\,dx}{x};$$

hence:

следовательно,

$$d(x^m) = mx^m\frac{dx}{x}, \quad d(x^m) = mx^{m-1}\,dx$$

oder

или

$$\frac{d(x^m)}{dx}\left(=\frac{dy}{dx}\right) = mx^{m-1}; \text{ aber / а } \frac{d(mx^{m-1})}{dx} = m(m-1)x^{m-2} \text{ usw. / и т. д.}$$

Dies also nur gefunden, weil das durch Anwendung des Binoms gefundene als Operationsformel angewandt:

Это, следовательно, получено только благодаря тому, что была применена найденная с помощью бинома в качестве оперативной формулы:

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy.$$

* Последние две строки дописаны почерком Маркса справа карандашом.—*Ред.*

AD TAYLOR'S THEOREM (P. 1)

К ТЕОРЕМЕ ТЕЙЛОРА (СТР. 1)

Mit Bezug auf Gleichung IV):

$$y_1 = y \left(\begin{matrix}\text{oder}\\ \text{или}\end{matrix}\ f(x)\right) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + f^{\mathrm{V}}(x)\frac{h^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

könnte nun gesagt werden dass zwar die $f'(x) = mx^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$ etc. auch *differential* nachgewiesen sind *; dagegen die numerischen Faktoren $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ etc. *einfach aus dem binomischen Theorem akzeptiert sind.* Für unseren Zweck ist das gerade die Sache, und ist sie nicht erstaunlicher als dass die vom zweiten Glied an aufsteigenden Koeffizienten der Funktionen h, h^2, h^3, h^4, h^5 etc. ohne weiteres «aus dem binomischen Theorem» abgeleitet bleiben.

Dass der allgemeine Binomialkoeffizient $= \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}$ (derselbe *Ausdruck als der für die Anzahl der Kombinationsformen ohne Wiederholung von m Elementen zu r*), welcher wird, wie in unserem Fall, if $r = m$ (und r kann nie grösser sein als m),

Относительно уравнения IV)

можно было бы сказать теперь, что [равенства] $f'(x) = mx^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$ и т. д. доказаны уже, правда, и *дифференциально* *; числовые же множители $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ и т. д. *просто заимствованы из биномиальной теоремы.* Для нашей цели именно в этом и состоит суть дела, и эта суть дела не более удивительна, чем то обстоятельство, что сопровождающие эти функции, начиная со 2-го члена, в возрастающих степенях коэффициенты h, h^2, h^3, h^4, h^5 и т. д. остаются непосредственно выведенными «из биномиальной теоремы».

Общий биномиальный коэффициент $= \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}$ (тому же самому, *как и для числа сочетаний без повторений из m элементов по r*), который, как в нашем случае, когда $r = m$ (r никогда не может быть больше m),

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-(m-1))}{1\cdot 2\ldots m} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots m},$$

* То есть не путем «алгебраического» дифференцирования, а с помощью оперативных формул дифференциального исчисления.— *Ред.*

ist durch die Kombinationslehre bewiesen, von der das Binomialtheorem mit ganzen positiven Potenzen selbst nur eine besondere Anwendung ist (*Anzahl der Kombinationsformen*, *dividiert durch Anzahl der Permutationsformen*).

Für die Differentialmethode, wo $x_1 = x + h$, $f(x_1) = f(x+h)$ etc., ist es aber wichtig, dass aus dem Differentialcalcul selbst abgeleitet erscheint, was durch das Binomialtheorem gegeben ist.

Solche Ableitung, wie wir dies gesehen bei der Differentialableitung von mx^{m-1} aus x^m usw., kann aber selbst wieder nur auf Grund des Binomialtheorems vor sich gehen.

доказан с помощью комбинаторики, только частным применением которой является и сама биномиальная теорема для целых положительных степеней (*число размещений*, *поделенное на число перестановок*).

Но для дифференциального метода, где $x_1 = x + h$, $f(x_1) = f(x+h)$ и т. д., важно, что данное биномиальной теоремой оказывается выводимым в самом дифференциальном исчислении.

Такой вывод, как мы это видели при получении mx^{m-1} из x^m и т. д. средствами дифференциального исчисления, в свою очередь может быть, однако, осуществлен на основе одной только биномиальной теоремы.

Последний отрывок из части XII (в нашем перечислении, лл. 44—45) даже по форме отличается от всей остальной рукописи 4302. Он написан на отдельных листках не вдоль, а поперек листка и содержит лишь какие-то непонятные выкладки, местами повторяемые дважды. Отрывок озаглавлен карандашом: **«Ad Taylor's Th., p. 1, Gl. III»** (**«К теор. Тейлора, стр. 1, ур. III»**). Но ни стр. 1, ни уравнения III (римских «I» и «III») в рукописи нет. Попытка отождествить уравнение III с уравнением 3) на стр. 1 (здесь на стр. 539) ни к чему не приводит. Отрывок начинается с формулы

I) y_1 или $(x+h)^m = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 +$ и т. д., в которую затем на место h подставляется $h + z$. В чем состоит цель этой подстановки, никак не ясно: во всяком случае не в отыскании коэффициентов A, B, C и т. д. биномиального разложения, поскольку теорема о биноме Ньютона предполагается уже известной — она применяется даже для разложения $(x+h+z)^m$. Столь же непонятны и остальные выкладки, которые к тому же не сопровождаются никакими пояснениями. Весь этот отрывок здесь поэтому не приводится.

Несмотря на ее незаконченность и черновой характер, рукопись 4302 представляет несомненный интерес. Только она позволяет выяснить окончательно взгляды Маркса на подлинную сущность дифференциального исчисления, на понятие функции, на способы математического отображения движения, на методы Ньютона и Лейбница, на теорию аналитических функций Лагранжа, на недостатки имевшихся в распоряжении Маркса руководств и, особенно, приводившихся в них доказательств теоремы Тейлора, на тот метод доказательства этой теоремы, который самому Марксу представлялся правильным. Из рукописи ясно, что это доказательство должно было начинаться, по Марксу, с частного случая степенной функции x^m и распространяться затем на любые функции $f(x)$, имеющие «форму бинома», т. е. такие, что

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + \dots, \tag{1}$$

где A, B, C и т. д.— функции только от x. Из этого разложения Маркс извлекал в дальнейшем «содержащиеся уже в нем в готовом виде» последовательные производные от $f(x)$ и таким образом получал из ряда (1) ряд Тейлора. Заметим, что такое доказательство теоремы Тейлора — с соответствующими уточнениями насчет областей сходимости рядов для $f(x+h)$, $f'(x+h)$ и т. д.— приводится и в современных курсах математического анализа и, специально, теории рядов *.

---

* См., например, 1) И. П. Натансон, Производные, интегралы и ряды, в кн.: «Энциклопедия элементарной математики», т. III, М.— Л., 1952, стр. 347—348, 455—457 и 469—470 (теорема Тейлора для функции x^k, теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда и ряд Тейлора); 2) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, II. Aufl., Berlin, 1924, стр. 173—174.— *Ред.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ПОНЯТИИ «ПРЕДЕЛА» В ИСТОЧНИКАХ, КОТОРЫМИ ПОЛЬЗОВАЛСЯ МАРКС

Чтобы дать возможность читателю, привыкшему к современному употреблению термина «предел» в математике, правильно понять критические замечания Маркса, относящиеся к этому понятию, и особые способы его истолкования Марксом, приведем прежде всего определение «пределов» (вместе с поясняющими его примерами), а также способы употребления слова «предел», содержавшиеся в курсах Хайнда и Бушарла, имевшихся в распоряжении Маркса и критически изучавшихся им.

Курс Хайнда строился по Даламберу, т. е. производная определялась в нем через понятие предела. Вводная глава учебника была посвящена поэтому «методу пределов». Однако ни в этой главе, ни где-нибудь в другом месте учебника определения «предела» не было. Были только определения «пределов» переменной как в некотором смысле точных верхней и нижней границ множества ее значений. (Это множество могло содержать, в частности, и «бесконечно большое» значение переменной, обозначавшееся знаком ∞. Но правила оперирования с этим знаком не уточнялись: понятия абсолютной величины не было, не было и знаков $+\infty$ и $-\infty$, считалось просто само собою разумеющимся, что при любом $\alpha \geqslant 0$ $\infty + \alpha = \infty$, что при любом «конечном» (т. е. отличном как от 0, так и от ∞) a $a \cdot \infty = \infty$ и $\frac{a}{\infty} = 0$.)

Для функции же — об этом, правда, можно только догадываться из примеров — понятие предела в вводной главе фактически вводилось молча, путем — как это можно подозревать — отождествления ее предела (в точке, совпадавшей с точной верхней или нижней границей некоторого множества значений аргумента) с одним из двух «пределов» (с точной верхней или с точной нижней границей) соответствующего множества значений функции. Поскольку в книге рассматривались только монотонные или кусочно монотонные функции, такой «предел» на практике оказывался совпадающим с пределом (односторонним) в более обычном смысле слова, в котором Хайнд фактически и употреблял понятие предела во всем остальном тексте книги. Однако употреблял так, что введение этого понятия, которое должно было «усовершенствовать» метод актуально бесконечно малых, заведомо не достигало этой цели и оказывалось вообще излишним.

Действительно, Хайнд мог бы, конечно, заменить отыскание одностороннего предела кусочно монотонной функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b), при стремлении, например, x к $+a$ решением следующих двух задач:

1. Найти такое число α, чтобы при $a < x < \alpha$ функция была монотонной (в широком смысле, т. е. неубывающей или невозрастающей; для определенности будем предполагать, что функция оказывалась при этом монотонно неубывающей);

2. Отыскать точную, в нашем предположении нижнюю, границу множества значений функции на интервале (a, α), т. е. для $a < x < \alpha$. Ясно, что ею и будет искомый $\lim\limits_{x \to +a} f(x)$.

Но Хайнд так не поступал. Следуя Ньютону (см. Приложение, «О леммах Ньютона, цитируемых Марксом», стр. 574—576), он трактовал предел актуально, т. е. как «последнее» значение функции для «последнего» значения аргумента. Иными словами, он искал $\lim\limits_{x \to +a} f(x)$ как точную нижнюю границу значений функции не на интервале $a < x < \alpha$, а на отрезке $a \leqslant x \leqslant \alpha$, т. е. предполагал «последнее» значение $f(a)$ само по себе как-то уже определенным; а в таком случае вся вышеописанная процедура лишалась смысла: за α можно было взять само число a и искать точную нижнюю границу множества значений функции, состоящего из одного только числа $f(a)$, которой и оказывалось это же $f(a)$.

Именно это, по-видимому, и хотел сказать Маркс, когда он замечал, имея, очевидно, в виду определение Хайнда, что не имеет смысла трактовать $3x^2$ как предельное значение для того же $3x^2$ при стремлении h к нулю, характеризуя ниже такого рода трактовку как «пошлую тавтологию» (см. стр. 214—215 и примечания [90-92]); когда называл вообще «ребячеством», «происхождение которого следует искать в первом мистическом и мистифицирующем методе исчисления» (см. стр. 217), актуальный подход к пределу: предположение, что предельное значение функции актуально достигается ею как ее «последнее» значение для «последнего» значения аргумента.

То обстоятельство, что актуальный подход к пределу отнюдь не решал трудностей, связанных с актуально бесконечно малыми, становится особенно очевидным в случаях, когда «последним» значением аргумента должна была быть «бесконечность». Так, в частности, если речь шла о последовательности $\{a_n\}$, то пределом должен был быть тот член этой последовательности, у которого $n = \infty$, т. е. предел рассматривался как конец (последний член) бесконечной (т. е. не имеющей конца) последовательности членов. Вряд ли приходится удивляться тому, что такое понятие «актуального предела» должно было представляться не более ясным, чем понятие «актуально бесконечно малой», которое Маркс называл «мистическим».

Как известно, определение предела функции, не предполагавшее актуальной выполнимости бесконечного числа шагов и допускавшее точную формулировку в терминах переменных и параметров, имеющих только конечные значения, окончательно вошло в математический обиход лишь со времен Коши, точнее, только в 70-х годах прошлого века. Но даже к этому времени для авторов многих распространенных учебников еще не было полностью ясным, что предел не следует толковать актуально; что даже в тех случаях, когда функция является непрерывной в точке a, т. е. предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равняется $f(a)$, он должен оказываться равным $f(a)$ именно при условии, что, сколь угодно приближаясь к a, x тем не менее никогда не достигает a.

В связи с математическими рукописями Маркса здесь для нас особенно существенно то, что если значение $f(a)$ не определено, а предел $f(x)$ при $x \to a$ (соответственно при x, стремящемся к $+a$ или к $-a$) существует, то можно просто доопределить функцию $f(x)$ в точке a, положив $f(a)$, по определению, равным этому пределу. Такое доопределение значений функции и называется доопределением *по непрерывности*. Пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ в таком случае будет значение доопределенной уже функции при $x = a$. Это, однако, не имеет ничего общего с трактовкою значения $f(a)$ как определяемого однозначно самой функцией $f(x)$, но актуально достигаемого ею лишь в *конце* бесконечного процесса сколь угодно близкого приближения x к a. Именно такое доопределение «по непрерывности», по-видимому, и имел в виду Маркс, когда он называл предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ «абсолютно минимальным выражением» этого отношения (см., например, стр. 217); в целях наглядности при этом, очевидно, имелся в виду предел этого отношения при $\Delta x \to +0$ и при условии, что существует такое число α, что для $0 < \Delta x < \alpha$ с убыванием Δx убывает и отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Этим же способом доопределения функций фактически пользовался и Лакруа в приводимых им (см. ниже стр. 572) примерах. Но поскольку в построении анализа Лакруа исходил из метафизического «принципа непрерывности» Лейбница, которым пользовался как самоочевидной аксиомой, никакие другие доопределения значений функции он не считал вообще возможными. О том, что Маркс допускал, по-видимому, и другие способы доопределения отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x = \Delta y = 0$, см. стр. 51 и примечание [18].

Приведем теперь собственные слова Хайнда, которые могут понадобиться при чтении рукописей Маркса и из которых сделанные выше заключения следуют.

Вводная глава «О методе пределов» начинается Хайндом с определения 1, гласящего:

«Пределами количества, которое допускает изменения в своей величине, являются те величины, между которыми заключены *все* значения, которые оно может иметь при *всех* его изменениях; за которые оно никогда не может перейти и от которых оно может быть сделано отличающимся на количества, меньшие любого, которое может быть указано в конечных терминах» (т. е. без употребления знаков ∞ и 0.— *Ред.*) (см. Hind, стр. 1, курсив наш.— *Ред.*)

За этим определением тут же следовал ряд примеров, в которых оно, впрочем, ни разу не использовалось в явном виде: ни разу не доказывалось, что «пределы», указываемые автором, действительно удовлетворяют требованиям, сформулированным в определении 1. Первый из этих примеров гласил:

«Количество ax, где x допускает всевозможные значения от нуля, или 0, до бесконечности, или ∞, становится 0 в первом случае и ∞ в последнем; и, следовательно, пределами алгебраического выражения ax являются 0 и ∞: первый называется *нижним*, а последний *верхним* пределом» (там же). (Здесь предполагалось, очевидно, что $a > 0$.)

Уже этот первый пример должен был приводить в недоумение читателя. Действительно, как сделать количество ax отличающимся от ∞ на «количества, меньшие любого, которое может быть указано в конечных терминах»? Ведь, по Хайнду, пока x остается конечной величиной, разность $\infty - ax$ равна ∞, очевидно. Если же $x = \infty$, то и $ax = \infty$, а разность $\infty - \infty$ не определена.

Во втором примере (нужно думать, конечно, что при тех же условиях относительно x и a) находились нижний и верхний пределы выражения $ax + b$, которыми оказывались, соответственно, b и бесконечность.

В третьем примере нижний предел $\frac{b}{a}$ дроби $\frac{ax+b}{bx+a}$ находился путем простой подстановки 0 на место x в выражение этой дроби, верхний же предел $\frac{a}{b}$ —

путем подстановки ∞ на место x в дробь $\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{b+\dfrac{a}{x}}$. Выяснения того, при каких условиях относительно a и b найденные значения являются действительно нижним и верхним пределами (соответственно), при этом не было. Не было даже намека на то, что следовало бы проверить, удовлетворяют ли эти значения вообще приведенному определению «пределов» (убедиться, в частности, в монотонности рассматривавшейся функции). Читатель как бы «подготовлялся» к тому, чтобы находить предел функции путем подстановки в ее выражение (или в ее преобразованное выражение, не лишенное смысла и в том случае, когда непосредственно задающее функцию выражение является неопределенным) предельного значения аргумента.

Четвертый и шестой примеры, а также пример, выделенный в особый пункт 2 вводной главы,— в которых происходит постепенный «переход» от понятий нижнего и верхнего пределов функции к более близкому к обычному понятию предела и выясняется актуальный характер последнего по Хайнду — приведем здесь полностью. Из них будет достаточно ясно также, сколь путаный характер носит вообще все изложение раздела о пределах у этого автора.

«Прим. 4. Сумма геометрического ряда

$$a+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+ \text{ и т. д.},$$

продолженная до n членов, выражается количеством

$$\frac{a\left(\dfrac{1}{x^n}-1\right)}{\dfrac{1}{x}-1}=\frac{ax\left(1-\dfrac{1}{x^n}\right)}{x-1};$$

теперь, если $n=0$, то нижний предел, очевидно, $=0$; но если $n=\infty$, $\dfrac{1}{x^n}$ становится 0, и поэтому верхний предел есть $\dfrac{ax}{x-1}$; он называется обычно суммой ряда, продолженной до бесконечности» (стр. 2). (Здесь молча предполагается, конечно, что аргументом функции $\dfrac{ax\left(1-\dfrac{1}{x^n}\right)}{x-1}$ является n; a и x — параметры такие, что $a>0$, $x>1$.)

«Прим. 6. Если правильный многоугольник вписан в круг и число его сторон последовательно удваивается, то очевидно, что его периметр все больше и больше приближается к равенству с периферией круга и что наконец их разность должна стать меньше любого количества, которое может быть указано; ясно поэтому, что окружность круга есть предел (the limit) периметров многоугольников» (стр. 2—3). Здесь уже говорится не об одном из «пределов» рассматриваемой последовательности и даже не о верхнем ее пределе, как это естественно было сделать, исходя из определения 1, а просто о пределе, и притом в обычном его смысле.

«2. *Доказать, что пределами отношений, имеющих место между синусом и тангенсом дуги окружности и самой дугой, являются отношения равенства.*

Пусть p и p' представляют периметры двух правильных многоугольников с n сторонами, первого — вписанного в, второго — описанного около круга с радиусом 1 и окружностью = 6,28318 и т. д. = 2π; тогда (триг.)

$$p = 2n \sin\frac{\pi}{n} \quad \text{и} \quad p' = 2n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n};$$

следовательно,

$$\frac{p}{p'} = \frac{2n \sin\frac{\pi}{n}}{2n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n},$$

и если значение n предположено неограниченно возросшим, то значение $\cos\frac{\pi}{n}$ есть 1, и поэтому $p = p'$; но периферия круга лежит, очевидно, между p и p' и в этом случае равна поэтому любому из них; следовательно, в этом предположении n-я часть периметра многоугольника равна n-й части периферии круга, т. е.

$$2 \sin\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} = 2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \text{ или } \sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

или синус и тангенс дуги окружности в их последнем, или предельном, состоянии находятся в отношении равенства с самой дугой» (стр. 3)».

Слово «предел» («пределы») встречается здесь только в формулировке теоремы, но, чтобы понять эту формулировку, нужно было догадываться из доказательства, что речь идет об обычном пределе отношений $\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, когда x стремится к 0. Впрочем, и в этом случае доказательство Хайнда вряд ли могло представляться удовлетворительным даже в его время. Из него ведь следует только, что автору хочется получить равенства

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \quad \text{при} \quad n = \infty. \tag{1}$$

Но, утверждая, что для $n = \infty$ $\cos\frac{\pi}{n} = 1$, он пользуется уже тем, что $\frac{\pi}{n} = 0$ при $n = \infty$, а в таком случае и $\sin\frac{\pi}{n} = \sin 0 = 0$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \operatorname{tg} 0 = 0$, т. е. для получения равенств (1) — из которых, кстати, самих по себе отнюдь не следует еще теорема о пределе отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ — совсем не требуются те рассуждения, посредством которых автор приходит к этим равенствам.

Остается действительно непонятным, как все это путаное изложение могло претендовать на существенное преимущество излагаемого метода пределов, толкуемых актуально, по сравнению с методом актуально бесконечно малых, в данном случае с простым отождествлением бесконечно малой дуги окружности с ее хордой.

В учебнике Бушарла (см. Boucharlat, стр. VII) метод пределов трактовался тоже как более совершенный по сравнению с методом бесконечно малых: «исправляющий то, что может быть несовершенным в этом последнем». Никакой попытки определить, что значит «стремиться к какому-либо пределу» (как можно убедиться в том, что такая-то величина действительно стремится к такому-то пределу), в курсе Бушарла, однако, не было. Понятие предела — также «актуального»—

появлялось в нем впервые в связи с отысканием производной от функции $y = x^2$. Приведем здесь это место полностью, поскольку именно к нему относятся критические замечания Маркса в рукописи «О неоднозначности терминов «предел» и «предельное значение».

«Рассматривая второй член уравнения

$$\frac{y'-y}{n} = 3x^2 + 3xh + h^2, \tag{2}$$

мы видим, что это отношение убывает вместе с убыванием h и что, когда h становится нулем, это отношение доводится до $3x^2$. Член $3x^2$ есть, следовательно, предел отношения $\frac{y'-y}{h}$: к этому члену оно стремится, когда мы заставляем h уменьшаться.

Поскольку в предположении, что $h=0$, приращение величины y также становится нулем, то $\frac{y'-y}{h}$ доводится до $\frac{0}{0}$, и, следовательно, уравнение (2) обращается в

$$\frac{0}{0} = 3x^2. \tag{3}$$

В этом уравнении нет ничего абсурдного, потому что алгебра учит нас, что $\frac{0}{0}$ может представлять все роды количеств. Впрочем, заметим, что так как, деля оба члена дроби на одно и то же число, мы не изменяем значения этой дроби, то отсюда следует, что малость членов дроби никак не отражается на ее значении и что, следовательно, оно может оставаться тем же, даже когда члены ее уже достигли последней степени малости, т. е. обратились в нули» (стр. 2—3).

Для понимания вышеупомянутой рукописи Маркса существенно также, что в изложении Бушарла предельный переход от равенства вида $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Phi(x_1, x)$ (где $y = f(x)$) к равенству вида $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ представлялся осуществляющимся отдельно в левой и в правой частях первого из этих равенств: от $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ к $\frac{dy}{dx}$ и от $\Phi(x_1, x)$ к $f'(x)$. $\Big($Под пределом отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Big($соответственно $\frac{y'-y}{h}\Big)$ при этом имелось в виду выражение $\frac{0}{0}$, заменявшееся на $\frac{dy}{dx}$.$\Big)$ Так, получив при отыскании дифференциала от x равенство $\frac{y'-y}{h} = 1$, Бушарла заключал: «Так как количество h не входит во второй член этого уравнения, то мы видим, что для того, чтобы перейти к пределу, достаточно изменить $\frac{y'-y}{h}$ в $\frac{dy}{dx}$, что дает $\frac{dy}{dx} = 1$» (стр. 6).

Случай, когда предел оказывался равным нулю, Бушарла трактовал как означающий несуществование предела. Так, занимаясь производной от постоянной $y = b$ и получив равенство $\frac{dy}{dx} = 0$, он заключал, что «нет ни предела, ни дифференциала» (стр. 6).

Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ Бушарла получал, по существу, так же, как Хайнд, хотя и в более доступной форме. Он сначала доказывал — примерно так же, как это делается и теперь в учебниках, — что «дуга больше синуса и меньше касательной» (стр. 29). Но то обстоятельство, что отсюда следует

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{\sin x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. что отношение $\frac{\sin x}{x}$ лежит между $\cos x$ и 1, при этом не упоминалось даже. Вместо этого, аналогично Хайнду, Бушарла писал:

«Из сказанного выше следует, что предел отношения синуса к дуге есть единица; ибо когда дуга h . . . становится нулем, в силу чего синус сливается с тангенсом, то тем более синус сливается с дугой, которая заключена между тангенсом и синусом; следовательно, в случае предела мы имеем $\frac{\sin h}{\text{дуга}\, h}$ или же, лучше, $\frac{\sin h}{h} = 1$» (стр. 29). То обстоятельство, что при $h = 0$ отношение $\frac{\sin h}{h}$ «обращается» в $\frac{0}{0}$, т. е. вообще не определено, а заключение сделано на том основании только, что «синус сливается с дугой», когда последняя обращается в 0, также не смущало Бушарла, как не смущало оно и Хайнда.

Приведенных здесь сведений о трактовке понятия предела в учебниках Хайнда и Бушарла достаточно, по-видимому, для понимания тех мест в рукописи «О неоднозначности терминов «предел» и «предельное значение», в которых Маркс критикует этих авторов за актуальный подход к пределу (и к которым относятся примечания [90–92]).

Для понимания других мест рукописей — и, особенно, характеризующих отношение Маркса к трактовкам предела, более близким к современной,— необходимо еще привести некоторые сведения, относящиеся к понятию предела в других источниках, которыми пользовался Маркс, прежде всего, в большом «Трактате» Лакруа о дифференциальном и интегральном исчислении, 1810.

Следуя Лейбницу, Лакруа считал всякую функцию подчиняющейся «закону непрерывности» в своих изменениях, а переход к пределу — выражением этого закона, «т. е. закона, который соблюдается при описании линий движением и согласно которому последовательные точки одной и той же кривой следуют друг за другом без всякого промежутка» (стр. XXV). Ибо так как изменение величины нельзя изучать, не рассматривая двух ее различных значений, между которыми заведомо есть промежуток, то закон непрерывности должен выражаться в том, что «чем более мал этот промежуток, тем более мы приближаемся к закону, о котором идет речь и которому только предел полностью соответствует» (там же). Этой ролью непрерывности в математическом анализе Лакруа и объясняет то, что ему представляется целесообразным «употреблять метод пределов» (стр. XXIV) при построении систематического курса математического анализа.

Понятия «бесконечного» и «бесконечно малого» Лакруа считал определенными только отрицательно, т. е. как «исключающие всякую границу как в смысле великости, так и в смысле малости, что дает только ряд отрицаний и никогда не могло бы образовать положительного понятия» (стр. XIX). В примечании на этой странице он добавляет: «Бесконечное есть необходимо то, о чем утверждают, что границы его les limites не могут быть достигнуты ни при какой его указуемой величине». Иначе говоря, Лакруа не допускал никакой актуальной бесконечности: ни актуально бесконечно большого, ни актуально бесконечно малого.

Понятие «предела» вводилось Лакруа следующим образом:

«Рассмотрим сначала очень простую функцию $\frac{ax}{x+a}$, в которой предположим x положительным и неограниченно возрастающим; результат

$$\frac{a}{1+\frac{a}{x}},$$

полученный делением на x обоих членов этой дроби, показывает, очевидно, что функция всегда остается меньшей, чем a, но что она постоянно приближается к a, так как часть $\frac{a}{x}$ ее знаменателя все более и более убывает и может быть сделана сколь угодно малой. Разность между a и предложенной дробью, которую вообще можно выразить через

$$a-\frac{ax}{x+a}=\frac{a^2}{x+a},$$

становится тем меньшей, чем больше x, и *может быть сделана меньше любой данной величины*, *сколь бы мала эта величина ни была*; *так что предложенная дробь может приближаться к a сколь угодно близко*: a есть, следовательно, *предел* функции $\frac{ax}{x+a}$ относительно неограниченного возрастания x.

В свойствах, которые я только что сформулировал, и состоит истинное значение, которое нужно придавать слову *предел*, чтобы включить в него все то, что может здесь понадобиться» (стр. 13—14).

Предположения о монотонности или кусочной монотонности функции у Лакруа уже нет, и предел у него обычно не односторонний: переменная может любым образом приближаться к своему предельному значению. Вместо понятия абсолютной величины Лакруа употребляет, хотя и не систематически, выражение «величина без знака», смысл которого, однако, остается еще неуточненным. Он подчеркивает также, что функция может не только достигать своего предельного значения, но и «переходить» через него, вообще, колебаться вокруг него. Но ограничения, состоящего в том, что при приближении к своему предельному значению α аргумент, относительно которого происходит переход к пределу, предполагается не достигающим α, т. е. что предел не понимается актуально, Лакруа еще в явной форме не сформулировал. Поскольку функции, с которыми он имел дело, были непрерывными, т. е. рассматриваемые им пределы совпадали с значениями функции для предельного значения аргумента, он позволял себе иногда выражаться так, как говорил бы и человек, который считает, что при предельном переходе приближение аргумента к его предельному значению должно завершаться достижением им этого значения.

Следует еще отметить также, что одно и то же слово «предел» (limité) Лакруа употреблял как для обозначения *предела* — термина, который, как мы видели, понимался уже им в гораздо более общем, более точном и близком к современному смысле, чем тот, который имело это понятие в критикуемых Марксом учебниках Хайнда и Бушарла, так, в некоторых случаях, и для обозначения приближенных значений функции.

Всех этих сведений о понятии предела в большом «Трактате» Лакруа — которым, как мы знаем, Маркс пользовался всегда как наиболее надежным (из доступных ему) источником информации об основных понятиях математического анализа, таких, как «функция», «предел» и др.,— достаточно, по-видимому, для понимания того, что именно имел в виду Маркс, когда замечал кратко о понятии предела в трактовке Лакруа, что «эта категория, которую ввел в широкий обиход в [математическом] анализе главным образом Лакруа, приобретает важное значение, как замена для категории «минимального выражения» (стр. 129). Ясно, прежде всего, что Маркс действительно понимал употреблявшееся им, в связи с неоднозначностью термина «предел», понятие «абсолютно минимального выражения» в том самом смысле, в каком теперь мы понимаем понятие предела. Ясно также, что он предвидел, что понятию предела, понимаемому по Лакруа, предстоит в дальнейшем, когда оно полностью вытеснит, очевидно, менее удовлетворительные понятия «предела», сделать ненужным введение особого — нового — понятия «абсолютно минимального выражения», предстоит, иными словами, заменить это последнее.

В связи с тем же абзацем из рукописей Маркса, о котором шла речь только что, а также с рядом других мест из этих рукописей, следует, вероятно, привести еще относящиеся к понятию предела слова Лагранжа из его введения к «Теории аналитических функций» (Соч. Лагранжа, т. IX, Париж, 1881).

Говоря о попытках Эйлера и Даламбера рассматривать бесконечно малые разности как абсолютные нули, лишь отношения которых действительно входят в исчисление, причем рассматриваются как пределы отношений конечных или неопределенно больших (limes ou indéfinies) разностей, Лагранж пишет:

«Но нужно признать, что эта идея, хотя и верная сама по себе, недостаточно ясна, чтобы служить [исходным] принципом для науки, достоверность которой основана на очевидности, и особенно для того, чтобы быть предложенной начинающим» (стр. 16).

Ниже он замечает — в связи с Ньютоновским методом последних отношений исчезающих количеств,— что «этот метод, равно как и метод пределов, о котором мы говорили выше и который, в сущности, есть только его алгебраический перевод, имеет большой недостаток, состоящий в том, что он рассматривает количества в таком состоянии, когда они перестают, так сказать, быть количествами; ибо, хотя мы хорошо понимаем отношения двух количеств, пока они остаются конечными, с этим отношением разум не связывает уже какой-нибудь ясной и точной идеи, как только члены его, один и другой, становятся одновременно нулями» (стр. 18).

И Лагранж переходит тут же к попыткам «искусного английского геометра» Ландена справиться с этими трудностями, попыткам, которые он высоко оценивает, хотя и считает метод Ландена чересчур громоздким (см. Приложение, «Анализ разностей» Джона Ландена, стр. 581—586).

О себе же Лагранж пишет, что еще в 1772 г. он утверждал, «что теория разложения функций в ряды содержит истинные принципы дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых или пределов» (стр. 19).

Таким образом, ясно, что Лагранж считал метод пределов не более совершенным, чем метод актуально бесконечно малых, и что это его мнение было связано с тем, что и предел, о котором в анализе шла речь, понимался актуально: как «последнее» значение функции для «последнего» («исчезающего») значения аргумента.

О ЛЕММАХ НЬЮТОНА, ЦИТИРУЕМЫХ МАРКСОМ

Упоминаемые Марксом на отдельном листке, приложенном к черновому наброску исторического хода развития дифференциального исчисления, схолия к лемме XI 1-й книги «Начал» Ньютона и лемма II 2-й книги «Начал» посвящены основным понятиям математического анализа, используемым Ньютоном,— понятиям *предела* и *момента*.

В поучении (схолии) к лемме XI первой книги «Математических начал натуральной философии» Ньютон пытается объяснить понятия «предельного отношения» и «предельной суммы» с помощью не очень четких соображений онтологического характера: «метафизических, не математических допущений», как их характеризует Маркс. Именно, Ньютон пишет: «Делают возражение, что для исчезающих количеств не существует «предельного отношения», ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания, не есть предельное, после же исчезания нет никакого отношения. Но при таком и столь же натянутом рассуждении окажется, что у тела, достигающего какого-либо места, где движение прекращается, не может быть «предельной» скорости, ибо та скорость, которую тело имеет ранее, нежели оно достигло этого места, не есть «предельная», когда же достигло, то нет скорости. Ответ простой: под «предельною» скоростью надо разуметь ту, с которою тело движется не перед тем как достигнуть крайнего места, где движение прекращается, и не после того, а когда достигает, т. е. именно ту скорость, обладая которою тело достигает крайнего места и при которой движение прекращается. Подобно этому под предельным отношением исчезающих количеств должно быть разумеемо отношение количеств не перед тем, как они исчезают, и не после того, но при котором исчезают. Точно так же и предельное отношение зарождающихся количеств есть именно то, с которым они зарождаются. Предельная сумма зарождающихся или исчезающих количеств есть та составленная из них сумма, когда они, увеличиваясь или уменьшаясь, только начинают или прекращают быть. Существует такой предел, которого скорость в конце движения может достигнуть, но не может перейти, это и есть предельная скорость. Такова же причина существования предела зарождающихся или исчезающих количеств и пропорций» (И. Ньютон, Математические начала натуральной философии. Перевод А. Н. Крылова, Известия Николаевской морской академии, Спб., 1915, стр. 64).

В современной математике «скорость тела в данный момент t_0» определяется с помощью математического понятия предела, и можно привести много соображений, в том числе и онтологического характера, в пользу естественности такого определения. Однако естественность определения скорости тела в данный момент t_0 через некоторый предел отношения исчезающих количеств не может служить еще ни доказательством того, что соответствующий предел существует, ни тем более оправданием определения самого этого предела как «отношения количеств не перед тем, как они исчезают, и не после того, но при котором исчезают», т. е. как некоторого отношения нулей, значение которого (этого отношения) как-то должно быть определено тем, что тело должно иметь скорость и в момент, когда оно достигает крайнего места, где движение прекращается. Ясно, однако, что из такого «определения» нельзя извлечь способов математического вычисления соответствующего предела и что, в сущности, здесь перед нами круг: *скорость в момент* t_0 фактически понимается как некоторый *предел*, *предел* же, наоборот, определяется через *скорость в момент* t_0, существование которой в таком случае выступает действительно как некоторое «метафизическое, не математическое допущение» *.

В лемме II второй книги «Математических начал натуральной философии» (там же, стр. 296—298) содержится следующее пояснение понятия «момента» (или бесконечно малого): «Я рассматриваю здесь... количества как неопределенные и изменяющиеся и как бы возрастающие или убывающие от постоянного движения или течения и их мгновенные приращения или уменьшения разумею под словом *моменты*, так что приращения почитаются за положительные, или прибавляемые, моменты, уменьшения — за вычитаемые, или отрицательные. Но озаботься, чтобы не принимать за таковые конечных частиц. Конечные частицы не суть моменты, но сами суть количества, из моментов происходящие. Надо подразумевать, что это суть лишь едва-едва зарождающиеся начала конечных величин. Поэтому в этой лемме никогда не рассматриваются величины моментов, но лишь их начальные отношения. То же самое получится, если вместо моментов брать или скорости увеличений или уменьшений, или же какие угодно конечные количества, этим скоростям пропорциональные» (там же, стр. 296—297). Естественно, что это пояснение — в котором Ньютон опять-таки прибегает к «метафизическим, не математическим допущениям», на этот раз относительно сущности дифференциалов («моментов»),— должно было прежде всего заинтересовать Маркса.

Но лемма эта могла привлечь его внимание и поскольку в ней содержится известная попытка Ньютона доказать формулу для дифференциала произведения двух функций, не прибегая к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков.

Эта (неудавшаяся) попытка состоит в следующем. Пусть $A-\frac{1}{2}a$ — значение функции $f(t)$ в точке t_0, $B-\frac{1}{2}b$ — значение функции $g(t)$ в той же точке t_0, a и b — приращения соответственно функций f и g на отрезке $[t_0, t_1]$. (Ниже мы их обозначаем также через Δf и Δg соответственно.) Тогда приращение произведения $f(t)\cdot g(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ есть

$$\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}b\right)-\left(A-\frac{1}{2}a\right)\left(B-\frac{1}{2}b\right),$$

т. е. $Ab+Ba$, что Ньютон и принимает за дифференциал («момент») произведения функций f и g в точке t_0. Но здесь $Ab+Ba$ есть не

* Состоящее в том, что отражение принимается за отражаемый объект: образуемое нашим мышлением в познавательных целях абстрактное математическое понятие принимается за реально существующий идеальный объект.

$f(t_0)\,\Delta g+g(t_0)\,\Delta f$, а $\left(f(t_0)+\frac{1}{2}\,\Delta f\right)\Delta g+\left(g(t_0)+\frac{1}{2}\,\Delta g\right)\Delta f$, т. е. отличается от $f(t_0)\,\Delta g+g(t_0)\,\Delta f$ на ту самую величину $\Delta f\cdot\Delta g$, отбрасывания которой Ньютон хотел избежать. Отождествляя, однако (хотя и молча), $Ab+Ba$ с $f(t_0)\,\Delta g+g(t_0)\,\Delta f$, Ньютон именно это отбрасывание и производил.

Как это явствует из первых набросков работы о дифференциале (см., например, стр. 79), Маркс сначала хотел осветить исторический ход развития дифференциального исчисления на примере истории теоремы о дифференциале произведения. Не приходится поэтому сомневаться в том, что лемма II должна была и в этой связи привлечь к себе внимание Маркса.

Поскольку в источниках, к которым относятся выписки Маркса, лемма XI первой книги «Начал» и лемма II второй книги специально не упоминаются, есть все основания думать, что Маркс выделил их, обратившись непосредственно к «Началам» Ньютона.

Так как определение предела отношения исчезающих количеств через скорость тела в данный момент t_0 не содержит способа вычисления этого предела, Ньютону фактически приходилось пользоваться в целях такого вычисления не этим определением, а некоторыми предложениями о пределах, позволяющими сводить вычисление пределов отношений исчезающих количеств к вычислению таких пределов, численное значение которых представлялось полностью, и притом достаточно естественно, определенным. Роль такого предложения играет у Ньютона прежде всего лемма I из первого отдела его первой книги «Начал»: «О методе первых и последних отношений, при помощи которого последующее доказывается». В замечаниях, относящихся к истории дифференциального исчисления, Маркс упоминает эту лемму вместе со схолией к лемме XI (см. стр. 139, 141).

Лемма I гласит: «Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут в пределе равны» (И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, Спб., 1915, стр. 53).

Однако в доказательстве этой леммы существование предела как актуально достигаемого *в конце* рассматриваемого промежутка времени фактически предполагалось молча. Действительно, доказательство состояло в опровержении того, что достигаемые в «конце этого времени» значения количеств (их «пределы») могут отличаться друг от друга.

Таким образом, *предел* всегда понимался Ньютоном актуально и поэтому вряд ли превосходил — в отношении математической точности и обоснованности — Лейбницевы *актуально бесконечно малые* или соответствующие им *моменты*, которыми, как известно, Ньютон на практике и пользовался.

ОБ ИСЧИСЛЕНИИ НУЛЕЙ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Для понимания таких мест в рукописях Маркса, в которых отношение $\frac{dy}{dx}$ рассматривается как отношение нулей, в точности равное при всяком значении переменной x значению производной от y по x при этом значении x и в то же время такое, с которым можно оперировать, как с обыкновенной дробью,— приравнивать, например, произведение $\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ «дроби» $\frac{du}{dx}$ («сокращать» на dv), существенно знакомство с попыткою Эйлера построить дифференциальное исчисление как исчисление нулей. Эта попытка нуждается в освещении также и в связи с тем, что в списке литературы, приложенном к наброскам очерка истории дифференциального исчисления (см. стр. 138, 139), Маркс специально отметил главу III «Дифференциального исчисления» Эйлера, посвященную ее изложению, и что он называл исчисление Эйлера «рационалистическим».

«Дифференциальное исчисление» великого математика, члена Петербургской Академии наук Леонарда Эйлера было выпущено в свет Петербургской Академией в 1755 г. В основе этого труда лежит попытка рассматривать дифференциалы как в точности равные нулю по величине, но в то же время как разные нули: нули с «историей» их происхождения, зафиксированной в различии обозначений (dx, dy и т. п.) и позволяющей считать их именно такими нулями, отношение которых $\frac{dy}{dx}$, где $y = f(x)$, и отличается тем, что оно есть производная $f'(x)$ и что с ним можно оперировать, как с обыкновенной дробью.

Эта попытка была предпринята Эйлером с целью освободить математический анализ от трактовки дифференциалов как актуально бесконечно малых величин, носящих явно противоречивый характер (являющихся в некотором смысле и нулями и не-нулями одновременно). Утверждения о том, что «чистый разум якобы признает возможность того, что тысячная часть кубического фута вещества лишена всякой протяженности», Эйлер считал «совершенно недостаточными» (по смыслу в контексте «недопустимыми», см. Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, М.—Л., 1949, стр. 90). «Количество бесконечно малое есть не что иное, как исчезающее, и потому оно точно равно нулю. С этим согласуется и такое определение бесконечно малых, согласно которому они меньше всякого могущего быть заданным количества. Действительно, если количество будет столь мало, что оно меньше всякого могущего быть заданным количества, то оно заведомо не может быть не равным нулю; ибо если бы оно не было равно нулю, то можно было бы задать количество, равное ему, что противно предположению. Итак, если кто спросит, что такое бесконечно малое количество в математике, то мы ответим, что оно точно равно нулю. Следовательно, в этом понятии не кроется никаких тайн, какие обычно ему приписываются и которые для многих делают исчисление бесконечно малых весьма подозрительным» (там же, стр. 91).

Так как простое отождествление дифференциалов с нулями заведомо не дает еще дифференциального исчисления, то Эйлер вводит «разные» нули, устанавливая для них два вида равенства: «арифметическое» и «геометрическое». В «арифметическом» смысле все нули равны между собою, и при a, не равном какому-нибудь нулю, $a + 0$ всегда равно a независимо от того, какой именно «нуль» прибавляется к a. В «геометрическом» же смысле равны между собою только такие два нуля, «отношение» которых равно единице.

Эйлер не объясняет при этом, что именно он понимает под «отношением» двух нулей. Ясно только, что он распространяет на эти «отношения» обычные свойства отношений отличных от нуля величин и что фактически под отношением двух «нулей»: dy и dx — понимается то самое, что на языке современного математического анализа выражается термином $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, почему Эйлерова теория «нулей» и не оказалась освобождающей математический анализ от необходимости введения понятия предела (и от трудностей, связанных с этим понятием).

Поскольку Эйлеровы нули могут быть и разными «нулями» (в «геометрическом» смысле не равными между собой), для них нужно было иметь и разные знаки. «Два нуля,— пишет Эйлер,— могут иметь друг к другу любое геометрическое отношение, хотя с арифметической точки зрения их отношение есть отношение равенства. Итак, поскольку между нулями может иметь место любое отношение, то для того, чтобы эти различные отношения выразить, нарочно пользуются различными символами, особенно тогда, когда требуется определить геометрическое отношение двух разных нулей. Но в исчислении бесконечно малых ничего больше и не делается, как находится отношение между различными бесконечно малыми. Поэтому, если мы не будем пользоваться для их обозначения различными знаками, то получится величайшая путаница и никак нельзя будет из нее выбраться» (стр. 91).

Если при таком истолковании dx и dy как «разных» нулей, отношение которых равно $f'(x)$, мы перейдем от $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ к $dy = f'(x)\,dx$, то получим равенство, левая и правая части которого будут равны между собою как в «арифметическом», так и в «геометрическом» смысле. Действительно, слева и справа будут стоять некоторые «нули», а все «нули», как уже было отмечено, в «арифметическом» смысле равны между собою. Поскольку же отношение dy к dx приравнивается *полностью* к $f'(x)$,— т. е. как в «арифметическом», так и в «геометрическом» смысле [отношение $\left(\frac{dy}{dx}\right) : f'(x)$, где $y = f(x)$, считается равным единице, даже если $f'(x) = 0$],— и на «отношения» нулей распространяются правила оперирования с обычными отношениями, то мы получаем

$$dy : f'(x)\,dx = \left(\frac{dy}{dx}\right) : f'(x) = 1,$$

или, иначе говоря, dy и $f'(x)\,dx$ равны между собою и в «геометрическом» смысле.

По-видимому, именно эту «полную» эквивалентность равенств $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ и $dy = f'(x)\,dx$ в смысле не только возможности перехода от каждого из них к другому, но и трактовки при этом (и в силу этого) «отношения» «дифференциальных частиц» dy и dx как обычного отношения (как дроби), несмотря на то что в качестве «дифференциальных частиц» dy и dx суть нули («разные» нули, по-разному и обозначаемые), имеет в виду и Маркс, когда он преобразует первое из этих равенств во второе (см. стр. 147).

Более подробные сведения об Эйлеровых нулях и истории идей, связанных с ними, читатель может найти в статье: A. P. Juschkewitsch, Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis, In: Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonard Eulers, Berlin, 1959, стр. 224—244 (А. П. Юшкевич, Эйлер и Лагранж об основаниях анализа, Сборник в честь 250-летия со дня рождения Леонарда Эйлера).

Здесь мы ограничимся еще только двумя замечаниями Эйлера, которые могут оказаться полезными при чтении рукописей Маркса. Первое относится к понятию о дифференциале как главной части приращения функции. Это понятие, играющее существенную роль в математическом анализе и особенно в его приложениях, вводилось Эйлером следующим образом: «Пусть приращение w, которое получает переменная x, будет очень малым, так что в выражении [для приращения Δy функции y от x, т. е. в] $Pw + Qw^2 + Rw^3 +$ и т. д. * члены $Qw^2 + Rw^3$, а тем более остальные, становятся столь малыми, что в выражении, где не требуется очень большая точность, ими можно пренебречь по сравнению с первым членом. Тогда, зная первый дифференциал $P\,dx$, мы знаем, правда, приближенно, и первую разность, ибо и она будет равна Pw; это дает немалую пользу во многих случаях, в которых анализ применяется к практическим задачам» (там же, стр. 105). Иными словами, заменив в выражении дифференциала функции y от x (т. е. в $P\,dx$, где P — производная от y по x) дифференциал dx, равный у Эйлера нулю, на конечное приращение w переменной x, мы получим то самое понятие дифференциала как главной части приращения функции, которое является исходным в современных курсах математического анализа.

Аналогичное понятие дифференциала как главной части приращения функции имеется и в рукописях Маркса (см. описание рукописи 2763, стр. 297).

Другое замечание относится к вопросу о выборе обозначений, специфических для дифференциального исчисления, т. е. для дифференциалов и производных. Здесь прежде всего представляет интерес то обстоятельство, что Эйлер толкует точечные обозначения Ньютона как знаки для дифференциалов (а не для производных). Действительно, он пишет: «Название «флюксия», которое применялось Ньютоном первоначально для обозначения скорости возрастания, было по аналогии перенесено на бесконечно малые приращения, которые принимает количество, когда оно как бы течет» (стр. 103). И тут же ниже: «Дифференциалы, которые они (англичане.— *Ред.*) называют флюксиями, у них принято обозначать точками, которые ставятся над буквами, так что $\dot{y}$

* «Дифференциальное исчисление» Эйлера начиналось с исчисления конечных разностей и теоремы, гласящей, что «если переменная величина x принимает приращение, равное w, то происходящее вследствие этого приращение какой-либо функции от x можно выразить в виде $Pw + Qw^2 + Rw^3 +$ и т. д., причем это выражение либо конечно, либо продолжается бесконечно» (стр. 103, см. также стр. 61). Доказательство этой теоремы было основано на том, что класс функций, рассматривавшихся в нем Эйлером, состоял из степенной функции, многочленов и элементарных трансцендентных функций, разложенных в бесконечные степенные ряды, с которыми он разрешал себе оперировать, как с конечными многочленами.

означает у них первую флюксию $\dot{y}$, $\ddot{y}$ — вторую флюксию, $\dddot{y}$ — третью флюксию и т. д.».

Этот способ обозначений, однако, не удовлетворял Эйлера, и он продолжает так: «Так как способ обозначения зависит от произвола, то эти обозначения нельзя отвергать, если число точек невелико, так что их легко можно сосчитать. Однако если нужно надписывать много точек, то этот способ создает величайшую путаницу и множество неудобств. Действительно, десятый дифференциал, или десятую флюксию, крайне неудобно обозначать таким образом: $\overset{\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots}{y}$, тогда как наш способ обозначения $d^{10}y$ легко понятен. Бывают же случаи, когда нужно выразить дифференциалы гораздо более высоких и даже неопределенных порядков; в этих случаях способ англичан становится вовсе не пригодным» (стр. 103—104).

Об аналогичном отождествлении (в некоторых случаях) Ньютоном и его последователями «флюксий» $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. п. с «моментами» (т. е. дифференциалами) $\tau\dot{x}$, $\tau\dot{y}$ и т. п. (где τ — «бесконечно малая часть времени») говорит и Маркс, когда он замечает, что «τ у Ньютона в его анализе основных функций никакой роли не играет и поэтому может быть опущено» (стр. 145) и что Ньютон и сам охотно отбрасывает τ (см. там же). В соответствии с этим Марксом употребляются, когда он говорит о способе Ньютона, и такие выражения, как «дифференциалы от y в виде $\dot{y}$, от u в виде $\dot{u}$, от z в виде $\dot{z}$» (см. стр. 145).

Заметим также, что Маркс особо подчеркивал преимущество Лейбницевой символики дифференциального исчисления перед символикой, принятой у Ньютона и его последователей (см. стр. 173).

«АНАЛИЗ РАЗНОСТЕЙ» ДЖОНА ЛАНДЕНА

Упоминания о намерении Маркса ознакомиться в Британском музее с трудами Джона Ландена встречаются в ряде математических рукописей Маркса (см. стр. 75).

Маркс видел в Ландене возможного предшественника Лагранжа, стремившегося «возвратиться к строго алгебраической основе дифференциального исчисления» (стр. 199), и предполагал, что метод Ландена должен быть аналогичен предложенному самим Марксом методу «алгебраического дифференцирования», но сомневался в том, что Ландену удалось понять существенное отличие этого метода от других. В справедливости этих предположений Маркс и хотел убедиться, посмотрев в Музее книгу «The Residual Analysis» Ландена.

Сведения об этой книге Маркс мог получить из двух, заведомо бывших в его распоряжении, источников: из учебника Хайнда (Hind, 2-е изд., стр. 128) и большого «Трактата» Лакруа (т. I, стр. 239—240),— впрочем, почти идентичных, поскольку Хайнд, по существу, только перевел на английский язык соответствующее место из Лакруа. У Хайнда мы читаем: «Однако идея построить исчисление этого рода [т. е. дифференциальное исчисление] на чисто алгебраических основах, по-видимому, возникла впервые у Джона Ландена, известного английского математика, творческий расцвет которого приходится на середину 18-го века. Первой задачей его «*Анализа разностей*» («*The Residual Analysis*») является получение алгебраического разложения разности двух одинаковых функций от величин x и x', поделенной на разность самих этих величин, или разложение выражения $\frac{f'(x')-f(x)}{x'-x}$, а затем отыскание того, что называется *специальным значением* (*the special value*) полученного результата, когда x' полагается $= x$ и когда поэтому уже исчез всякий след делителя $x' - x$». (У Лакруа точнее: «... когда же это частное $[f(x') - f(x)/x' - x]$ уже получено так, что в нем не сохраняется никакого следа делителя $x' - x$, в нем полагают $x' = x$, так что последняя цель исчисления состоит в том, чтобы дойти до некоторого специального значения (*special value*) вышеприведенного отношения».)

Марксу, по-видимому, не удалось осуществить своего намерения посмотреть в Британском музее книгу Ландена. Анализ содержания этой книги полностью подтверждает, однако, высказанные Марксом предположения, которые он и сам считал «весьма вероятными».

Полное название книги Ландена: *The Residual Analysis*, a new branch of the algebraic art, of very extensive Use, botch in Pure Mathematics, and Natural philosophy. Book I. By *John Landen*. London, Printed for the Auther; and sold by L. Haws, W. Clarke, and R. Collins, at the Red Lion in Pater-noster Row, MDCCLXIV (*Анализ разностей*; новая ветвь алгебраического искусства, с очень обширными приложениями как в чистой математике, так и в натуральной философии. Книга I. [Автор] *Джон Ланден.* Лондон, напечатана для автора; продается у L. Haws, W. Clarke и R. Collins в «Красном Льве» на Pater-noster Row, 1764).

Предисловие начинается словами: «Натолкнувшись некоторое время тому назад на новый и легкий метод исследования биномиальной теоремы с помощью чисто алгебраического процесса, я вознамерился рассмотреть, не могут ли средства, помогшие мне исследовать эту теорему, оказаться полезными в исследовании других теорем, и я вскоре нашел, что некоторый вычислительный прием, основанный на таких средствах, может быть применен во многих изысканиях... Этот особый прием я назвал *Анализом Разностей* (*the Residual Analysis*), так как во всех исследованиях, где он применяется, основными средствами, посредством которых мы получаем желаемые заключения, являются такие количества и алгебраические выражения, которые у математиков называются разностями (residuals)».

Далее автор критикует исчисление флюксий Ньютона и анализ бесконечно малых Лейбница, как основанные на введении в математику неоправданных новых «начал» (принципов). В применении к исчислению флюксий Ньютона таковыми он считает объяснения значений вводимых в теорию новых терминов с помощью не существующих в действительности, но тем не менее допускаемых (как само собою понятные) *воображаемых движений* и *фигуральных непрерывных течений*, которые не вносят в математику каких-либо ясных и четких идей, но заставляют говорить, например, о таких — по меньшей мере непонятных — вещах, как *скорость времени*, *скорость скорости* и т. п., как о даже не нуждающихся в пояснениях (и поэтому, наоборот, могущих служить средствами определения некоторых точных математических понятий). В анализе бесконечно малых Лейбница он считает неоправданным введение, в качестве нового «начала», *бесконечно малых величин* и величин *бесконечно меньших, чем бесконечно малые величины*, отбрасывание которых (когда не идет речь о получении приближенных результатов) есть «очень неудовлетворительный (если не ошибочный) способ избавиться от таких количеств» (стр. IV). Ланден полагает, что математика не нуждается в таких — чуждых ей — принципах и что его «Анализ разностей», «не допускающий никаких начал, помимо тех, которые еще с древности приняты в Алгебре и Геометрии», «не менее (если не более) полезен, чем исчисление флюксий или дифференциальное исчисление» (стр. IV).

Исходным пунктом анализа разностей Ландена является формула

$$\frac{a^r - b^r}{a - b} = a^{r-1} + a^{r-2}b + \cdots + b^{r-1} \tag{1}$$

(r — целое положительное число), с помощью которой и выводимых из нее формул

$$\frac{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}}{v - w} = v^{\frac{m}{r}-1}\, \frac{1 + \frac{w}{v} + \left.\frac{w}{v}\right]^2 + \ldots + \left.\frac{w}{v}\right]^{m-1}}{1 + \left.\frac{w}{v}\right]^{\frac{m}{r}} + \left.\frac{w}{v}\right]^{\frac{2m}{r}} + \ldots + \left.\frac{w}{v}\right]^{\frac{(r-1)m}{r}}}, \tag{2}$$

$$\frac{v^{-\frac{m}{r}} - w^{-\frac{m}{r}}}{v - w} = -v^{-1} \cdot w^{-\frac{m}{r}}\, \frac{1 + \frac{w}{v} + \left.\frac{w}{v}\right]^2 + \ldots + \left.\frac{w}{v}\right]^{m-1}}{1 + \left.\frac{w}{v}\right]^{\frac{m}{r}} + \left.\frac{w}{v}\right]^{\frac{2m}{r}} + \ldots + \left.\frac{w}{v}\right]^{\frac{(r-1)m}{r}}} \tag{3}$$

(где m и r — целые положительные числа, $\frac{w}{v}\Big]$ соответствует нашему $\left(\frac{w}{v}\right)$ *)
Ланден получает производную от степенной функции x^p для целого и дробного (положительного и отрицательного) показателя степени p как «специальное значение» отношения

$$\frac{x^p - x_1^p}{x - x_1}$$

при $x = x_1$. Иными словами, он доопределяет отношение $\frac{x^p - x_1^p}{x - x_1}$ при $x = x_1$ так, чтобы и для $x = x_1$ сохраняли силу равенства, соответствующие формулам (1), (2), (3).

«Специальное значение» отношения $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ (где $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$) при $x = x_1$ Ланден обозначает через $[x \overset{\prime}{-} y]$.

Переход к иррациональному показателю степени он осуществляет на примерах, начиная с того, что находит «специальное значение» для отношения $\frac{v^{4/3} - w^{4/3}}{v - w}$ при $v = w$ (т. е. производную по v от $v^{4/3}$) двумя разными способами: один раз по формуле (2) для $m = 4$, $r = 3$; другой раз по той же формуле, но — «так как $\frac{4}{3} = 1{,}3333$ и т. д.» — последовательно применяемой к парам: ($m = 13\,333$, $r = 10\,000$), ($m = 133\,333$, $r = 100\,000$) и т. д. От трудностей, связанных с тем, что этот процесс бесконечен, Ланден отделывается, замечая, что «последнее значение» для

$$\frac{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (13 333 и т. д. раз)}}{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (10 000 и т. д. раз)}}$$

«с очевидностью равно $\frac{4}{3}$, величине, из которой [число] 1,333 и т. д. получено (делением)» (стр. 7).

После этого он переходит к случаю, когда $\frac{m}{r} = \sqrt{2} = 1{,}4142$ и т. д., трактуя который по второму способу, т. е., как он сам замечает, «приближенно», но так, что всякий раз можно сделать еще «более приближенно», он снова заключает, что «последнее значение» для

$$\frac{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (14 142 и т. д. раз)}}{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (10 000 и т. д. раз)}}$$

---

* Чтобы получить, пользуясь (1), формулу (2), достаточно заметить, что

$$\frac{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}}{v - w} = \frac{v^m - w^m}{v - w} : \frac{v^m - w^m}{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}} = \frac{v^m - w^m}{v - w} : \frac{(v^{\frac{m}{r}})^r - (w^{\frac{m}{r}})^r}{v^{\frac{m}{r}} - w^{\frac{m}{r}}}.$$

Формула (3) легко выводится из формулы (2). Действительно,

$$\frac{v^{-\frac{m}{r}} - w^{-\frac{m}{r}}}{v - w} = \frac{(vw)^{\frac{m}{r}} \left(v^{-\frac{m}{r}} - w^{-\frac{m}{r}}\right)}{(vw)^{\frac{m}{r}} (v - w)} = -\frac{w^{\frac{m}{r}} - v^{\frac{m}{r}}}{(vw)^{\frac{m}{r}} (w - v)}.$$

«равно $\sqrt{2}$, величине, из которой [число] 1,4142 и т. д. получено (извлечением корня)» (стр. 8).

Не приходится удивляться тому, что Ланден не может построить свой «Анализ разностей», не прибегая в той или иной форме к понятию *предела*. Однако он фактически говорит о пределе в точности по Ньютону, трактуя предел как «последнее значение» (как конец) бесконечной (т. е. не имеющей конца) последовательности. Естественно, что на деле он этим определением не пользуется, но прибегает к таким средствам оценки точности приближений и сходимости (или расходимости) процесса их последовательного получения, которые подсказываются ему конкретным содержанием рассматриваемой задачи.

Как и другие математики его времени, Ланден считает возможным свободно пользоваться расходящимися рядами в формальных преобразованиях выражений с помощью бесконечных рядов, если последние играют при этом только роль промежуточного этапа в преобразовании. Если же ряд должен выражать значение какой-либо величины, подлежащей вычислению, то, чтобы им можно было воспользоваться, он должен быть сходящимся. Ланден не считает при этом необходимым объяснять, что именно он имеет в виду под *сходимостью* (или *расходимостью*) ряда, но, разложив (с помощью каких-нибудь формальных преобразований) функцию в ряд, он обычно указывает радиус сходимости полученного ряда, приводит и методы, позволяющие «улучшить» его сходимость (заменить ряд другим, сходящимся «более быстро» к тому же пределу). Таким образом, к числу «начал», которые «еще с древности приняты в алгебре и геометрии», Ланден, очевидно, причислял некоторые виды предельных переходов, с которыми как-то умел справляться на практике (когда шла речь о приближенных вычислениях). Но четкого общего понятия «сходимости» и «предела» у него не было. Не было и методов вычисления пределов (или обнаружения их несуществования), применимых к достаточно широким классам выражений. Ланден искал поэтому такое определение производной («специального значения»), которое содержало бы в себе непосредственно алгорифм ее нахождения.

Как и у Ньютона, у него шла речь при этом о функции от x как о некотором аналоге понятия действительного числа. Подобно тому, как всякое действительное число можно рассматривать как сумму (конечную или бесконечную) степеней основания 10, помноженных каждая на одну из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, так и всякая функция от x, по Ньютону, должна быть представимой в виде суммы (конечной или бесконечной) степеней основания x, помноженных каждая на числа (коэффициенты),— т. е. в виде степенного ряда. (Ряд считался «представляющим» данную функцию, заданную с помощью конечного «алгебраического» выражения, если он получался посредством формальных преобразований из выражения, задававшего функцию. Так, ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ считался «представляющим» функцию $\frac{1}{1-x}$, поскольку он мог быть получен делением 1 на $(1 - x)$ по способу деления многочленов.) Задача отыскания для функции $f(x)$ ее производной функции могла поэтому представляться сводящейся к аналогичной задаче для степени x^p и к задачам: зная производные от слагаемых (или сомножителей), найти производную суммы (или произведения). Именно эти задачи Ланден и решает прежде всего в своем «Анализе разностей». Распространение этих методов на функции от нескольких переменных и частные производные разных порядков сопряжено с рядом технических трудностей, с которыми Ланден справляется с помощью — иногда очень остроумных — формальных выкладок.

При этом молча предполагается обычно, что функция представляется соответствующим ей степенным рядом *однозначно*, т. е. что если два степенных ряда должны представлять одну и ту же функцию от x, то коэффициенты при одинаковых степенях у них должны быть равны (отсюда широкое пользование методом так называемых «неопределенных коэффициентов»).

В качестве примера, иллюстрирующего применение этих методов Ланденом, приведем предложенное им (с некоторыми уточнениями используемое и сейчас) доказательство биномиальной теоремы Ньютона для общего случая произвольного действительного показателя степени бинома. Поскольку Маркс — прежде всего в связи с теоремами Тейлора и Маклорена — придавал особое значение этой теореме Ньютона (см., например, стр. 193, 205), доказательство Ландена может представлять здесь для нас интерес и в этой связи.

Пусть

$$(a+x)^p = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \ldots, \tag{1}$$

где p — любое действительное число, A_1, A_2, A_3, A_4 — неопределенные коэффициенты, предполагаемые не зависящими от x. Полагая в обеих частях этого равенства $x = 0$, получим $A_1 = a^p$. Дифференцируя почленно равенство (1) по x (Ланден, конечно, говорит не о производных по x, а о соответствующих «специальных значениях», которые он уже умеет находить для Ax^r, где A не зависит от x, при любом действительном r), будем иметь

$$p\,(a+x)^{p-1} = A_2 + 2A_3x + 3A_4x^2 + \ldots \tag{2}$$

Умножая теперь обе части равенства (1) на p, а равенства (2) на $(a+x)$, получим, далее,

$$p\,(a+x)^p = pA_1 + pA_2x + pA_3x^2 + pA_4x^3 + \ldots, \tag{1'}$$

$$p\,(a+x)^p = aA_2 + \left.\begin{matrix} 2aA_3 \\ A_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 3aA_4 \\ 2A_3 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots, \tag{2'}$$

откуда, в силу предполагаемой однозначности разложения выражения $p\,(a+x)^p$ в ряд по степеням x,

$$aA_2 = pA_1, \qquad \text{или} \quad A_2 = \frac{p}{a}A_1 = pa^{p-1},$$

$$2aA_3 + A_2 = pA_2, \quad \text{или} \quad A_3 = \frac{p-1}{2a}A_2 = \frac{p\,(p-1)}{2}a^{p-2},$$

$$3aA_4 + 2A_3 = pA_3, \quad \text{или} \quad A_4 = \frac{p-2}{3a}A_3 = \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{2\cdot 3}a^{p-3},$$

. . . .

т. е. $(a+x)^p = a^p + \frac{p}{1}a^{p-1} + \frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}a^{p-2}x^2 + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{p-3}x^3 + \ldots,$

а это и есть биномиальная теорема Ньютона.

Хотя анализ разностей Джона Ландена не стал работающим инструментом у математиков: обозначения Ландена были слишком громоздки, и он — быть может, поэтому же — не дошел даже до теорем Тейлора и Маклорена, не следует думать, будто работы Ландена вообще не оказали влияния на развитие математики. Сам Ланден пишет, что ряд теорем из его «Анализа разностей» «привлек внимание м-ра Де Муавра, м-ра Стирлинга и других видных математиков» (стр. 45). В своем «Трактате» (т. I, стр. 240) Лакруа сообщает, что он использовал методы Ландена в «Дополнениях к элементам алгебры» для доказательства формулы бинома и разложения в ряд показательной и логарифмической функций. Книги же Лакруа пользовались большой популярностью у математиков.

Впрочем, внимание самого Лакруа было, по-видимому, обращено на Ландена Лагранжем, «Теорию аналитических функций» которого Лакруа положил в основу своего «Трактата». Во введении же к этой книге, говоря о трудностях, довлеющих над основными понятиями анализа у Ньютона, Лагранж писал: «Чтобы избежать этих трудностей, один искусный английский геометр, сделавший важные открытия в анализе, предложил недавно заменить метод флюксий, которому до тех пор неуклонно следовали все английские геометры, другим методом, чисто аналитическим и аналогичным дифференциальному методу, но в котором, вместо того чтобы употреблять только бесконечно малые или равные нулю разности переменных количеств, употребляют сначала различные значения этих количеств, которые затем приравнивают друг другу после того, как с помощью деления заставляют исчезнуть множитель, который это приравнивание обратило бы в нуль. Таким образом действительно избегают бесконечно малых и исчезающих количеств; но приемы и применения исчисления становятся затруднительными и мало естественными, и приходится согласиться с тем, что этот способ уточнения начал дифференциального исчисления лишает его основных преимуществ — простоты метода и легкости операций». (Помимо «Анализа разностей», Лагранж ссылается еще на «Рассуждение на ту же тему, опубликованное Ланденом еще в 1758 г.»; см. «Œuvres de Lagrange», т. IX, Paris, 1881, стр. 18.)

Последнее замечание Лагранжа связано, по-видимому, с тем, что Ланден пользовался очень громоздкими обозначениями и так и не дошел до понятия дифференциала и оперирующего с дифференциальными символами исчисления.

В отличие от Лагранжа, Лакруа отмечал уже, что метод Ландена «сводится, по существу, к методу пределов» («Traité...», стр. XVII).

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПО БУШАРЛА

Из книг по математическому анализу, имевшихся в распоряжении Маркса, наибольшее значение для понимания его рукописей имеет, по-видимому, учебник Бушарла «Элементы дифференциального и интегрального исчисления», с которым Маркс был знаком по английскому переводу с третьего французского издания (1826 г.), выполненному Блэклоком и вышедшему в свет в 1828 г.

Учебник этот пользовался большой популярностью и неоднократно переиздавался. Его 8-е издание, с примечаниями Лорана (M. H. Laurent), вышло в свет в Париже в 1881 г. Он был переведен и на ряд иностранных языков, в том числе и на русский.

Воспитанник Политехнической школы, профессор «трансцендентной» (высшей) математики, автор ряда учебников математики и механики, Бушарла (Boucharlat, Jean-Louis, 1775—1848) был в то же время поэтом и, с 1823 г., профессором литературы в Парижском Атенее. Связанные, по-видимому, с этим литературные достоинства и ясность изложения также немало способствовали популярности учебника Бушарла.

Таким образом, ясно, что Маркс не случайно обратил внимание на курс Бушарла.

В то же время, несмотря на претензию автора на большую строгость изложения и на то, что ему удалось усовершенствовать «алгебраический» метод Лагранжа с помощью теории пределов (см. предисловие к 5-му изданию, 1838 г., стр. VIII), математический уровень этого курса был еще очень невысок. Даже в 5-м (1838 г.), а не только в 3-м его издании, английским переводом которого пользовался Маркс, понятия переменной, функции, производной, дифференциала вводились так *:

---

* Маркс не только конспектирует этот учебник в ряде своих рукописей и полемизирует с автором по поводу его основных методологических установок, но и вкладывает много труда в фактическую проверку последних. Без знакомства с текстом учебника вряд ли можно поэтому обойтись. Здесь подробно излагается содержание первых двадцати параграфов курса Бушарла. Параграфы, специфичные для курса и особенно такие, к которым относятся критические замечания Маркса, приводятся полностью (в переводе). Места в рукописях, для понимания которых требуется знакомство с этими параграфами, сопровождаются ссылками на те страницы в Приложении, где излагается содержание этих параграфов.

«1. Говорят, что *переменная есть функция другой переменной*, когда первая равна некоторому аналитическому выражению, составленному из второй; например, y есть функция от x в следующих уравнениях:

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad y=x^3-3bx^2,\quad y=\frac{x^2}{a},\quad y=b+cx^3.$$

. . . .

3. Возьмем теперь уравнение

$$y=x^3 \tag{1}$$

и предположим, что y обращается в y', когда x становится $x+h$; мы будем иметь, следовательно,

$$y'=(x+h)^3$$

и, выполняя указанную операцию,

$$y'=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3;$$

если от этого уравнения мы отнимем уравнение (1), у нас останется

$$y'-y=3x^2h+3xh^2+h^3,$$

и, деля на h,

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2+3xh+h^2. \tag{2}$$

Посмотрим, чему учит нас этот результат:

$y'-y$ представляет приращение функции y, когда x получает приращение h, потому что эта разность $y'-y$ есть разность между новым состоянием величины переменной y и ее первоначальным состоянием.

С другой стороны, так как приращение переменной x есть h, то отсюда следует, что выражение $\frac{y'-y}{h}$ есть отношение приращения функции y к приращению переменной x. Рассматривая второй член уравнения (2), мы видим, что это отношение уменьшается вместе с уменьшением h и что, когда h становится нулем, это отношение обращается в $3x^2$.

Член $3x^2$ есть, следовательно, предел отношения $\frac{y'-y}{h}$; к этому члену оно стремится, когда мы заставляем h уменьшаться.

4. Так как в предположении, что $h=0$, приращение y также становится нулем, то $\frac{y'-y}{h}$ обращается в $\frac{0}{0}$, и поэтому из уравнения (2) получается

$$\frac{0}{0}=3x^2. \tag{3}$$

В этом уравнении нет ничего нелепого, так как алгебра учит нас, что $\frac{0}{0}$ может представлять какие угодно величины. С другой стороны, ясно, что, поскольку деление обоих членов дроби на одно и то же число не меняет значения дроби, мы можем заключить, что малость членов дроби нисколько не влияет на ее значение и что, следовательно, оно может оставаться тем же и когда ее члены достигли последней степени малости, т. е. обратились в нули.

Дробь $\frac{0}{0}$, встречающаяся в уравнении (3), есть символ, заменивший отношение приращения функции к приращению переменной; так как в этом символе не остается никакого следа этой переменной, представим его через $\frac{dy}{dx}$; тогда $\frac{dy}{dx}$ будет нам напоминать, что функцией была y, а переменной x. Но от этого dy и dx не перестанут быть нулями, и мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=3x^2. \tag{4}$$

$\frac{dy}{dx}$, точнее, его значение $3x^2$, есть дифференциальный коэффициент функции y.

Заметим, что так как $\frac{dy}{dx}$ есть знак, представляющий предел $3x^2$ (как это показывает уравнение (4)), то dx должно всегда находиться под dy. Однако, чтобы облегчить алгебраические операции, можно тут же избавиться от знаменателя в уравнении (4), и мы получим $dy=3x^2\,dx$. Это выражение $3x^2\,dx$ и называется дифференциалом функции y» (стр. 1—4).

В §§ 5—8 Бушарла находит dy на примерах:

$$y=a+3x^2,\quad y=\frac{1-x^3}{1-x},\quad y=(x^2-2a^2)(x^2-3a^2).$$

Во всех этих случаях выражение для наращенного значения y, т. е. (в обозначениях Бушарла) для y', равно $f(x+h)$, если $y=f(x)$ представляется в виде многочлена, расположенного по степеням h (с коэффициентами в x), после чего отношение $\frac{y'-y}{h}$ уже легко представляется многочленом того же рода. Полагание в последнем $h=0$ дает $\frac{dy}{dx}$, умножением которого на dx и завершается отыскание выражения для дифференциала dy.

«9. Само выражение dx есть дифференциал от x, ибо пусть $y=x$, тогда $y'=x+h$, следовательно, $y'-y=h$, и, значит, $\frac{y'-y}{h}=1$. Так как количество h не входит во второй член этого уравнения, то мы видим, что для того, чтобы перейти к пределу, достаточно изменить $\frac{y'-y}{h}$ в $\frac{dy}{dx}$, что даст $\frac{dy}{dx}=1$, следовательно, в нашем предположении,

$$dy=dx».$$

«10. Мы найдем так же, что дифференциал от ax есть $a\,dx$; но если бы мы имели $y=ax+b$, мы тоже получили бы $a\,dx$ для дифференциала, откуда следует, что константа b (не сопровождаемая переменной x) не дает никакого члена при дифференцировании, или, иначе говоря, совсем не имеет дифференциала.

Впрочем, можно заметить, что если $y=b$, то перед нами случай, где a есть нуль в уравнении $y=ax+b$ и где поэтому, так как $\frac{dy}{dx}=a$ сводится теперь к $\frac{dy}{dx}=0$, нет ни предела, ни дифференциала» (стр. 6).

Мы видим таким образом, что у Бушарла:

1) Нет ни определения предела, ни определений производной и дифференциала. Все эти понятия только поясняются на примерах, и притом только таких, где отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ представляется в виде многочлена, расположенного по степеням h, с коэффициентами в x. Отыскание предела этого отношения при $h \to 0$ трактуется при этом как полагание $h = 0$ в полученном многочлене. Вопросы о том, бывают ли другие случаи, можно ли «дифференцировать» в таких случаях, и если можно, то как, даже не упоминаются при этом.

2) Переход от производной $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ к дифференциалу $dy = \varphi(x)\,dx$ рассматривается как незаконная операция, выполняемая только в целях «облегчения» алгебраических выкладок.

3) Из того, что при $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x,\ h), \tag{A}$$

делается заключение, что и при $h=0$, т. е. когда $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ теряет смысл $\left(\text{обращается в } \frac{0}{0}\right)$, равенство (A) сохраняет силу, т. е. мы должны получить

$$\frac{0}{0} = \varphi(x,\ 0). \tag{B}$$

Иными словами, считается, что $\varphi(x,\ h)$ должна быть определена (и непрерывна) при $h = 0$ и что из равенства (A) равенство (B) логически следует $\left(\text{хотя выражение } \frac{0}{0} \text{ лишено смысла}\right)$.

4) Равенство нулю предела или дифференциала расценивается как свидетельствующее о том, что «нет ни предела, ни дифференциала», хотя в то же время dy и dx — всегда нули (если $\varphi(x) \not\equiv 0$, то дифференциал, равный $\varphi(x)\cdot 0$, существует; если же $\varphi(x) \equiv 0$, то нет). Но вопрос о том, какие нули считаются «существующими» и какие нет, при этом, очевидно, даже не возникает.

Неудивительно, что такой способ трактовки основных понятий дифференциального исчисления не мог удовлетворить Маркса. И действительно, уже первый его конспект начальных параграфов курса Бушарла (см. настоящее издание, стр. 314) содержит критические замечания в адрес автора. Но особенно Марксу не нравилось то, что основное понятие дифференциального исчисления — понятие *дифференциала* оказывалось необоснованным и введение его оправдывалось только тем, что оно «облегчает алгебраические операции» (см. рукопись «О дифференциале», стр. 63).

§ 11 книги Бушарла был посвящен замечанию, что «иногда приращение переменной бывает отрицательным; в этом случае нужно подставить $x - h$ вместо x и оперировать, как раньше». На примере $y = -ax^3$ при этом получалось $dy = -3ax^2\,dx$, и делалось заключение: «Мы видим, что это сводится к тому, чтобы предположить dx отрицательным в дифференциале от y, вычисленном в предположении положительного приращения». Но dx у Бушарла есть 0. Вопрос о том, что значит «отрицательный нуль», не приходил ему, однако, в голову. (Понятия «абсолютной величины» в источниках того времени вообще не было еще.)

Так как следующие три параграфа 12—14 особенно характерны для курса Бушарла и так как к ним относится ряд мест из рукописей Маркса, текст этих параграфов приводится здесь полностью.

«12. Прежде чем идти дальше, сделаем одно существенное замечание, именно, что если в уравнении, вторым членом которого является какая-нибудь функция от x и которое поэтому мы будем представлять в общем виде через $y = f(x)$, мы заменим x на $x + h$ и, расположив затем по степеням h, получим разложение

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{ и т. д.}, \tag{C}$$

то мы должны будем всегда иметь $y = A$. Действительно, если мы положим $h = 0$, то второй член сведется к A; что же касается первого члена, то. поскольку мы отмечали y штрихом только для того, чтобы указать, что y испытывала определенное изменение, когда x обращалась в $x + h$, нам придется убрать штрих при y, когда h будет нулем, и уравнение (C) сведется тогда к

$$y = A.$$

«13. Это даст нам возможность обобщить процедуру дифференцирования. Действительно, если в уравнении $y = fx$, в котором мы можем считать известным выражение, представленное через fx, мы подставили $x + h$ на место x и, расположив по степеням h, сумели получить следующее разложение:

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{ и т. д.}$$

или, лучше, согласно предшествующему параграфу,

$$y' = y + Bh + Ch^2 + \text{ и т. д.},$$

то мы будем иметь

$$y' - y = Bh + Ch^2 + \text{ и т. д.},$$

откуда

$$\frac{y' - y}{h} = B + Ch + \text{ и т. д.}$$

и, переходя к пределу, $\dfrac{dy}{dx} = B$. Это нас учит тому, что дифференциальный коэффициент равен коэффициенту при члене, содержащем первую степень h, в разложении $f(x + h)$, расположенном по возрастающим степеням h.

14. Если вместо одной функции y, меняющей состояние из-за приращения, придаваемого переменной x, которую она содержит, мы имеем две функции y и z от той же самой переменной x и умеем находить, в частности, дифференциалы каждой из этих функций, то будет легко посредством следующего доказательства вывести отсюда дифференциал произведения zy этих функций. Действительно, если мы подставим $x + h$ на место x в y и в z, то мы получим два разложения, которые можно будет, расположив их по степеням h, представить так:

$$y' = y + Ah + Bh^2 + \text{ и т. д.}, \tag{5}$$

$$z' = z + A'h + B'h^2 + \text{ и т. д.}; \tag{6}$$

переходя к пределу, мы найдем:

$$\frac{dy}{dx} = A, \qquad \frac{dz}{dx} = A'; \tag{7}$$

перемножая уравнения (5) и (6) друг на друга, мы получим:

$$\begin{aligned} z'y' = zy + Azh + \quad Bzh^2 + & \text{ и т. д.} + \\ + A'yh + AA'h^2 + & \text{ и т. д.} + \\ + B'yh^2 + & \text{ и т. д.}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{z'y' - zy}{h} = Az + A'y + (Bz + AA' + B'y)\, h + \text{ и т. д.};$$

переходя к пределу и указывая точкой, какое выражение нужно дифференцировать, мы получим

$$\frac{d \cdot zy}{dx} = Az + A'y;$$

подставляя вместо A и A' их значения, даваемые уравнениями (7), будем иметь:

$$\frac{d \cdot zy}{dx} = \frac{z\,dy}{dx} + \frac{y\,dz}{dx}$$

и, отбрасывая общий делитель dx,

$$d \cdot zy = z\,dy + y\,dz.$$

Таким образом, чтобы найти дифференциал произведения двух переменных, нужно помножить каждую на дифференциал другой и сложить эти произведения».

В § 15 это правило используется для отыскания дифференциала от произведения трех переменных, в § 16 — для получения дифференциала частного $\frac{y}{z}$.

В § 17 дифференциал степени $y = x^m$ при целом положительном m получается из формулы

$$\frac{d \cdot xyztu \text{ и т. д.}}{xyztu \text{ и т. д.}} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \text{и т. д.} \tag{9}$$

полаганием x, y, z, t, u и т. д. равными x и взятыми в числе m.

§ 18 содержит формулировку правила дифференцирования степени.

В § 19 путем формального оперирования со знаками дифференциалов (позволяющего свести задачу к уже рассмотренным случаям) это правило доказывается для случаев дробного и отрицательного показателей степени.

В § 20 дифференциал степени получается непосредственно с помощью разложения $(x + h)^m$ по теореме о биноме Ньютона.

В третьем издании курса Бушарла, английским переводом которого пользовался Маркс, имелось приложение за номером 2 (Note 2), начало которого фигурировало под заголовком «Соображения, доказывающие, что принципы дифференцирования основаны на биномиальной теореме». Поскольку это замечание привлекло особое внимание Маркса, его текст приводится здесь (в переводе):

«За исключением дифференциалов от круговых функций, которые, как мы видели, легко находятся с помощью формул тригонометрии, все остальные одночленные дифференциалы, такие, например, как дифференциалы функций x^m, a^x и т. д., были выведены из одной только биномиальной теоремы. Мы, правда, прибегли к теореме Маклорена при определении константы A в экспоненциальных формулах, но мы могли бы обойтись без нее».

Далее с помощью формальных выкладок с бесконечными рядами, с современной точки зрения отнюдь не обоснованных, показывается, как именно это можно было бы осуществить, после чего Бушарла заключает:

«Отсюда следует, что принципы дифференцирования покоятся все на одной только биномиальной теореме; а так как эта теорема была доказана в элементах алгебры со всею возможной строгостью, мы можем заключить, что в основе наших принципов лежит твердый базис».

Таким образом, ясно, что Бушарла придерживался точки зрения «алгебраического» дифференциального исчисления Лагранжа, которое пытался усовершенствовать с помощью понятия предела. Его «усовершенствование», однако, сводилось к тому, что, в то время как Лагранж хотел избежать употребления не обоснованного еще тогда понятия предела и просто определял производную от fx как коэффициент при первой степени h в разложении

$$f(x+h)=f(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots, \tag{1}$$

где $A, B, C, \ldots$ — функции в x, Бушарла «выведал» эту же производную («дифференциальный коэффициент») посредством предельного перехода, состоявшего, однако, только в том, что он полагал $h=0$ в разложении

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A+Bh+Ch^2+\ldots, \tag{2}$$

которое чисто формально получал из разложения (1). Никакого определения понятия «предела» или какого-нибудь истолкования последнего Бушарла при этом не давал. Он ограничивался намеками на то, что предел — это последнее значение неограниченно приближающейся к нему (т. е. *не* имеющей последнего значения) переменной величины. Не удивительно, что такое понятие предела не могло удовлетворить Маркса.

ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА И ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА В ИСТОЧНИКАХ, КОТОРЫМИ ПОЛЬЗОВАЛСЯ МАРКС

1) Эти теоремы и связанная с ними теория аналитических функций Лагранжа привлекают особое внимание Маркса, специально посвятившего им ряд наиболее крупных рукописей (см. рукописи 4000, 4001, 4300, 4301, 4302). Для понимания этих рукописей и особенно критики, которой Маркс подвергает доказательства теоремы Тейлора, приводившиеся в имевшихся в его распоряжении руководствах, необходимо знакомство с этими доказательствами и с соответствующими идеями Лагранжа. Однако прежде чем мы перейдем к ним, остановимся немного на истории теорем Тейлора и Маклорена *.

Теорема Тейлора действительно содержится как 7-е предложение в книге «Methodus incrementorum directa et inversa» («Метод приращений, прямой и обратный») английского математика Брука Тейлора (Brook Taylor, 1685—1731), вышедшей в свет в Лондоне в 1715 г. Тейлор письменно сообщил об этом результате своему учителю Дж. Мэчину еще в 1712 г. «Теоремой Тейлора» ее назвал впервые в 1784 г. в статье «Приближения» в 1-м томе французской энциклопедии (Encyclopédie méthodique) Кондорсе. В 1786 г. Симон Льюилье (Simon Lhuilier) также употребил это название в книге «Exposition élémentaire des principes des calculs supérieure» («Элементарное изложение основ высших исчислений»), получившей премию Берлинской Академии наук (тема была предложена Академией на конкурс). С тех пор эта теорема вошла во все руководства по математическому анализу и никогда не называлась иначе. В настоящее время известно, однако, что шотландский математик Джемс Грегори (James Gregory, 1638—1675) владел ею уже в 1671/72 гг.

---

* Источниками здесь нам служат: М. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2-е изд., т. III, стр. 378—382; Д. Д. Мордухай-Болтовской, Комментарий к «Методу разностей», в кн.: Исаак Ньютон, Математические работы, М.—Л., 1937, стр. 394—396; М. Я. Выгодский, Вступительное слово к «Дифференциальному исчислению» Л. Эйлера, в кн.: Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, М.—Л., 1949, стр. 10—12; Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия, М., 1960, стр. 138—140; О. Becker und J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Bonn, 1951, стр. 200—201, 219; Г. Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII веках, М.—Л., 1938, стр. 412, 445; Д. Я. Стройк, Краткий очерк истории математики, М., 1964, стр. 153—154. Наиболее полное освещение см. в книге М. Кантора, стр. 378—382.

И Грегори, и Тейлор пришли к «теореме Тейлора», отправляясь от конечных разностей. При этом Тейлор прямо ставил перед собой задачу разобраться в нарочито весьма туманном изложении Ньютоном его интерполяционной формулы. Свою теорему он получал, давая сначала независимой переменной отличное от нуля (конечное) приращение, а затем — после ряда преобразований — обращая последнее в нуль «путем деления на бесконечно большое число частей». Если заменить исключительно громоздкие обозначения Тейлора более современными, то доказательство его будет выглядеть так.

Пусть $y = f(x)$, где x — переменная, которая изменяется, как он говорит, «равномерно», т. е. получая последовательно значения x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, ..., $x + n\,\Delta x = x + h$. И пусть соответствующими значениями $f(x)$ будут y (или y_0), y_1, y_2, ..., y_n. Последовательные разности (разности первого порядка) между y_{k+1} и y_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) пусть будут Δy, Δy_1, ..., Δy_{n-1}; разности между этими разностями (разности второго порядка): $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y_1$, ..., $\Delta^2 y_{n-2}$, и т. д. Для наглядности запишем все это в виде такой схемы:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x & & x+\Delta x & & x+2\Delta x & & x+3\Delta x & \ldots & & & x+n\,\Delta x \\
y & & y_1 & & y_2 & & y_3 & \ldots & & & y_n \\
& \Delta y & & \Delta y_1 & & \Delta y_2 & & \ldots & & \Delta y_{n-1} & \\
& & \Delta^2 y & & \Delta^2 y_1 & & & \ldots & \Delta^2 y_{n-2} & & \\
& & & \Delta^3 y & & & & \ldots & \Delta^3 y_{n-3} & & \\
\end{array}$$

. . . .

Тогда ясно, что

$$\begin{aligned}
&y_1 = y + \Delta y, \\
&y_2 = y_1 + \Delta y_1, \quad \Delta y_1 = \Delta y + \Delta^2 y, \\
&y_3 = y_2 + \Delta y_2, \quad \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y + \Delta^3 y, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Отсюда получаем далее:

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x) &= y_1 = y + \Delta y, \\
f(x+2\Delta x) &= y_2 = (y+\Delta y) + (\Delta y + \Delta^2 y) = y + 2\Delta y + \Delta^2 y, \\
f(x+3\Delta x) &= y_3 = (y + 2\Delta y + \Delta^2 y) + (\Delta y + \Delta^2 y) + (\Delta^2 y + \Delta^3 y) = \\
&= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Подметив общую закономерность, Тейлор заключает отсюда, что

$$f(x+n\,\Delta x) = y + n\,\Delta y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y, \tag{1}$$

что и есть интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования через равные промежутки). Бросается в глаза ее сходство с биномиальной теоремой Ньютона — прежде всего то обстоятельство, что коэффициенты разложения по Δy, $\Delta^2 y$, ..., $\Delta^n y$ в точности те же.

Полагая $n\,\Delta x = h$ (у Тейлора не h, а v), мы будем иметь:

$$n = \frac{h}{\Delta x}, \quad n-1 = \frac{h-\Delta x}{\Delta x}, \quad n-2 = \frac{h-2\Delta x}{\Delta x}, \quad \ldots, \quad n-(n-1) = \frac{h-(n-1)\,\Delta x}{\Delta x}.$$

Подставляя эти значения для n, $(n-1)$, $(n-2)$, ..., в формулу (1), Тейлор получал (в наших обозначениях):

$$f(x+h) = y + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots, \tag{2}$$

причем последнего члена,

$$\frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ \ldots\ (h-(n-1)\Delta x)}{1\cdot 2\ \ldots\ n}\,\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n},$$

уже не выписывал.

Теперь он представлял себе h фиксированным, n — актуально бесконечно большим, а Δx — актуально бесконечно малым («нулем»), считая, что при этом $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ обращается в первую флюксию $\dot{y}$ $\left(\frac{dy}{dx}\right.$ по Лейбницу$\left.\right)$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ — во вторую флюксию $\ddot{y}$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right.$ по Лейбницу$\left.\right)$ и т. д. Формула (2) при этом обращалась в

$$f(x+h)=y+\dot{y}h+\ddot{y}\,\frac{h^2}{1\cdot 2}+\dddot{y}\,\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

т. е. в ряд Тейлора.

Таким образом, даже начиная с конечных разностей и лишь затем «снимая» их, Тейлор оперировал еще полностью в стиле Ньютона и Лейбница с актуально бесконечно большими и актуально бесконечно малыми и с символическими формулами исчисления флюксий, не задумываясь над тем, имеют ли они какой-нибудь «реальный эквивалент», и не заботясь, конечно, о сходимости полученного ряда (и притом именно к $f(x+h)$). Здесь следует еще заметить, что, хотя Тейлор был ярым сторонником Ньютона в споре с Лейбницем, почему и не пользовался обозначениями последнего и нигде не ссылался на него, его доказательство не случайно излагалось еще Эйлером * на языке Лейбница. Как отмечает Д. Д. Мордухай-Болтовской, по существу, Тейлор подходит к ньютоновским флюксиям с лейбницевской, а не ньютоновской стороны, а именно от конечных разностей (см. упомянутый выше «Комментарий», стр. 396).

Что касается истории теоремы Маклорена, то, прежде всего, нужно заметить, что она имеется уже у Тейлора в виде частного случая его теоремы при $x = 0$. Правда, в отличие от Маклорена, более просто получавшего с помощью этой теоремы уже известные в то время разложения для a^x, $\sin\frac{x}{a}$, $\cos\frac{x}{a}$, у Тейлора «ряд Маклорена» нигде не используется.

Далее, в связи с рукописями Маркса, который специально отмечал, что «алгебраическое разложение» он заимствовал непосредственно у самого Маклорена, следует заметить, что приводившиеся в учебниках Бушарла и Хайнда доказательства теоремы Маклорена (методом неопределенных коэффициентов) действительно принадлежали самому Маклорену. Такое прямое заимствование у автора, имя которого носит теорема, могло иметь место, конечно, и в применении к теореме Тейлора. Библиографический список, составленный Марксом в связи с подготовкою исторического очерка, свидетельствует, по-видимому, о том, что с работою Тейлора он собирался познакомиться в оригинале, хотя и не успел осуществить этого своего намерения.

2) В соответствии с порядком, в котором Маркс критикует доказательства теоремы Тейлора в рукописи 4302, мы начнем с учебника Бушарла (J.-L. B o u-

---

* Теорему Тейлора Эйлер доказывал еще по Тейлору. См. Л. Э й л е р, Дифференциальное исчисление, гл. III («О нахождении конечных разностей»), §§ 44—48, стр. 240—241.

charlat, Elémens de calcul differentiel, 5-е изд., Париж, 1838; у Маркса, по-видимому, был английский перевод, сделанный с другого издания).

Изложив в § 30 (стр. 19—20) вопрос о последовательных дифференциалах — где, кстати, получив $6a$ в качестве третьей производной от ax^3, он замечает (стр. 20): «Здесь больше нельзя дифференцировать, так как $6a$ есть постоянная»,— Бушарла переходит к теореме Маклорена (§ 31, стр. 20—21), доказательство которой у него предшествует доказательству теоремы Тейлора (последняя доказывается в §§ 55—57, стр. 34—37).

Как уже было отмечено, Бушарла доказывает теорему Маклорена по самому Маклорену. Работу последнего, он, однако, не читал. Действительно, в примечании к заголовку «Теорема Маклорена» Бушарла пишет: «Эта теорема, как заметил г. Пикок, была открыта уже в 1717 г. Стирлингом и, следовательно, раньше, чем ее употребил Маклорен», а, как уже было упомянуто, Маклорен полностью признает, что теорема уже имеется у Тейлора.

Доказательство Бушарла — где никакие вопросы о правомерности делаемых им допущений, не говоря уже о сходимости рассматриваемых рядов, отнюдь не ставятся — мы приведем ниже в почти буквальном переводе.

«Пусть y — функция от x; расположим ее по отношению к x и допустим

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ и т. д.}; \tag{16}$$

мы получим, дифференцируя и деля на dx:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{ и т. д.},\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 2C + 2\cdot 3Dx + 3\cdot 4Ex^2 + \text{ и т. д.},\\
\frac{d^3y}{dx^3} &= 2\cdot 3D + 2\cdot 3\cdot 4Ex + \text{ и т. д.}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Обозначим через (y) то, во что обращается y, когда $x=0$,

через $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ то, во что обращается $\frac{dy}{dx}$, когда $x=0$,

через $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ то, во что обращается $\frac{d^2y}{dx^2}$, когда $x=0$,

. . . .

предшествующие уравнения дадут нам

$$(y) = A, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = B, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 2\cdot 3D,$$

откуда мы извлечем

$$A = (y), \quad B = \left(\frac{dy}{dx}\right), \quad C = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad D = \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right);$$

подставляя эти значения в уравнение (16), будем иметь

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)x + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x^3 + \cdots; \tag{17}$$

это и есть формула Маклорена».

В следующих §§ 32—34 (стр. 21—23) по формуле Маклорена находятся разложения для

$$y=\frac{1}{a+x}, \quad y=\sqrt{a^2+bx},\ y=(a+x)^m.$$

В третьем примере, таким образом, биномиальная теорема выводится из теоремы Маклорена. В первом приложении к имеющемуся у нас 5-му изданию учебника Бушарла, озаглавленном «Доказательство формулы Ньютона с помощью дифференциального исчисления», дается и непосредственный вывод (тем же методом неопределенных коэффициентов) теоремы о биноме Ньютона (для целого положительного показателя степени) с помощью последовательного дифференцирования. Он выглядит так.

Бушарла начинает с разложения для $(1+z)^m$, из которого нужное ему разложение для $(a+x)^m$ получается затем подстановкою $z=\frac{x}{a}$. Пусть, говорит он,

$$(1+z)^m=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\ldots \tag{1}$$

Полагая $z=0$, он получает $A=1$ и, следовательно,

$$(1+z)^m=1+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\ldots$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по z, находит далее

$$m(1+z)^{m-1}=B+2Cz+3Dz^2+4Ez^3+ \text{ и т. д.}$$

Ссылаясь на то, что это уравнение имеет место при любом z, Бушарла полагает $z=0$ и получает таким образом $m=B$. Дифференцируя еще раз и снова полагая $z=0$, он получает

$$m(m-1)=2C,$$

откуда находит

$$C=\frac{m(m-1)}{2},$$

после чего заключает: «Так же определятся все остальные коэффициенты, и при подстановке их значений в уравнение (1) это уравнение обратится в

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3+ \text{ и т. д.»}$$

(стр. 491—492).

3) Теорему Тейлора Бушарла также доказывает методом неопределенных коэффициентов. При этом он не только предполагает, что всякую функцию от каких-нибудь переменных можно разложить в ряд по степеням любой из этих переменных, но и считает, что это разложение должно быть единственным, т. е. что коэффициенты любых двух таких разложений (по степеням одной и той же переменной) должны быть равны. Это и даст ему возможность применять метод неопределенных коэффициентов.

Чтобы получить такую возможность, т. е. приравнять коэффициенты двух разложений одной и той же функции, Бушарла начинает с леммы, утверждающей, что производные от $f(x+h)$ по x и по h равны. Так как в рукописи 4302 (см. стр. 540) Маркс выражает недовольство доказательством этой леммы в курсе Бушарла, а стр. 41—42 (см. примечание [117]) рукописи 3888 нельзя даже понять без знакомства с этим доказательством, мы приведем его здесь полностью.

Ему посвящен § 55 (стр. 34—35), в котором мы читаем:

«Если в некоторой функции y от x переменная x изменяется в $x+h$, то мы получаем один и тот же дифференциальный коэффициент и когда x — переменная, а h — постоянная, и когда h — переменная, а x — постоянная.

Если, чтобы это доказать, в уравнение $y = fx$ мы подставим $x+h = x_1$ * на место x, мы будем иметь $y_1 = fx_1$; дифференциал от fx_1 будет равен некоторой другой функции от x_1, представляемой посредством φx_1 и помноженной на dx, следовательно, $dy_1 = \varphi x_1\, dx_1$ или, если заменить x_1 его значением $x+h$,

$$dy_1 = \varphi(x+h)\, d(x+h).$$

Но единственное изменение, которое привносит в этот дифференциал гипотеза, что x — переменная, а h — постоянная, относится только к множителю $d(x+h)$, который сводится к dx, когда x — переменная, а h — постоянная; мы, следовательно, имеем в таком случае

$$dy_1 = \varphi(x+h)\, dx,$$

откуда получаем

$$\frac{dy_1}{dx} = \varphi(x+h). \qquad (35)$$

Если же, наоборот, мы сделаем x постоянной, а h переменной, то множитель $d(x+h)$ сведется к dh, и мы будем иметь

$$dy_1 = \varphi(x+h)\, dh,$$

а значит,

$$\frac{dy_1}{dh} = \varphi(x+h); \qquad (36)$$

приравнивая эти два значения $\varphi(x+h)$, получим

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{dh} \text{ ».}$$

В следующем § 56 Бушарла распространяет эту лемму на производные высших порядков и в § 57 доказывает с ее помощью теорему Тейлора. О том, что он считает свое — как его называет Маркс —«исходное уравнение» (37) применимым к любой функции, говорят слова, с которых он начинает это «доказательство»: «Пусть y_1 — функция от $x+h$; предположим, что, когда мы развернем эту функцию по степеням h, у нас получится

$$y_1 = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{ и т. д.}, \qquad (37)$$

где $A, B, C, \ldots$ — неизвестные функции от x, которые требуется определить».

Дифференцируя уравнение (37) по h и по x и получив таким образом

$$\frac{dy_1}{dh} = A + 2Bh + 3Ch^2 + \text{ и т. д.},$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h + \frac{dB}{dx}h^2 \text{ и т. д.},$$

* Хотя Бушарла пользуется и обозначениями производных функций по Лагранжу, наращенные значения x и y (т. е. $(x+h)$ и $f(x+h)$) он обозначает через x', y'. Эти его обозначения мы заменили на x_1, y_1.

Бушарла приравнивает затем, ссылаясь на лемму, коэффициенты при одинаковых степенях h в последних двух уравнениях и получает таким образом нужные ему выражения коэффициентов A, B, C, ... через y и ее последовательные производные. Это доказательство Маркс излагает, например, в рукописи 3888 (лл. 54—55; стр. 50—51 в нумерации Маркса), где он сравнивает его с приведенным выше доказательством теоремы Маклорена. В рукописи 4302 он критикует это доказательство, главным образом за необоснованность исходных допущений.

Следующие §§ 58—61 (в книге Бушарла) содержат примеры разложений $f(x+h)$ по формуле Тейлора для случаев, где $f(x)$ есть $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$. Вопросы о сходимости получающихся рядов нигде даже не упоминаются. Случаи неприменимости ряда Тейлора рассматриваются только в самых последних, напечатанных петитом параграфах первой части книги (посвященной дифференциальному исчислению).

Заключительный § 62 раздела о теореме Тейлора и ее применениях посвящен выводу теоремы Маклорена из теоремы Тейлора. Этот вывод полностью приводится Марксом в рукописи 3888 (см. лл. 55—56; стр. 51—52 в нумерации Маркса).

ПРИМЕЧАНИЯ
УКАЗАТЕЛИ

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Рукопись написана Марксом в 1881 г. для Энгельса. Это — первая работа в задуманном Марксом цикле рукописей, посвященных систематическому изложению его идей, относящихся к природе и истории дифференциального исчисления. В этой работе он вводит принадлежащее ему понятие алгебраического дифференцирования и соответствующий ~~алгорифм отыскания производной для некоторых классов функций.~~ На конверте, приложенном к рукописи, имеется надпись рукой Маркса: «Для Генерала». Так в семье Маркса называли Энгельса за его статьи по военным вопросам. По ознакомлении с рукописью Энгельс ответил Марксу письмом от 18 августа 1881 г. (см. К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 35, стр. 16—18). Немецкий текст рукописи печатается по начисто отработанному Марксом тексту. Некоторые из подготовительных материалов (наброски и дополнения) публикуются на стр. 473 настоящего издания. Разночтения с непубликуемыми черновиками отмечены в подстрочных примечаниях. Рукопись впервые опубликована (не полностью) в 1933 г. на русском языке в сборнике «Марксизм и естествознание», М., Партиздат, 1933, стр. 5—11, и в журнале «Под знаменем марксизма», № 1, 1933, стр. 15. На немецком языке публикуется впервые.

[2] Во избежание путаницы с обозначениями производных здесь и всюду в дальнейшем в аналогичных случаях обозначения Маркса x', y', ... для новых значений переменных заменены на x_1, y_1, ...

В источниках, которыми пользовался Маркс, не было еще понятия абсолютной величины. Поэтому Маркс часто (по-видимому, для определенности) рассматривает лишь возрастание значения переменной, но иногда (см., например, настоящее издание, стр. 193, 514) говорит и о «возрастании» x «на положительное или отрицательное приращение h».

[3] В соответствии с терминологией, принятой в источниках, которыми пользовался Маркс, под конечной разностью подразумевается всегда разность, отличная от нуля.

[4] Маркс различает в каждом равенстве две стороны (ныне принято говорить: две части) — левую и правую, которые не всегда играют у него симметричную роль. На левой стороне равенства он часто помещает два разных, но синонимичных выражения, соединяя их союзом «или».

[5] В математической литературе, находившейся в распоряжении Маркса, термин «предел» (функции) не имел однозначного смысла и понимался чаще всего как значение функции, достигаемое ею актуально в конце бесконечного процесса приближения аргумента к его предельному значению (см. Приложение, стр. 566—567). Критике этих недостатков посвящена имеющаяся лишь в виде чернового наброска рукопись Маркса «О неоднозначности терминов «предел» и «предельное значение» (см. стр. 212—217). В настоящей рукописи термин «предел» употреблялся Марксом в особом смысле: как выражение, доопределяющее данное для тех значений аргумента, в которых оно не определено. Такими выражениями, нуждающимися в доопределении, были для Маркса

отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(\text{при } \Delta x = 0 \text{ обращающееся в } \frac{0}{0}\right)$ и $\frac{dy}{dx}$, толкуемое как символическое выражение для отношения «снятых, или исчезнувших, разностей», т. е. для $\frac{0}{0}$. В применении к отношению $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ «предел» понимается при этом Марксом — в некоторой связи с определениями этого понятия у Хайнда и Лакруа (см. Приложение, стр. 566—567) — как выражение, тождественно равное этому отношению при $\Delta x \neq 0$, но доопределяющее его по непрерывности, когда оно обращается в $\frac{0}{0}$. «Пределом» тут, следовательно, должна была быть «предварительная производная» (о которой см. стр. 33 и примечание [7]). В соответствии с этим (на стр. 35) Маркс пишет $\left(\text{в применении к отношению } \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ где } y = ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$: «Предварительная «производная» $a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c$ является здесь пределом отношения конечных разностей, т. е., сколь бы малыми мы ни взяли эти разности, значение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет дано этой «производной». Ниже (см. стр. 37) Маркс говорит о том, что полагание x_1 равным x, т. е. $\Delta x = 0$, «приводит этот предел к его минимальной величине», что и дает «окончательную производную».

Аналогично под «пределом отношения дифференциалов» Маркс понимает в этой рукописи «реальное» («алгебраическое», см. примечание [6]) выражение, придающее значение этому отношению, т. е., иначе говоря, производную функцию. Маркс пишет, однако, что в уравнении $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ «ни одна из обеих сторон не является предельным значением другой. Они находятся друг к другу не в предельном отношении, а в отношении эквивалентности» (см. стр. 217). Но здесь понятие «предела» («предельного значения») употреблено в другом смысле: близком к привычному теперь для нас. В смысле, еще более близком к современному понятию предела, Маркс употребляет термин «абсолютно минимальное выражение» (см., например, стр. 217), о котором в другом месте (см. стр. 129) пишет, что заменою для него является категория предела в том смысле, который придал ей Лакруа и в котором она имеет важное значение для математического анализа (об определении Лакруа см. Приложение, стр. 571—573).

[6] Под «алгебраическим» Маркс понимает выражение, не содержащее символов производных и дифференциалов. Такое употребление термина «алгебраическое выражение» характерно для математической литературы начала XIX века.

Маркс часто различает понятия: «функция от (von) x» и «функция в (in) x», т. е. функция как соответствие и функция как аналитическое выражение (см. стр. 506). В настоящей же рукописи он не придерживался строго этого различения, говоря чаще всего просто «функция x», быть может, в связи с тем, что всегда имеет в виду только функции, заданные некоторым «алгебраическим выражением». Соответствие, относящее к значению независимой переменной x значение зависимой переменной y, он задает с помощью уравнения $y = f(x)$, где y — зависимая переменная, $f(x)$ — аналитическое выражение, рассматриваемое относительно вхождений в него переменной x.

[7] Сущность метода алгебраического дифференцирования Маркса состоит в том, что отношение

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \tag{1}$$

конечных разностей (имеющее смысл лишь при $x_1 \neq x$) он доопределяет по непрерывности для $x_1 = x$. С этой целью он ищет функцию $\varphi(x_1, x)$, которая при $x_1 \neq x$ совпадает с отношением (1) и непрерывна при $x_1 \to x$. Такую функцию $\varphi(x_1, x)$ Маркс называет *предварительной производной функцией от функции* $f(x)$, а функцию $\varphi(x, x)$, получающуюся из $\varphi(x_1, x)$ полаганием $x_1 = x$, он называет *производной от функции* $f(x)$. Если последняя существует (что имеет место для рассматриваемых здесь классов функций), то она совпадает с современным понятием производной:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x).$$

В то же время Марксу были уже известны и такие функции, для которых оператор дифференцирования не определен (см. стр. 207 настоящего издания).

[8] Маркс воспроизвел здесь характерное для находившихся в его распоряжении математических книг формальное разложение функции в ряд, оставив в стороне вопросы сходимости полученного ряда и совпадения значений функции с пределами частичных сумм.

[9] $\therefore$ — символ, заменявший в записях доказательств слово «следовательно». Теперь не применяется.

[10] Текст, озаглавленный: «Дополнительно», составляет содержание приложенного к рукописи отдельного листка, имеющего самостоятельную нумерацию страниц: 1 и (на обороте) 2.

[11] Под конечным разностным уравнением Маркс, по-видимому, имеет в виду выражение вида

$$f(x_1) - f(x) = (x_1 - x)\,\varphi(x_1, x).$$ См. примечание [7].

[12] В этом месте С. Мур написал карандашом: «Nicht der Fall, diese Factoren sind $x_1 - x - 1$, $x_1 - x - 2$ etc.» («Не так, этими множителями являются $x_1 - x - 1$, $x_1 - x - 2$ и т. д.»). По-видимому, Маркс подразумевал здесь не множители $(x_1 - x)$, а выражения $x_1 - x$ и хотел сказать, что обращение в нуль разности $x_1 - x$, сохранившейся в выражении для предварительной производной, не лишает последнюю смысла.

[13] Рукопись относится к 1881 г. На конверте, приложенном к рукописи, имеется надпись: «II. Für Fred» («II. Для Фреда»). Эту рукопись Маркс называет «вторым выпуском» (см. стр. 75), так как продолжает в ней излагать свои выводы, к которым пришел в процессе изучения математики. Энгельс показал рукопись С. Муру и замечания последнего направил Марксу со своим письмом от 21 ноября 1882 г. (см. Соч., т. 35, стр. 92—93). Рукопись «О дифференциале» была впервые опубликована на русском языке не полностью в 1933 г. в сборнике «Марксизм и естествознание», стр. 16—25, и в журнале «Под знаменем марксизма», 1933, № 1.

[14] Здесь Маркс предполагает, таким образом, что функции u и z, задаваемые, как это ясно из дальнейшего, с помощью уравнений $u = f(x)$, $z = \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — выражения «в переменной x», суть дифференцируемые функции от x. То обстоятельство, что для справедливости теоремы о дифференциале произведения двух функций не требуется, помимо этого, никакой другой информации о виде функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, находит отражение у Маркса в образных выражениях о $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ как о «тенях без тела, которое их отбросило», о «символических дифференциальных коэффициентах без реальных дифференциальных коэффициентов, т. е. без соответствующих эквивалентных [им] производных» (см. стр. 55). Оно специально оговаривается также Марксом в набросках работы о дифференциале. Здесь и всюду далее, в отличие от сокращенной записи duz, которой в своих рукописях пользовался Маркс, мы употребляем запись $d(uz)$.

[15] Имеются в виду специфические для дифференциального исчисления знаки для производных и дифференциалов.

[16] В литературе XVIII—XIX веков производную часто называли «дифференциальным коэффициентом», имея, очевидно, в виду определение производной как коэффициента при первой степени приращения h независимой переменной x в разложении $f(x + h)$ в ряд по степеням h. Прилагательное

«реальный» относится к тому, что в выражении для $f'(x)$ не содержится никаких специфических для дифференциального исчисления символов.

[17] Способ выражения, согласно которому в результате умножения на нуль «сами переменные z и u стали равны нулю», объясняется тем, что во времена Маркса были еще распространены представления о математических операциях над числами как изменяющих самые эти числа: прибавление к a положительного числа b «увеличивает число a», умножение a на 0 «обращает число a в нуль» и т. д. Эти представления подверглись научному уточнению лишь в XX веке.

[18] Слова «поскольку мы по произволу можем начать нулификацию с числителя или со знаменателя», по-видимому, означают, что доопределение выражения вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, которое при $x=a$ обращается в $\frac{0}{0}$ и поэтому лишается смысла, можно производить для $x=a$ по-разному. Если мы хотим сохранить при доопределении то свойство обыкновенной дроби, согласно которому она равна нулю при числителе, равном нулю, то значением $\frac{f(a)}{g(a)}$ должен быть 0. «Начать нулификацию с числителя» в таком случае и означает: положить $\frac{f(a)}{g(a)}$ равным нулю. Поскольку дробей со знаменателем 0 не существует, «начать нулификацию со знаменателя» не может означать уже: сохранить при доопределении какое-нибудь свойство обыкновенных дробей со знаменателем 0. Но если при $x \neq a$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывна в точке a (т. е. $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$), то $\frac{f(a)}{g(a)}$ естественно положить равным $\varphi(a)$, сохранив, таким образом, и для $x=a$ равенство $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$. Если к тому же числитель обращается в нуль в результате того, что знаменатель был положен равным нулю, то слова «начать нулификацию со знаменателя» естественно толковать как означающие: доопределить вышеописанным образом, т. е. «по непрерывности». В книгах, которыми пользовался Маркс, даже таких, как большой «Трактат» Лакруа, сохранение для случая $f(a) = g(a) = 0$ равенства $\frac{f(a)}{g(a)} = \varphi(a)$ считалось вообще независимым от какого бы то ни было «произвола»: необходимым следствием метафизического закона непрерывности «всякого сущего».

[19] Здесь в тексте описка: вместо $x = a$ написано $x^2 = a^2$. Вместо того, чтобы исправить ее, в текст кем-то, по-видимому, Муром, сделаны карандашом вставки, после которых он выглядит так: «und da $x^2 = a^2 \therefore x = \pm a = 2Pa$ oder 0», т. е. «и так как $x^2 = a^2$, то $x = \pm a$, [почему $P(x + a)] = 2Pa$ или [=] 0». Такое истолкование, однако, заведомо не вяжется со всем контекстом.

[20] *Символическим дифференциальным выражением* для $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ $\left(\text{соответственно } \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}\right)$ Маркс называет здесь выражение $\frac{dy}{dx}$, получаемое при переходе от отношения конечных разностей к производной.

[21] По-видимому, речь идет о случае, когда выбор независимой переменной не фиксирован настолько, что за независимую переменную можно принять любую из u и z. Вообще, если u и z можно рассматривать как обратимые функции от одной и той же независимой переменной, то выбор значения одной из u, z определяет значение независимой переменной, а значит, и значение другой. Иными словами, здесь имеется в виду инвариантность полученного символического оперативного уравнения по отношению к выбору независимой переменной.

[22] По-видимому, при переписывании было пропущено (сохранившееся в черновике) слово «dir» («тебе») в фразе: «der dir bekannte» («известный тебе»). Надо полагать, что речь здесь идет о французском математике Л. Б. Франкере, о котором Энгельс писал Марксу в письме от 30 мая 1864 г. (см. Соч., стр. 329). Взятое в кавычки слово «элегантный» относится к замечанию Энгельса: «Einzelnes ist sehr elegant» (буквально: «Кое-что очень элегантно») — и содержит, очевидно, намек на ироническое отношение Энгельса к автору, о котором идет речь. Франкер, как и Бушарла, но несколько по-иному, также пытался связать «алгебраический» метод Лагранжа (см. стр. 61, 63) с дифференциальным исчислением Лейбница, оперирующим с символами для дифференциала. Ирония Маркса насчет «ясности» того, как это было сделано, относится, по-видимому, как к Бушарла, так и к Франкеру. Первый, чтобы «облегчить алгебраические операции» (см. следующий абзац), вводил заведомо ложную формулу; второй же утверждал, что дифференциал «является синонимом для производной и отличается от нее только обозначением», в соответствии с чем писал тут же, что «производная от x есть $x' = 1$, или $dx = 1$» (см. L. B. Francoeur, т. II, стр. 253).

[23] Взятый в кавычки текст представляет собой перевод с французского из книги: J.-L. Boucharlat, см., например, 5-е изд., 1838, стр. 4.

[24] Под сведе́нием к своему «абсолютному минимуму» здесь, очевидно, подразумевается доопределение указанного отношения по непрерывности при $x_1 = x$, т. е., по существу, переход к пределу при $x_1 \to x$.

[25] См. Приложение, «Об исчислении нулей Леонарда Эйлера», стр. 577.

[26] Маркс проводит здесь различие между дифференциальными частицами (die Differentiellen) dx и dy, представляющими собой «снятые» разности Δx и Δy, и дифференциалом (das Differential) dy, определяемым равенством

$$dy = f'(x)\, dx. \tag{1}$$

Последнее можно трактовать как оперативную формулу, позволяющую по найденным уже дифференциалам dy и dx находить производную $f'(x)$, переходя к эквивалентному (1) (см. примечание [24]) равенству

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{2}$$

[27] Аргументация Маркса против трактовки оборачивания метода, как происходящего уже при «алгебраическом» дифференцировании простейших функций первой степени, состоит в следующем: 1) шаг, состоящий в полагании $x_1 = x$, представляется излишним, поскольку уже предварительная производная совпадает здесь с окончательной, т. е. специфика «алгебраического» метода дифференцирования не выявляется; 2) распространение на общий случай наблюдений, относящихся к дифференцированию функций первой степени, могло бы привести к заведомо ошибочному заключению, что все производные высших порядков, начиная со второго, должны быть равны нулю.

[28] То есть рассматривать $\frac{dy}{dx}$ как отношение бесконечно малых, наподобие того, как это делали уже Лейбниц и Ньютон.

[29] То есть найти производную от y по x, рассматривая y как функцию x, заданную совместно уравнениями:

$$1)\ y = 3u^2, \qquad 2)\ u = x^3 + ax^2.$$

[30] Право оперировать с дифференциалами, как с обыкновенными дробями, здесь предполагается Марксом уже установленным (см. стр. 61, а также Приложение, стр. 589).

[31] К этому месту рукописи Мур сделал карандашом следующую пометку: «On p. 12 (5) this is proved for the concrete case there investigated should in not also». («На стр. 12 (5) это доказано для исследованного там конкретного случая.

Не следовало ли доказать, а не допустить справедливость этого и в общем случае?») Эта пометка основана, однако, на недоразумении.

«Обнаруженное на конкретных функциях развитие» состояло в том, что в результате их дифференцирования были получены символические выражения вида $\frac{dy}{du}$ и $\frac{du}{dx}$. Поскольку право оперирования с такими выражениями, как с обыкновенными дробями, уже предполагалось Марксом, естественно было обнаружить в заключение, что

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}.$$

[32] Раздел III не был написан Марксом, по-видимому, потому, что ему не удалось осуществить своего намерения просмотреть в Британском музее книгу Дж. Ландена (см. Приложение, стр. 581).

[33] Под этим заголовком объединены три наброска различных разделов работы «О дифференциале» и некоторые наброски дополнений к ней. Подробнее см. настоящее издание, стр. 459, 464, 477, 479.

[34] Этот набросок взят из тетрадей, озаглавленных Марксом «A.I» и «B (продолжение A). II» (см. настоящее издание, стр. 459, 464). Начинается он на последней (незанумерованной Марксом) странице тетради «A.I» и помещен в различных местах тетради «B» (это Маркс оговаривает специальными пометками). Часть указанного наброска была опубликована впервые на русском языке в 1933 г. (см. «Под знаменем марксизма», № 1, а также «Марксизм и естествознание», стр. 34—43).

[35] Символическим (в отличие от алгебраического, см. примечание [6]) Маркс всюду называет выражение, содержащее специфические для дифференциального исчисления символы dx, dy и т. д. Реальным он называет выражение той же функции, не содержащее указанных символов.

[36] Оперативными формулами дифференциального исчисления здесь называются такие символические выражения, которые указывают (см. в тексте ниже), какие операции в применении к определенным функциям следует выполнить для получения реального значения той или иной производной.

[37] На этом заканчивается тетрадь «A.I». В конце страницы рукою Маркса написано: «Sieh weiter Heft II, p. 9» («См. далее тетрадь II, стр. 9»). Он подразумевает здесь тетрадь «B (продолжение A)».

[38] О характере такого рода доопределений по непрерывности и возможностях других доопределений, удовлетворяющих тем или иным требованиям, см. примечание [18], а также Приложение, стр. 567.

[39] То есть когда мы из области обыкновенной алгебры переходим к функциям (зависимым переменным), для которых приходится доопределять отношение

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

обращающееся в неопределенность $\frac{0}{0}$ при

$$x_1=x.$$

[40] Выражения, не содержащие специфических для дифференциального исчисления символов, Маркс называет обычно «алгебраическими» (см. примечание [6]) или «реальными» (см. примечание [2]). Здесь и в некоторых других местах он называет их «действительными» (wirkliche). Так как термин «действительное» (число) в русской математической литературе имеет другой смысл, слово «действительное» (выражение) переводится как синонимичное ему «реальное».

[41] Рукопись второго и третьего набросков имеется только в черновике; она содержит много зачеркиваний и вставок. Первые четыре страницы второго наброска не сохранились (поэтому мы начинаем его строкой отточий). С некоторыми купюрами эти два наброска были впервые опубликованы на русском языке в 1933 г. («Под знаменем марксизма», № 1, а также «Марксизм и естествознание», стр. 26—34). См. «Предварительные наброски и варианты рукописи о дифференциале», пункт а), стр. 477.

[42] Весь этот абзац (начиная со слов «если переменные величины растут») представляет собой сделанный Марксом перевод на немецкий язык соответствующего места из книги Хайнда (см. T. Hind, изд. 2, Кембридж, 1831, стр. 108). Второй набросок на этом обрывается. Пустое место (более половины страницы), оставленное Марксом после этого абзаца, свидетельствует, по-видимому, о том, что, не найдя у Хайнда необходимых сведений, Маркс отложил намеченное исследование, собираясь, очевидно, вернуться к нему позднее.

Материал, относящийся к дифференцированию произведения методами Лейбница и Лагранжа, имелся в учебниках Хайнда и Бушарла (см. Приложение, стр. 591—592). Что же касается метода Ньютона, то в указанных учебниках он не был освещен.

[43] Приведенная цитата взята из книги Бушарла (J.-L. Boucharlat, см., например, 7-е изд., Париж, 1858, стр. 3—4).

[44] Здесь Маркс намечает несколько иную нумерацию разделов его работы, отличную от той, которой он придерживался ранее. В разделе III он собирается поместить материал, который во втором наброске помещен в разделе II; в разделе IV — осветить на примере истории теоремы о дифференциале произведения исторический ход развития дифференциального исчисления.

[45] В связи с этим абзацем см. примечание [5], а также Приложение «О понятии «предела» в источниках, которыми пользовался Маркс», стр. 571 (где приведены сведения о том, как в учебнике Бушарла обе стороны равенства $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ трактовались как пределы) и стр. 572—573 (где речь идет о понятии предела по большому «Трактату» Лакруа и об относящихся к этому понятию словах Маркса в настоящем абзаце). Что именно Маркс имел в виду под трактовкою символического выражения как предела для $f'(x)$, остается пока еще неясным. (Может быть, тут просто имелось в виду то обстоятельство, что производная получалась в результате полагания $x_1 = x$, т. е. когда числитель и знаменатель отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ достигали своих предельных значений «нуль», почему выражению $f'(x)$ и должно было соответствовать уже не $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а $\frac{dy}{dx}$.) Об упоминаемом Марксом отношении Лагранжа к понятию предела в понимании его Ньютоном см. там же, стр. 573.

[46] К рукописи «О дифференциале» Маркс намеревался написать некоторые дополнения, четыре наброска которых сохранились (подробнее см. настоящее издание, стр. 479—490, где приведен и ряд отрывков из этих набросков). Поскольку наброски носят незаконченный характер, здесь приводятся лишь два наиболее цельных (и понятных) отрывка из них. Они заимствованы из второго и третьего набросков дополнений.

[47] Так Маркс озаглавил раздел А) из второго наброска его дополнений к рукописи «О дифференциале». Здесь публикуется лишь пункт 1), содержащий краткое резюме основной работы о дифференциале. Существенным дополнением к этой работе здесь является прямое указание на геометрическую применимость оперативных формул. Подробнее см. настоящее издание, стр. 479.

[48] Это § А) из третьего наброска дополнения. Заглавие принадлежит Марксу. Здесь публикуется лишь пункт 3), в котором Маркс (в характерной

для него литературной форме) приводит пример применения теоремы о дифференциале произведения в качестве оперативной формулы при отыскании дифференциала частного.

[49] Свою рукопись «О дифференциале» Маркс заканчивает обещанием написать специальную часть, посвященную историческому ходу развития дифференциального исчисления. В набросках, предшествовавших этому письму, он выражал намерение осветить историю дифференциального исчисления на примере истории теоремы о дифференциале произведения. Ни одного из этих намерений Марксу, по-видимому, не удалось осуществить полностью. Сохранились только черновые наброски, содержащиеся в тетради «В (продолжение А)», где они перемежаются с выкладками, использованными Марксом в работе о дифференциале. Эти наброски начинаются, в соответствии с первоначальными намерениями Маркса, с освещения методов Ньютона и Лейбница на примере теоремы о дифференциале произведения. Затем идет только начало так и не законченного раздела, посвященного методу Даламбера. Далее Маркс переходит к более подробному обсуждению и критике методов Ньютона и Лейбница вообще. Это приводит его к общей периодизации истории дифференциального исчисления, в которой выделяются три периода: 1) мистического дифференциального исчисления Ньютона и Лейбница, 2) рационального дифференциального исчисления Даламбера и 3) чисто алгебраического дифференциального исчисления Лагранжа, характеристика которого составляет вторую часть сохранившихся набросков по истории дифференциального исчисления. Именно эту часть Маркс, по-видимому, и собирался развить в качестве третьего письма Энгельсу. Заключительная часть набросков исторического характера посвящена более подробному изложению общих идей, содержавшихся в первой части. Наброски публикуются полностью, за исключением опущенных заметок, которые по содержанию относятся к работе «О дифференциале».

[50] Приводимая Марксом в этом листке библиография сопровождается в ряде случаев указанием именно тех мест цитируемого источника, в которых идет речь об основных понятиях и методах дифференциального исчисления. В учебниках, находившихся в распоряжении Маркса, этих указаний нет. Поэтому есть все основания полагать, что выборка этих мест была произведена Марксом в результате просмотра им соответствующих произведений (по-видимому, в библиотеке Британского музея). То обстоятельство, что фамилия Джона Ландена особо выделена Марксом (взята в рамку), связано, очевидно, с тем, что он собирался специально ознакомиться с «Анализом разностей» Дж. Ландена. Подробнее об этом см. Приложение, стр. 581—586. Источники сведений Маркса о датах рождения и смерти, приводимых им в листке, неизвестны. Ясно только, что в этих источниках не было даты смерти Лагранжа.

[51] В схолии (поучении) к лемме XI первой книги «Математических начал» и в лемме II второй книги Ньютон объясняет основные понятия дифференциального исчисления, соответствующие нашим понятиям «производной» и «дифференциала». Подробнее об этих леммах Ньютона см. Приложение, стр. 574—576.

[52] Марксов конспект этой работы (с его критическими замечаниями) см. на стр. 272—280 настоящего издания.

[53] «Трактат о жидкостях» Даламбера не содержит материала по основам дифференциального исчисления. Взгляды Даламбера на основные понятия дифференциального исчисления изложены им в статьях в Энциклопедии и в математических отрывках («Opuscules mathématiques»). Остается неизвестным, что именно привлекло внимание Маркса к «Трактату о жидкостях» Даламбера.

[54] Третья глава части I «Дифференциального исчисления» Л. Эйлера посвящена вопросу «О бесконечных и бесконечно малых». Подробнее о ней см. Приложение, стр. 577—580.

[55] Эта книга была составлена аббатом Муаньо «по методам и трудам Коши, опубликованным и неопубликованным». Первый том «Лекций» Муаньо вышел в 1840 г., второй — в 1844 г.

[56] Это заключение (по Ньютону) требует пояснения: «так как числовые величины всех возможных количеств могут быть представлены прямыми линиями», то изменение всякой величины может быть представлено в виде прямолинейного движения с переменной скоростью. А так как в течение бесконечно малого промежутка времени скорость движения можно считать неизменной, то соответствующий этому промежутку времени путь, пройденный точкой (а значит, и соответственное изменение нашей величины), равен произведению этой скорости (флюксии) на бесконечно малый промежуток времени τ. Поэтому «моменты, или бесконечно малые части порождаемых величин = произведениям их скоростей на бесконечно малые части времени». О метафизическом характере попыток Ньютона обосновать понятия «флюенты», «флюксии», «момента», соответствующие нашим понятиям «функции», «производной», «дифференциала», определив их в терминах механики, см. Приложение, стр. 574—576.

[57] В примечании [49] было отмечено, что Маркс еще собирался вернуться к освещению истории развития дифференциального исчисления на примере истории теоремы о дифференциале произведения. Поэтому он и оставил после незаконченной им выдержки из книги Хайнда пустое место. Тут после повторенной еще раз этой же выдержки приводится в качестве примера именно теорема о дифференциале произведения, трактуемая по Ньютону. (В учебнике Хайнда эта теорема приведена в качестве примера 3; см. Hind, стр. 109.)

[58] В учебнике Хайнда метод Лейбница не иллюстрировался на примере теоремы о дифференциале произведения. Поэтому Маркс обратился к курсу Бушарла. Настоящий абзац представляет собою выдержку из этого курса (см. Boucharlat, стр. 165).

[59] Это предложение является выдержкой из цитированного выше учебника Хайнда (Hind, стр. 106). Однако далее Маркс не приводит теоремы о дифференциале произведения в изложении Хайнда. За этим текстом в тетради Маркса следуют опущенные нами 5 страниц (стр. 16—20). Они заняты в основном выкладками, относящимися к теоремам о дифференцировании частного и сложной функции, а также к решению задачи о касательной к кривой на примере параболы $y^2 = ax$. Мы оставили лишь замечание, написанное на свободных местах страниц 16—18, в котором Маркс подчеркивает то обстоятельство, что Ньютон и Лейбниц начинали непосредственно с оперативных формул дифференциального исчисления.

Затем под рубрикой «Ad Ньютон» Маркс подвергает критике упомянутые методы Ньютона и Лейбница, подчеркивая, что такого рода методы, несмотря на ряд доставляемых ими преимуществ, неизбежно влекут за собой введение актуально бесконечно малых и связанные с ними трудности. Здесь опять-таки в качестве основного примера используется теорема о дифференциале произведения.

[60] Через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Ньютон и его последователи обычно обозначали скорости изменения (флюксии) переменных x, y, z (флюент), т. е. производные от x, y, z по переменной, играющей роль «времени»; через $\tau\dot{x}$, $\tau\dot{y}$, $\tau\dot{z}$ —«моменты», соответствующие лейбницевым дифференциалам или бесконечно малым приращениям. Однако обозначения $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ часто употреблялись ньютонианцами и для «моментов» или дифференциалов (см. Приложение, стр. 580).

[61] Речь идет об эвристическом обобщении, состоящем в том, что в формуле

$$\dot{y} = a\dot{x} \tag{1}$$

y трактуется лишь как некоторая функция $f(x)$, а постоянная a — как произведенная из этой $f(x)$ новая функция $f'(x)$; при этом формула (1) становится частным случаем более общей формулы

$$\dot{y} = f'(x)\,\dot{x}. \tag{2}$$

При трактовке $\dot{x}$, $\dot{y}$ как приращений, хотя бы и бесконечно малых, множитель $f'(x)$ является, однако, функцией не только в x, но и в $\dot{x}$; свободной от $\dot{x}$

«производной» функции $f'(x)$ в формуле (2) не получается. Именно это обстоятельство (заставляющее ньютонианцев насильственно отбрасывать члены, содержащие x, хотя последнее должно быть отличным от нуля, чтобы формула (2) имела смысл) и лежит в основе той критики Ньютонова определения производной от функции $y = f(x)$ как отношения $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, к которой Маркс несколькими строками ниже и переходит.

[62] То есть получен в виде не содержащего дифференциальных символов «реального» выражения.

[63] Далее опущено несколько строк, смысл которых не совсем ясен.

[64] Если $\dot{y} = \dot{x}$ и сама y есть x, то, чтобы прийти к равенству, в котором есть сторона, не содержащая дифференциального символа $\dot{x}$, достаточно разделить обе части равенства $\dot{y} = \dot{x}$ на $\dot{x}$.

[65] «Zuwachs in x» («прирост в x») здесь, очевидно, означает новую функцию в x, полученную из первоначальной функции x^2 — так сказать, вдобавок к ней — с помощью теоремы о биноме: как коэффициент при dx в разложении $(x + dx)^2$.

[66] Очевидно, здесь имеется в виду то обстоятельство, что с помощью бинома получается непосредственно не $dy = 2x\,dx$, а $dy = 2x\,dx + dx^2$. Но последнее равенство является математически правильным лишь как следствие из неверной посылки.

[67] Смысл выражения «двоякий результат» остался нераскрытым. За двоеточием далее следует пункт a), между тем как пункта b) нет. Может быть, «двоякий результат» здесь состоит, во-первых, в том, что на левой стороне разность $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ преобразуется в $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{а не отождествляется с самого начала с } \frac{dy}{dx}\right)$, и, во-вторых, в том, что на правой стороне члены $3xh+h^2$ теперь удаляются с помощью правильной математической операции, а не посредством трюка.

[68] Выражение в кавычках выписано из цитированной выше книги Хайнда (§ 99, стр. 128—129).

[69] Имеется, очевидно, в виду, что теорема Тейлора была опубликована им в сочинении «Methodus incrementorum» в 1715 г., т. е. еще при жизни Ньютона, в трудах которого этой теоремы нет. См. также Приложение, стр. 594.

[70] Материалы, относящиеся к теоремам Маклорена и Тейлора, см. в настоящем издании, стр. 193, 205, 412, 441, 493, 498.

[71] Марксовы изложение и критику основных идей теории аналитических функций Лагранжа см. на стр. 199 настоящего издания.

[72] Речь идет об отдельных черновых заметках, часть которых публикуется в настоящем издании под общим заглавием «Первые наброски» (см. настоящее издание, стр. 140—163).

[73] В рукописи, посвященной истории дифференциального исчисления, имеются два, расположенных почти непосредственно друг за другом, места, в которые Маркс предполагал вставить: 1) исследование о теоремах Тейлора и Маклорена, 2) обсуждение теории аналитических функций Лагранжа (см. стр. 179). Этих своих намерений Марксу не удалось осуществить, хотя в его распоряжении был большой материал на эти темы, собранный им из имевшихся у него источников в основном еще до того, как он пришел к точке зрения на

сущность дифференциального исчисления, изложенной в его работах, посланных Энгельсу. Этот материал состоит преимущественно из конспектов, среди которых имеются, однако, и рукописи, содержащие подытоживающие или критические замечания Маркса. Наиболее значительные из этих замечаний содержатся в рукописях: 1) «Теорема Тейлора, теорема Маклорена и Лагранжева теория производных функций» (подробно о ее содержании см. настоящее издание, стр. 441) и 2) «Теорема Тейлора» (осталась неоконченной), соответствующие выдержки из которых и приводятся здесь (в качестве некоторого восполнения приведенных выше предположений Маркса). Выдержки из других конспектов на те же темы см. в настоящем издании, стр. 281, 412.

74 В руководствах по дифференциальному исчислению, находившихся в распоряжении Маркса, производные всех элементарных функций, за исключением тригонометрических, действительно выводились с помощью теоремы о биноме. Об этом Маркс пишет и сам в рукописи «Теоремы Тейлора и Маклорена, первая систематизация материала» (см. настоящее издание, стр. 419—420). Впоследствии Маркс сформулировал для этого класса функций другой способ дифференцирования, названный им «алгебраическим» (см. рукопись «О понятии производной функции»). Таким образом, ясно, что настоящая рукопись хронологически предшествует рукописям «О понятии производной функции» и «О дифференциале».

75 Так, в учебнике Хайнда (Hind, стр. 84—85) после примера, содержащего вывод теоремы о биноме с помощью разложения $(x+h)^m$ в ряд Тейлора, приводится вывод теорем Тейлора и Маклорена из теоремы о биноме.

76 Здесь (см. также настоящее издание, стр. 514) Маркс прямо говорит о том, что под «возрастанием» значения переменной x он имеет в виду любое изменение этого значения: как на положительное, так и на отрицательное приращение h.

77 Так как функция в x, по Марксу, есть некоторое выражение, то она представляет собой комбинацию знаков, которая рассматривается относительно вхождений в нее переменной x.

В данном случае имеются в виду члены ряда Маклорена, т. е. произведения («комбинации») двух выражений: 1) x^k ($k=0, 1, 2, 3, \ldots$) и 2) соответствующей «постоянной функции» $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

78 «Постоянной функцией» от x Маркс называет выражение, не содержащее вхождений переменной x. (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ и т. д. представляют собою выражения для функции $f(x)$ и ее последовательных производных, в которых все вхождения переменной x заменены постоянной — нулем. Результат такой замены в y, соответственно в производной $\frac{d^ky}{dx^k}$, обозначается в рукописи через (y), соответственно $\left(\frac{d^ky}{dx^k}\right)$. Этот способ обозначения, заимствованный Марксом у Бушарла (см. Бушарла, стр. 40), сохранен и в настоящем издании.

79 Маркс не объясняет здесь, что именно он понимает под «иррациональной природой постоянной (соответственно переменной) функции». По-видимому, речь идет о том, что причиной возникновения «исключений» в обоих случаях является наличие в разложении членов, не имеющих разумного математического смысла: в первом случае лишенных его непосредственно (как, например, «дробь» вида $\frac{0}{0}$), во втором — при определенных значениях переменной x (как, например, $\frac{c}{x-a}$ при $x=a$). «Иррациональность» какого-либо выражения при этом не означает, что оно содержит непременно знаки корня (ср. «алгебраические иррациональности»), но употребляется как противоположность

осмысленности (рациональности; ср. «рациональное дифференциальное исчисление Эйлера и Даламбера» в противоположность «мистическому Ньютона и Лейбница»!). Краткую общую характеристику случаев неприменимости Маркс дает в самом конце рукописи «Теоремы Тейлора и Маклорена, первая систематизация материала» (см. настоящее издание, стр. 440).

[80] Под «представимостью конечным уравнением» здесь, очевидно, имеется в виду представление в виде

$$f(x+h)=P_0+P_1h+P_2h^2+\ldots+P_nh^n,$$

где n — целое положительное число, P_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ — функции в x.

[81] Более подробное изложение доказательства теоремы Тейлора, содержавшегося в источниках, использованных Марксом, необходимое для понимания критики, которой Маркс подвергает его в следующих за этим строках, см. в Приложении, стр. 597—600.

[82] Это — отрывок из рукописи «Теорема Тейлора», помещаемый здесь, поскольку он содержит в наиболее концентрированном виде точку зрения Маркса на недостатки известных ему доказательств теоремы Тейлора, на ее «алгебраические» источники в биномиальной теореме и на существенные отличия от последней. (Подробнее о неоконченной рукописи «Теорема Тейлора» см. в настоящем издании, стр. 498.) Поскольку первый абзац этого отрывка представляет трудности при чтении в отрыве от предшествующего текста, заметим, что в этом абзаце Маркс подводит итог предшествующей части, посвященной критике доказательства теоремы Тейлора в книге Хайнда. В ней (см. Hind, § 74, стр. 83—84; §§ 77—80, стр. 92—96):

1) Теорема Тейлора доказывается в предположении, что выражение $f(x+h)$ может быть разложено в ряд вида

$$f(x)=Ph^{\alpha}+Qh^{\beta}+Rh^{\gamma}+\ldots,$$

где P, Q, R, ... — функции переменной x, показатели же α, β, γ, ... — возрастающие, целые, положительные числа.

2) Рассматриваются «случаи неприменимости» теоремы Тейлора, обусловленные тем, что для каких-нибудь частных значений переменной x эти условия не выполнены (какие-нибудь из коэффициентов P, Q, R, ... не определены: «не имеют конечных значений» в этих точках).

3) Делается попытка, следуя Лагранжу, показать, что, вообще говоря, т. е. за исключением отдельных частных значений переменной x, для каждой функции $f(x)$ выполнены предположения, в которых доказывается теорема Тейлора (показатели α, β, γ, ... не могут принимать отрицательных или дробных значений, функции P, Q, R, ... не обращаются «в бесконечность»). Критике бездоказательности такого рода попыток и посвящены следующие за этим замечания Маркса.

[83] Слова «например, $x=a$» относятся к рассматриваемому Хайндом примеру разложения в ряд Тейлора выражения $f(x+h)$, где $f(x)$ есть $x^2+\sqrt{x-a}$. При $x=a$ выражение $f(x+h)$ имеет осмысленное значение $(a+h)^2+\sqrt{h}$, между тем как представляющий его ряд Тейлора дает, по Хайнду, лишь «$a^2+2ah+h^2+0+\infty-\infty+\infty-$ и т. д., что ничего не определяет» (см. Hind, стр. 93).

[84] Под функциями $y=f(x)$, для которых $y_1=f(x+h)$ — это лишь символические выражения бинома какой-либо степени, здесь, конечно, имеются в виду функции $y=x^m$, где m — целое положительное число.

[85] Дословный перевод этого места гласил бы: «которые на пути дифференцирования не могут дать результата».

[86] Дословно: «в возможной исторической части этой рукописи».

[87] В рукописи «Об истории дифференциального исчисления» Маркс отмечает, что из простого различия в форме представления изменения значений

функции вытекают коренные различия в трактовке дифференциального исчисления (см. стр. 183). При этом он ссылается на «приложенные листки», в которых раскрыл эту мысль «при анализе метода Даламбера» (см. там же). Таких листков имеется две группы: листки одной из них помечены прописными латинскими буквами от A до H (см. настоящее издание, стр. 471), листки другой — строчными латинскими буквами от a до n (см. настоящее издание, стр. 468).

Так как Даламбер определяет производную через понятие предела, Маркс, естественно, начинает анализ его метода с критики понятия предела, неудовлетворительность которого достаточно ясна из приводимой в Приложении информации (см. «О понятии «предела» в источниках, которыми пользовался Маркс», стр. 565). Эта часть рукописи занимает листки от A до D (публикуется здесь, в соответствии с ее содержанием, под заглавием: «О неоднозначности терминов «предел» и «предельное значение»). Непосредственное отношение к упомянутому выше месту из рукописи по истории дифференциального исчисления имеют также и листки E — H, публикуемые здесь под заглавием: «Сравнение метода Даламбера с алгебраическим». Тому же вопросу, по существу, посвящены листки a — g из другой группы, которые здесь публикуются под заглавием: «Анализ метода Даламбера еще на одном примере». О содержании остальных листков из этой группы см. в настоящем издании стр. 468—470. В соответствии со ссылкой Маркса на приложенные отдельные листки, посвященные анализу метода Даламбера, все они объединены здесь общим заглавием: «Приложение к рукописи «Об истории дифференциального исчисления». Анализ метода Даламбера».

[88] Иными словами, здесь предлагается рассмотреть выражение $3x^2 + 3xh + h^2$ для неотрицательных значений x и h в предположении, что h неограниченно стремится к нулю (оставаясь отличным от нуля). Напомним, что в источниках, которые использовал Маркс, понятия абсолютной величины еще не было, при рассмотрении же сумм неотрицательных слагаемых его не требовалось.

[89] Здесь Маркс приступает к обоснованию делаемого им заключения о том, что «понятие предельного значения может быть неправильно истолковано и постоянно толкуется неправильно» (см. стр. 217), вследствие чего и представляется уместным заменить его каким-нибудь новым термином, понимаемым однозначно. В качестве такового он предлагает термин «абсолютное минимальное выражение», под которым имеется в виду предел в обычном теперь смысле слова (см., например, стр. 217 и Приложение, стр. 566). Критика Марксом рассматриваемых здесь определений «предельного значения» и способов употребления этого понятия в курсах Хайнда и Бушарла относится прежде всего к тому, что «предел» толкуется в них актуально, т. е. рассматривается как «последнее» значение функции для «последнего» значения аргумента, в силу чего и «представляет собой ребячество, происхождение которого следует искать в первом мистическом и мистифицирующем методе исчисления» (см. стр. 217). В настоящем абзаце имеется, очевидно, в виду «предельное значение» в смысле определения, приводимого Хайндом (см. Приложение, стр. 566), на практике трактовавшееся им как совпадающее с односторонними пределами функции при стремлении аргумента к некоторому числу справа или слева, в данном случае с односторонним пределом справа функции $3x^2 + 3xh + h^2$, рассматриваемой как функция от h при $h \to +0$. В отличие от Хайнда, Маркс подчеркивал, однако, что это «предельное значение» имеет смысл, только если оно не понимается актуально: вычисляется в предположении, что $h \neq 0$ (здесь $h > 0$), т. е. поступал так же, как это делаем теперь и мы. В то же время в применении к рассматриваемой им функции $3x^2 + 3xh + h^2$ этим не нарушаются требования, содержавшиеся в определении «пределов» (как точных верхней и нижней границ значений переменной), с которого начинается курс Хайнда. Действительно, как замечает Маркс, эта функция, во-первых, при приближении h к нулю постоянно приближается к своему пределу (тут, очевидно, нижнему) и, во-вторых, никогда его не достигая, тем более, следовательно, никогда не переходит за него, т. е. заведомо удовлетворяет обоим требованиям определения Хайнда (соблюдения этих требований сам Хайнд обычно не проверял; см. Приложение, стр. 566).

[90] Если (односторонний) предел функции $3x^2 + 3xh + h^2$ при стремлении h к нулю (справа, т. е. при убывании h) толкуется актуально, т. е. аргумент h предполагается достигающим своего предельного («последнего») значения 0, то в качестве множества значений функции, по отношению к которому, согласно определению Хайнда, предел должен быть точной нижней границей, достаточно выбрать множество, состоящее из одного только значения функции при $h = 0$ (см. Приложение, стр. 566), в данном случае, следовательно, из одного только числа $3x^2$, на которое, однако, как говорит Маркс ниже, было бы «пошлой тавтологией» смотреть как на предельное значение для того же $3x^2$ при стремлении h к нулю. Иными словами, о $3x^2$ естественно говорить как о предельном значении для $3x^2 + 3xh + h^2$ при стремлении h к нулю, между тем как рассмотрение $3x^2$ как предельного значения для того же $3x^2$, также при стремлении h к нулю, не представляется здесь осмысленным — прежде всего, поскольку оно является вообще излишним: не дающим нам ничего нового.

[91] Само выражение $\frac{0}{0}$ рассматривается здесь как предел отношения $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, аналогично тому как это делалось в курсе Бушарла (см. Приложение, стр. 570), но с тем отличием, что и здесь предельные значения (опять-таки в смысле Хайнда) для функций $x_1 - x$ и $y_1 - y$ при $x_1 \to +x$ не понимаются Марксом актуально, т. е. ищутся в предположении, что $x_1 \neq x$ (здесь $x_1 > x$).

[92] Тут снова речь идет о том, что $\frac{0}{0}$ $\left(\text{или } \frac{dy}{dx}\right)$ нельзя трактовать актуально, т. е. как значение отношения $\frac{y_1 - y}{h}$ при $h = 0$, поскольку в таком случае, следуя Хайнду и получая предельное выражение $\frac{0}{0}$ простым полаганием $h = 0$, пришлось бы допустить рассмотрение этого выражения, в котором никаких следов отношения $\frac{y_1 - y}{h}$, содержавшего переменную h, не осталось, как предельного значения для того же $\frac{0}{0}$ (рассматриваемого как «постоянная» функция от h) при $n \to +0$, что вообще не дает ничего нового. Однако по отношению к выражению $\frac{y_1 - y}{h}$, рассматриваемому при h, отличном от нуля (здесь $h > 0$), $\frac{0}{0}$, точнее, противостоящая ему «в качестве реального эквивалента» производная функция, есть, как говорит Маркс, «его абсолютное минимальное выражение», т. е. предел в обычном теперь смысле.

[93] В оригинале было первоначально: «к приведенным выше дифференциальным уравнениям» («auf obige Differentialgleichungen»), но слово «obige» Маркс зачеркнул. Ясно, однако, что, как и прежде, здесь речь идет не об уравнениях в собственном смысле слова, а об истинных формулах дифференциального исчисления, имеющих вид равенств.

[94] У Маркса здесь написано: «с геометрическим»; ясно, что это описка.

[95] Как уже было отмечено, в источниках, использованных Марксом, нуль не считался конечной величиной. Поэтому здесь речь идет о том, что разность $x_1 - x = h$, становясь сколь угодно малой, все же остается отличной от нуля.

[96] Маркс вместо $x + \tau\dot{x}$ пишет здесь просто $x + \dot{x}$. О причинах такой замены см. настоящее издание, стр. 145, а также примечание [60].

[97] Настоящая заметка представляет собой содержание листков a — g. Листки h — n, содержащие только черновые выкладки или незаконченные записи, в смысле которых трудно разобраться, не публикуются здесь; о них см. в Описании, стр. 468—470. Листки a — g посвящены анализу метода Даламбера, проводимому на примере той самой сложной функции, которую Маркс рассматривает в рукописи «О дифференциале».

[98] Символы $f(x)$, $f(u)$ употреблены здесь как сокращения для выражений: «некоторая функция в x», «некоторая (другая) функция в u». В написанной позднее рукописи «О дифференциале» при разборе того же примера Маркс обозначает уже эти функции разными буквами.

[99] В книге Феллера и Одермана приводится правило, позволяющее купцу вычислить сумму x, которую он должен запросить за свой товар, если он хочет получить за него, после такой-то скидки *со* ста или *на* сто, такую-то сумму.

[100] Вопрос о том, какой именно «фокус» у Бушарла здесь имеет в виду Маркс, представляет некоторую трудность. Во всяком случае следует заметить, что dy определяется у Бушарла только через dx $\left(\text{точнее, определяется только их отношение } \frac{dy}{dx}\right)$. Поэтому, чтобы знать, что такое dy, нужно уметь ответить на такой вопрос для dx. Но если для всякого x $y = x$, то мы получаем, по Бушарла, только $dy = dx$, т. е. $dx = dx$, что не дает никакого ответа на вопрос о том, что же следует понимать под dx. Если Сори говорит просто, что dx есть бесконечно малое приращение x (здесь Маркс еще не встретился с трудностями, связанными с актуально бесконечно малыми в исчислениях Ньютона и Лейбница), то Бушарла только делает вид, будто он действительно объясняет, что такое dx. Не случайно Маркс приводит соответствующие слова Бушарла в кавычках: dx «is itself the differential of x» (dx «сам есть дифференциал от x»). Полный текст § 9 из курса Бушарла и некоторые комментарии к нему см. в Приложении, стр. 589.

[101] Русский перевод работы Ньютона (с комментариями Д. Д. Мордухай-Болтовского) см. в книге: И. Ньютон, Математические работы, М., ОНТИ, 1937, стр. 3—24. Выписки относятся к началу («Квадратура простых кривых, Правило I») и к концу («Доказательство квадратуры простых кривых по первому правилу») этой работы Ньютона (стр. 3 и 22—23).

[102] В начале работы Ньютона после слов: «Принимаются обозначения $AB = x$, $BD = y$; пусть a, b, c будут известные величины, а m, n — целые числа» — под заголовком «Квадратура простых кривых, Правило I» приводится утверждение: «Если $ax^{m/n} = y$, то $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ = площади ABD», которое в этом месте не доказывается, а только формулируется, «разъясняется примерами». Именно это обстоятельство и имеет здесь в виду Маркс. Приводимое Ньютоном в конце работы доказательство также не удовлетворяет Маркса (см. дальнейший текст рукописи и примечание [103]).

[103] Далее следует замечание, отмеченное Марксом слева вертикальной чертой, по-видимому, для того, чтобы показать, что это не конспект, а вставка, принадлежащая самому Марксу. В этой вставке Маркс критикует приводимое им ниже Ньютоново доказательство теоремы (ее обычно называют теоремой Ньютона — Лейбница) о связи между определенным интегралом и первообразной функцией. Высказываемое Марксом при этом предположение, что Ньютону уже было известно — из геометрии, трактуемой аналитически,— содержание доказываемой им теоремы, исторически вполне оправдано. Как известно, учитель Ньютона — Барроу действительно обнаружил связь между задачами на отыскание площадей и на проведение касательных, т. е. между квадратурами — вычислением определенных интегралов — и дифференцированием. Сущность других упреков Маркса в адрес Ньютона состоит в том, что последний вообще не вводит понятия определенного интеграла как некоторого предела сумм и не выполняет в соответствии с этим никакого процесса интегрирования в этом смысле, а также в том, что, обнаружив в подынтегральной функции $f(x)$ производную по x от $\int_0^x f(t)\,dt$, Ньютон делает отсюда заключение, что и, наоборот,

первообразная от $f(x)$ есть $\int\limits_0^x f(t)\,dt$, не учитывая того, что первообразная определяется неоднозначно.

[104] Под аналитической геометрией Маркс здесь понимает геометрические приложения математического анализа, или геометрию, рассматриваемую аналитически. Элементы такой геометрии, как известно, создавались еще до Ньютона в работах Ферма, Паскаля, Гюйгенса.

[105] Здесь Маркс хочет сказать, очевидно, что Ньютону было известно из «аналитической» геометрии, что если $z(x)$ есть площадь, ограниченная (как это делается обычно) кривой $y = f(x)$, то она есть интеграл от $y\,dx$, т. е. от $f(x)\,dx$, где $f(x)$, т. е. выражение, заимствованное из уравнения кривой, есть результат дифференцирования функции $z(x)$.

[106] В этом месте у Ньютона действительно имеются неясности, связанные с его пониманием «предела» как актуально достигаемого «конца» некоторого процесса «бесконечного» (неограниченного) приближения к «последнему» (предельному) состоянию (см. Приложение, стр. 574). Трапеция (криволинейная) $BD\delta\beta$ (см. рисунок на стр. 276) заменяется у Ньютона прямоугольником с тем же основанием $B\beta$ и высотой BK, которая предполагается выбранной так, чтобы прямоугольник $KB\beta H$ был равновелик трапеции $BD\delta\beta$. Последняя, следовательно, предполагается квадрируемой. Однако и в этом предположении остается неясным, что дает Ньютону право считать, что в «последнем» состоянии, т. е. когда $B\beta$, неограниченно уменьшаясь, обратится наконец в 0, высота KD, которую Ньютон обозначает буквой v, должна будет совпасть с ординатой DB, или y. Ведь при этом мы будем иметь только $KD \cdot 0 = BD \cdot 0$, а это равенство верно при любых KD и BD.

[107] Здесь Маркс, по-видимому, имеет в виду то самое, что было сказано им выше (в пунктах 2) и 3)) о доказательстве Ньютона, именно, что «он строит кривую не из уравнения $y =$ и т. д., но геометрически, предполагая площадь заданной», и «избегает действительно интегрировать или показать, как надлежит проделать этот обратный процесс с помощью исчисления», т. е. что уравнение кривой $y = f(x)$ вообще не используется Ньютоном в этом доказательстве: с $f(x)$ не производится какая-либо операция интегрирования или дифференцирования (дифференцируется не уравнение кривой, а уравнение площади). Определение интеграла как предела суммы скрыто у Ньютона за его пониманием дифференциала площади криволинейной трапеции, ограниченной на отрезке $[a, b]$ кривой $y = f(x)$, как $y dx$. У Ньютона, однако, нет ни точного определения площади такой трапеции, ни тем более такого определения интеграла $\int\limits_0^x f(x)\,dx$, которое содержало бы в себе конструктивный способ его приближенного вычисления. Именно в этом — в переводе на современный язык — и упрекает его Маркс.

[108] То есть и в одновременном обращении в нуль обоих приращений Δx и Δy проявляется зависимость y от x.

[109] Превращение Δx в dx, состоящее, по Марксу, в обращении отличного от нуля Δx в равный нулю dx, Маркс называет отрицанием Δx. Заметим, что и формально отрицанием неравенства нулю является равенство нулю (если двойное отрицание A дает A). Об отличии диалектического (содержательного) двойного отрицания от такого формального см. также в начале рукописи «О понятии производной функции» (см. настоящее издание, стр. 29).

[110] В современных курсах математического анализа дифференциал вводится обыкновенно как главная, линейная, часть приращения функции, и он же на деле выступает одновременно как оперативный символ дифференциального

исчисления. У Маркса эти две функции дифференциала разделены. Дифференциалу как оперативному символу: $dy = f'(x)\,dx$ — соответствуют дифференциальные частицы dx, dy, в точности равные нулю; дифференциал же dy как главная часть приращения функции $y = f(x)$ определяется формулой $dy = f'(x)\,h$, где h —«конечное» (отличное от нуля) приращение независимой переменной x. Аналогично поступает и Эйлер (см. Приложение, стр. 577).

111 Как ясно из более поздних рукописей, прежде всего из публикуемых в первой части настоящего издания, Маркс изменил в дальнейшем свою оценку метода Лагранжа. В данном случае, однако, речь идет, очевидно, только о том, что не приходится возражать против Лагранжева способа выяснения соотношения между коэффициентами разложения $f(x+h)$ в ряд по степеням h и последовательными производными функции $f(x)$.

112 Указанные страницы книги Хайнда посвящены оценке (сверху и снизу) остаточного члена ряда Тейлора — оценке «количества, которое опускается, когда мы останавливаем ряд на любом его указываемом члене» (Hind, стр. 87). Такого рода оценка должна производиться, по Хайнду, когда речь идет не об «аналитических преобразованиях функции»— причем можно пользоваться и расходящимися рядами,— а о вычислении какого-нибудь ее частного значения.

113 Далее Маркс приводит пример, в котором обращение в нуль числителя дроби при некотором значении переменной x должно повлечь за собой обращение в нуль ее знаменателя. При этом, однако, он в выкладках допускает ошибку, которую в его примере нельзя исправить. Здесь это место опущено. Примеры, поясняющие эту мысль Маркса, см. в примечании [114].

114 Вслед за этим Маркс снова обращается к опущенному нами примеру (см. примечание [113]), теперь уже без прежней ошибки. Однако и на этот раз допускает ошибку в выкладке, носящую, правда, характер описки. Хотя пример, выбранный Марксом, неудачен, но мысль, которую он хотел выразить здесь, ясна. Именно, отмечается, что в дифференциальном исчислении числитель $f(x+h) - f(x)$ дробного выражения обращается в нуль в результате обращения в нуль знаменателя, между тем как, вообще говоря, в «алгебре» возможны и такие случаи, когда равенство нулю знаменателя является следствием того, что числитель обращается в нуль. Таким был бы, например, случай дроби $\frac{x-a}{x^2-a^2}$, в которой мы положили бы числитель равным нулю, т. е. придали бы переменной x значение a. Или случай дроби $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ (a, b, c — попарно разные числа), где из равенства нулю числителя немедленно следует и равенство нулю знаменателя, но не наоборот. В связи с этим см. также рукопись «О дифференциале» (см. настоящее издание, стр. 51) и примечание [18].

115 Здесь у Маркса понятие «предела» еще очень тесно связано, по-видимому, с понятием «границы изменения» (см. Приложение, стр. 565).

116 Это критическое замечание в адрес Бушарла Маркс развивает затем в рукописи «О дифференциале» (см. настоящее издание, стр. 61, 63).

117 В учебнике Бушарла (см. Boucharlat, 5-е изд, стр. 34, § 55) доказательство теоремы Тейлора начиналось с леммы: «Если в функции y от x переменная x изменяется в $x+h$, то мы получаем один и тот же дифференциальный коэффициент в обоих случаях: как в случае, когда x — переменная, а h — постоянная, так и в случае, когда h — переменная, а x — постоянная». (См. также Приложение, стр. 598.)

118 Так как в основных руководствах, имевшихся в распоряжении Маркса, приводились не только одни и те же формулировки теорем Тейлора и Маклорена, но и в точности одинаковые их доказательства, естественно было предполагать, что и эти доказательства принадлежат авторам теорем (в применении к теореме Маклорена это действительно имело место; см. Приложение, стр. 596).

[119] Здесь речь идет о доказательстве теоремы Тейлора в учебнике Бушарля (см. Boucharlat, стр. 36—37 или Приложение, стр. 597).

[120] Здесь Маркс применяет некоторый сокращенный (стенографический) способ записи, заменяя слова «функция y» выражением «$f(y)$». Это место, таким образом, следует читать: «...Тейлор начинает не с функции y, или $y = f(x)$, но...».

[121] В этой заметке Маркс, так же как и в ряде других рукописей (см., например, стр. 213), написанных, по-видимому, позднее, сопоставляет метод актуально бесконечно малых Ньютона и Лейбница с методом пределов, но толкуемых актуально: как достигаемых в конце некоторого бесконечного процесса приближения переменной к ее предельному значению; причем на этот «конец» распространяются без какого-либо обоснования соотношения, имеющие смысл только для допредельных состояний (например, рассматриваются как подобные данным «треугольники», у которых стороны равны нулю). Заключение, к которому приходит здесь Маркс, состоит в том, что такой «метод пределов», по существу, не лучше метода актуально бесконечно малых. (См. Приложение, стр. 566 и 574).

[122] Здесь речь идет об анализе особых случаев задачи о двух курьерах, разбираемой Лакруа в «Элементах алгебры» (§ 64, стр. 94—96), именно о том случае, когда оба курьера, выехавшие из двух городов, находящихся на расстоянии a один от другого, двигаются в одном и том же направлении так, что скорость второго (b) превышает скорость первого (c), причем b является постоянной ($b = 6$ *км/час*), а c возрастает: принимает последовательно значения 5,8; 5,9; 5,999 и т. д. Требуется найти длины пути x и y, пройденные каждым курьером до того пункта, где второй догонит первого. Как нетрудно обнаружить, решения при этом имеют вид

$$x=\frac{ab}{b-c}, \qquad y=\frac{ac}{b-c}$$

и при c, стремящемся к b, неограниченно возрастают.

[123] Здесь Маркс имеет в виду то обстоятельство, что при стремлении h к нулю член $f'(x)$ в выражении $f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)h+\ldots$ остается неизменным, так как в ходе этой операции x предполагается постоянной.

[124] В этом замечании Маркса речь идет о следующих двух местах из «Eléments d'algèbre par L. Euler» (Lyon, 1795). а) «Здесь необходимо еще рассеять достаточно распространенную ошибку тех, кто считает бесконечно большое недоступным увеличению. Это мнение несовместимо с надежными началами, которые мы только что установили [вводя $\frac{1}{\infty}$ как 0 и поэтому $\frac{1}{0}$ как ∞. — *Ред.*]; ибо если $\frac{1}{0}$ обозначает бесконечно большое число, то, так как $\frac{2}{0}$ есть, несомненно, удвоенное $\frac{1}{0}$, ясно, что число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше» (§ 84, стр. 60). б) В другом месте (§ 293, стр. 227) Эйлер представляет алгебраическую дробь бесконечным рядом $1+a+a^2+\ldots$ и замечает: «Предположим прежде всего $a=1$; наш ряд превратится в $1+1+1+$ и т. д. до бесконечности. Дробь же $\frac{1}{1-a}$, которой он должен быть равен, обратится в $\frac{1}{0}$, но мы заметили выше, что $\frac{1}{0}$ есть бесконечно большое число; это, следовательно, получает здесь элегантное подтверждение».

[125] «Определимость задачи» здесь понимается как означающая, что задача допускает такую формулировку (с помощью уравнений), которой однозначно определяются искомые значения неизвестных.

[126] Тут, конечно, как и ниже, под «числом уравнений» имеется в виду число независимых уравнений, ни одно из которых не является, следовательно, логическим следствием из остальных.

[127] Под «собственной дробью» здесь подразумевается «дробь в собственном смысле слова» («une fraction proprement dite», как пишет Лакруа, см. стр. 3 упомянутого «Трактата»), т. е. выражение вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены, расположенные по степеням какой-либо переменной — например x, — такие, что деление «углом» P на Q дает остаток R, степень которого меньше степени Q. Выражение «собственной дроби» в виде бесконечного ряда не есть, по Лакруа, выражение определяемой этой дробью функции в ее «собственной» форме, поскольку «алгебраические функции содержат всегда только ограниченное число членов» (там же).

[128] Приближенные значения логарифмов могут быть найдены с помощью извлечения квадратных корней, т. е. некоторых «алгебраических операций». Но никакое конечное число этих операций не достаточно для точного вычисления логарифма действительного числа в общем случае. (У Лакруа мы читаем: «Таковы, например, логарифмы, которые можно получить только приближенно и которые зависят от извлечения бесконечного числа корней», там же, стр. 4.)

[129] То есть здесь не идет речь об определенной дуге какой-либо определенной окружности: дуга рассматривается не как таковая, а лишь по отношению ко всей окружности — как некоторая ее часть, т. е. как угол (две разные дуги, но составляющие одинаковые части двух разных окружностей, при этом отождествляются). Это замечание Маркса объясняется тем, что у Лакруа $\sin x$ рассматривается еще не как число, определяемое другим числом: x, а как отрезок, длина которого зависит не только от угла, но и от радиуса окружности с центром в вершине угла. Действительно, Лакруа пишет: «Здесь мы отвлеклись от радиуса, хотя величина синуса зависит и от этого элемента, так как мы имеем в виду только один круг» (там же, стр. 3).

[130] Здесь, конечно, под «изменением функции x» имеется в виду изменение значений этой функции. Напомним, что «функцией x» (или «функцией в x») Маркс называет «алгебраическое» выражение, рассматриваемое по отношению к вхождениям в него переменной x или ее значений.

[131] Это основная теорема алгебры предполагается здесь Марксом уже доказанной.

[132] Здесь имеется в виду не уравнение, а только его левая часть; ниже Маркс и сам отмечает, что, говоря об общем уравнении $f(x) = 0$, он в таких случаях имеет в виду его левую сторону, т. е. $f(x)$.

[133] Это — ссылка на принадлежащее самому Маклорену доказательство теоремы, носящей его имя. Оно приводится в учебнике Бушарла (см. Boucharlat, стр. 20—21 и Приложение, стр. 598).

[134] Значительная часть дальнейшего текста перечеркнута карандашом.

[135] Речь идет об отыскании кратных корней «предложенного» уравнения $f(x) = 0$ (и их кратностей). (Как известно, корни кратности k уравнения $f(x) = 0$ являются общими корнями уравнений $f(x) = 0$, $f'(x) = 0, \ldots$ $\ldots, f^{(k)}(x) = 0$, не удовлетворяющими уравнению $f^{(k+1)}(x) = 0$.) В своем учебнике алгебры Лакруа нигде не пользуется терминами дифференциального исчисления и настолько избегает их, что не вводит даже понятия многочлена, производного от многочлена

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

которым он мог бы, по определению, назвать многочлен

$$ma_0x^{m-1} + (m-1)\,a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}.$$

Обозначение $f(x)$ для левой стороны «предложенного» уравнения также отсутствует поэтому у Лакруа; оно введено здесь Марксом. Многочлены, которые мы теперь обозначили бы через $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ..., Лакруа обозначает соответственно буквами V, A, B, ... Отсутствие удобной символики заставляет его, однако, обозначать иногда теми же буквами V, A, B, ... и многочлены $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... Наоборот, Маркс прежде всего обращает внимание на то, что все эти многочлены получаются из $f(x)$ последовательным дифференцированием.

[136] Это и есть то уравнение (2), о котором Маркс говорит в начале пункта 3). Уравнение

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0$$

в конспекте Маркса имеет номер (1).

[137] Результат подстановки $y+a$ на место x в многочлен

$$f(x)\equiv x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U$$

Лакруа представляет в виде

$$V+Ay+\frac{B}{2}y^2+\frac{C}{2\cdot 3}y^3+\ldots+y^m,$$

откуда

$$V=f(a),\quad A=f'(a),\quad B=f''(a),\quad C=f'''(a),\ \ldots$$

Если a — кратный корень (кратности k) уравнения $f(x)=0$, то

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k)}(a)=0,$$

т. е. $V=A=B=C=\ldots=0$. Именно это и доказывает Лакруа. Способ этого доказательства Маркс воспроизводит ниже.

[138] Ги́стерон-про́терон — это логическая ошибка, состоящая в том, что последующее (hysteron) ставится перед предыдущим (proteron), например: «телега впереди лошади».

[139] Вынесение y за скобки в уравнении (II) и сведение, таким образом, отыскания корней уравнения (II) к отысканию корней уравнения (IIa) Лакруа изображает как «деление» на y обеих частей уравнения (II). См. цитируемую книгу Лакруа, стр. 281. Этой же терминологией пользуется здесь и далее Маркс.

[140] Здесь предполагается, конечно, что a есть корень уравнения (1) кратности k, где $k>1$.

[141] Иными словами, можно было бы и просто сформулировать правило, состоящее в том, что если a есть кратный корень уравнения (1), то он же есть корень и уравнения $A=0$, где A — производная от левой стороны уравнения (1). Дальнейшие выкладки, содержащиеся в рукописи Маркса, отсутствуют у Лакруа.

[142] В предположении, конечно, что a — корень кратности k, где $k>2$.

[143] См. примечание [133].

[144] В оригинале $x=0$, но это, по всей видимости, описка, поскольку для понимания дальнейшего текста достаточно заметить, что Маркс здесь, по-видимому, имеет в виду аналогию с методом дифференцирования, излагаемым Бушарла по Лагранжу и состоящим в том, что $f(x+h)$ разлагается в ряд по степеням h:

$$f(x+h)=f(x)+Ph+Qh^2+Rh^3+\ldots,$$

после чего отношение $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ оказывается равным

$$P+Qh+Rh^2+\ldots \tag{1}$$

Отыскание предела отношения $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, т. е. производной $f'(x)$, таким образом, сводится Бушарла к полаганию $h=0$ в выражении (1). Роль h здесь у Маркса играет a.

[145] Маркс, по-видимому, говорит здесь о том, что при алгебраическом получении выражения A из выражения V мы, в сущности, делаем то же самое, что сделал бы Бушарла, применяя изложенный в предыдущем примечании метод дифференцирования к отысканию производной функции A от V; роль h в алгебраическом выводе A из V при этом играет неизвестная y.

[146] Речь идет о способе исключения одной неизвестной из двух уравнений с двумя неизвестными, предложенном Эйлером в его «Введении в анализ бесконечных» (гл. XIX, §§ 483—485, в русском издании 1961 г. стр. 253—255). С целью исключения неизвестной x из приводимых Марксом уравнений 1) и 2), коэффициенты которых (P, Q, . . ., P_1, Q_1, . . .) содержат переменную y, первое уравнение помножается на многочлен $x^{n-1}+px^{n-2}+qx^{n-3}+\ldots$ с неопределенными коэффициентами p, q, . . ., второе — на многочлен $x^{n-1}+p_1x^{n-2}+$ $+q_1x^{n-3}+\ldots$ с неопределенными коэффициентами p_1, q_1, . . . Приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в полученных произведениях задача сводится к решению системы $m+n-1$ уравнений, линейных относительно $m+n-2$ неизвестных p, q, . . ., p_1, q_1, . . ., с коэффициентами P, Q, . . ., P_1, Q_1, . . ., зависящими только от x. Последнее из этих уравнений при подстановке в него выражений для p, q, . . ., p_1, q_1, . . . и P, Q, . . ., P_1, Q_1, . . ., найденных из первых $m+n-2$ уравнений, и дает «заключительное» уравнение (результант), не содержащее уже неизвестной x. В своих «Элементах алгебры» Лакруа излагает способ Эйлера только на примере (см. §§ 192—195, стр. 264—270). (Современное изложение метода Эйлера см., например, в книге: Ван-дер Варден, Современная алгебра, М.— Л., 1947, § 27, стр. 115—117.)

[147] На этом замечание Маркса обрывается, и продолжается конспект вышеуказанной главы из «Элементов алгебры» Лакруа. Что именно здесь хотел сказать Маркс, остается неясным. Ясно только, что он имел в виду некоторую аналогию между методом Эйлера для исключения неизвестной (см. примечание [146]) и способом доказательства теоремы Тейлора в учебниках Хайнда и Бушарла. Доказательство это основано на допущении, что если $y=f(x)$, то

$$f(x+h)=y+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots,$$

где A, B, C, . . . —«неизвестные функции от x, которые требуется определить» (Boucharlat, стр. 36). Иными словами, как и в случае неопределенных коэффициентов p, q, . . ., p_1, q_1, . . . в методе Эйлера, речь не идет уже о числовых «неопределенных коэффициентах». Последние рассматриваются как подлежащие определению функции от «второй» из двух неизвестных или переменных (h и x в доказательстве теоремы Тейлора; соответственно x и y в методе Эйлера).

[148] Как и большинство других математиков его времени, Лакруа называет ряд сходящимся, если «образующие его члены убывают по мере их удаления от первого члена» (Lacroix, стр. 328). Это определение Маркс и приводит в своем конспекте.

[149] Иными словами, здесь используется то обстоятельство, что показательная функция $f(t)=a^t$ удовлетворяет функциональному уравнению $f(x)\cdot f(z)=$ $=f(x+z)$. Именно, пишутся ряды:

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots,$$

$$a^z=1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots,$$

$$a^{x+z}=1+A(x+z)+B(x+z)^2+C(x+z)^3+\ldots,$$

первые два перемножаются, и неопределенные коэффициенты A, B, C, . . . определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых членах вида x^iz^k в рядах для $(a^x\cdot a^z)$ и a^{x+z}.

[150] В имеющемся у нас 11-м (французском) издании «Элементов алгебры» Лакруа (1815 г.) этого замечания нет. Можно думать, что если и не все это замечание, то хотя бы его последний абзац принадлежит Марксу. Для понимания приводимого ниже места из рукописи Маркса достаточно заметить, что в §§ 260, 261 (стр. 355—357) книги Лакруа речь идет о денежной сумме A, ссужаемой в рост (r на единицу в год) на n лет и погашаемой должником в течение этих n лет ежегодными взносами одной и той же суммы a. Рассматривая капитал A

как обращающийся к концу n-го года в $A\,(1+r)^n$, а денежные суммы a, выплачиваемые в конце первого, второго и т. д. года, как равноценные к концу n-го года суммам $a\,(1+r)^{n-1}$, $a\,(1+r)^{n-2}$, $\ldots, a$ соответственно, Лакруа получает равенство

$$A\,(1+r)^n = a\,(1+r)^{n-1} + a\,(1+r)^{n-2} + \ldots + a,$$

откуда, суммируя прогрессию в правой части, находит

$$A\,(1+r)^n = \frac{a\,[(1+r)^n - 1]}{r}\,. \tag{1}$$

Равенства

$$A = \frac{a}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\} = \frac{a}{r} - \frac{a}{r\,(1+r)^n}\,,$$

которые приводит ниже Маркс, получаются путем деления обеих частей равенства (1) на $(1+r)^n$. Так как A есть сумма, которую нужно уплатить в данный момент, чтобы окончательно расквитаться с кредитором, то A называется «наличной стоимостью» долга.

[151] Этот подсчет, основанный на том, что при $n = 99$ и $r = \frac{1}{20}$ мы имеем $(1+r)^n = \left(\frac{21}{20}\right)^{99}$, нетрудно выполнить с помощью таблицы логарифмов. Действительно, $\log\left(\frac{21}{20}\right)^{99} = 99\,(\log 21 - \log 20) = 2{,}0977$, откуда $\left(\frac{21}{20}\right)^{99} \approx 125$.

[152] Такое изложение вопроса о линейной зависимости (о «варьировании») Маркс мог найти во многих английских учебниках его времени. Так, даже в курсе «Элементарной алгебры» Потса (R. Potts, Elementary Algebra, Section IX, 1880, стр. 16) мы читаем: «Знак $\propto$ употребляется вместо слов «varies as» («варьирует как»), и пропорциональность [переменной x другой переменной y] записывается в виде $x \propto y$ и читается: «x варьирует, как y». Предложение 23 у Потса гласит: «Если x варьирует, как y, а y варьирует, как z, то x варьирует, как z» (стр. 17). Потс приводит и другие предложения о свойствах варьирования.

[153] Это критическое замечание Маркса направлено против «расширения» понятия перестановки, о котором шла речь выше (см. настоящее издание, стр. 376) и при котором неизбежна путаница между понятиями «перестановки» и «размещения» (смешение их). Суть дела в том, что хотя перестановка из n элементов может рассматриваться как размещение из n элементов по n, но при этом сохраняется различие между перестановкой из n элементов и размещением из n по m (при $m < n$), между тем как при том «расширении» понятия перестановки, о котором пишет Маркс, это различие теряет смысл.

[154] Здесь, по-видимому, имеется в виду способ получения всех размещений из n элементов по m посредством: а) составления всех перестановок из n элементов, б) отделения в каждой из них m первых элементов от остальных и в) отождествления, наконец, между собою всех таких перестановок, у которых начала («слова» из первых m букв) совпадают. Поскольку число таких перестановок равно $(n-m)!$, то ясно, что число размещений из n по m равно $\frac{n!}{(n-m)!}$. И ясно также, что никакого «расширения» понятия перестановки при этом не требуется.

[155] Ясно, что под словами «разделить на множитель y» выражение вида $Ay + By$ Маркс имеет в виду формальное преобразование, состоящее в том, что y выносится за скобки и выделяется второй множитель $(A + B)$, который и рассматривается как результат такого «деления» независимо от того, равен y нулю или нет.

[156] Если уравнение имеет корень $y = 0$, то его левая часть представима в виде произведения $(Ay + B)\,y$. «Разделив» в смысле, о котором шла речь в примечании [155], левую часть этого уравнения на y, мы получим уравнение $Ay + B = 0$, которое в случае, когда $y = 0$ есть кратный корень первоначаль-

ного уравнения, в свою очередь имеет корень $y = 0$, в силу чего B должно быть равно нулю независимо от y, о чем и говорит Маркс.

[157] Преобразуя уравнение подстановкой

$$x = y + k,$$

Маклорен выписывает члены с одинаковыми степенями y в колонку друг под другом. Вертикальный ряд, о котором здесь говорит Маркс, соответствует свободному члену уравнения, получаемого в результате этого преобразования.

[158] Здесь, по-видимому, Маркс хочет объяснить, почему при отыскании границ корней нельзя ограничиться рассмотрением свободного члена преобразованного уравнения и приходится обращаться последовательно к коэффициентам предшествующих ему членов, начиная с предпоследнего (т. е. к производным от последнего).

Можно думать, что в последней фразе из этого замечания у Маркса просто описка: вместо слова «Wurzeln» («корней») он написал «Gliedern» («членов»), имея в виду, очевидно, что положительные корни содержатся между нулем и их верхней границей, а отрицательные корни — между их нижней границей и нулем.

[159] Здесь Маркс обращает внимание на различие в формах выражения степенного ряда для $f(x+h)$. Если этот ряд пишется в виде

$$f(x) + ph + q\frac{h^2}{1\cdot 2} + r\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.},$$

то коэффициентами $p, q, r, \ldots$ являются последовательные производные $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$ Это, однако, будет неверно, если ряд написан в форме

$$f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

[160] Употребляемый здесь Марксом термин «mehrnamig» («многоименный») означает, очевидно, сложную функцию, выразимую через элементарные. Функцию, «выразимую через элементарные», можно определить, например, так:

1) все элементарные функции, такие, как x^m, a^x, $\log x$, $\sin x$ и др., «выразимы через элементарные»;

2) если какая-нибудь функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ «выразима через элементарные», то функция, получаемая из нее подстановкою функций, «выразимых через элементарные», на место аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, также «выразима через элементарные».

Сложными функциями будут тогда, очевидно, такие функции, «выразимые через элементарные», которые сами уже не являются элементарными и в общем случае содержат поэтому несколько «имен» элементарных функций, вроде $\log\sin x$, $\sin^m x$ и др.

[161] Под алгебраическими выражениями с конечным числом членов здесь, несомненно, имеются в виду многочлены.

[162] У Хайнда, как и в других источниках, которыми пользовался Маркс, выражения, содержащие $\sqrt{-1}$, рассматривались как свидетельствующие о неразрешимости задачи, как «невозможные». Наоборот, выражения, не содержащие мнимостей, назывались часто «возможными». То обстоятельство, что Маркс употребляет этот термин в кавычках и рассматривает появление мнимости в выражении тоже лишь как несчастье в кавычках, свидетельствует, как можно думать, о том, что он к такой «невозможности» относится иронически.

[163] В ряде своих рукописей Маркс приводит библиографические сведения о мемуаре Тейлора «Метод приращений», в котором содержится теорема Тейлора. Листок, приложенный к рукописи «Об истории дифференциального исчис-

ления», также содержит указание на этот мемуар. По-видимому, это свидетельствует о том, что Маркс собирался познакомиться с указанной работой в оригинале. В пользу такого предположения говорит и то, что Маркс специально отмечает, что сведения о теореме Маклорена он заимствовал непосредственно у самого Маклорена. Здесь, однако, источником его информации остаются еще только имеющиеся у него учебники. В учебнике Хайнда (стр. 84—85) приводится вывод биномиальной теоремы (при m целом и положительном) из теоремы Тейлора и результат записывается в виде

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{m-3}h^3 + \text{ и т. д.}$$

То обстоятельство, что последние члены разложения не выписаны, дало, по-видимому, основание Марксу приписывать автору стремление трактовать этот частный случай с более общей точки зрения. Естественно, что «автором» Марксу здесь мог представляться сам Тейлор.

[164] Эти два листка носят черновой характер и содержат описки, которые мы позволили себе исправить, поскольку смысл текста совершенно ясен. Источником пункта 1) является здесь, по-видимому, курс Сори (т. III, стр. 3). Источник пункта 2) не установлен. Излагая метод Лагранжа, Лакруа ссылается на то, что этот метод был усовершенствован в дальнейшем Пуассоном (Лакруа, Трактат, стр. 160). В приводимом им списке литературы Лакруа ссылается на статью Пуассона в № 3 «La Correspondance sur l'École Polytechnique». В библиографическом указателе, приложенном Марксом к его историческому очерку (см. настоящее издание, стр. 139), Пуассон упоминается без ссылки на его труды.

[165] Маркс подчеркивает различие между функцией как аналитическим выражением (функцией «в x») и функцией как зависимостью (одной переменной от другой: функцией «от x») и обращает внимание на путаницу, обусловленную тем, что эти понятия не различаются. В современной литературе, особенно в трудах по математической логике школы А. А. Маркова, эта путаница устраняется тем, что употребляются два различных знака равенства: «$=$» и «$\doteq$». «$y = f(x)$» означает, по существу, что y есть функция «от x» в смысле Маркса; «$y \doteq f(x)$» означает, что y есть аналитическое выражение — слово в соответствующем алфавите, имеющее вид «$f(x)$» ($5x^4$ в примере, рассматриваемом Марксом,— функция «в x» в смысле Маркса). Подробнее об этом см. примечание [6].

[166] В соответствии со сказанным в предыдущем примечании Маркс понимает выражение вроде, например, $f(x) = 5x^4$ в том же смысле, в каком мы теперь написали бы $f(x) \doteq 5x^4$, т. е. как утверждение, что $f(x)$ имеет вид $5x^4$ (что $f(x)$ есть «слово» вида $5x^4$). Такие выражения, так же как и уравнение, имеют две стороны (правую и левую), которые Маркс и противопоставляет здесь друг другу как общее неопределенное выражение (слева) в противоположность частному выражению (справа).

[167] Уже из непосредственно следующих (за этим местом) абзацев ясно, что Маркс отнюдь не считает такое алгебраическое (в принятом им смысле слова «алгебраический») наведение на теорему Тейлора действительным доказательством этой теоремы.

Под «дифференцированием» (Differentiation) Маркс понимает иногда просто образование разности (Differenz) $f(x+h) - f(x)$; а в таком случае под «дифференцированием $f(x)$, когда x возрастает на положительное или отрицательное приращение h», естественно понимать приближенное (с той или иной степенью точности) вычисление (конечного) приращения функции (в данной точке x_0) при данном приращении h независимой переменной x. Об употреблении теоремы Тейлора для последовательного дифференцирования функции $f(x)$ с помощью разложения $f(x+h)$ в ряд по степеням h см. ниже.

Что касается слова «каждой» (функции), то уже из следующего абзаца (пункт а)) видно, что Маркс отнюдь не считает всякую функцию разложимой в ряд Тейлора. Ясно поэтому, что под «каждой функцией» он имеет здесь в виду каждую функцию $f(x)$, для которой $f(x+h)$ разложима в ряд Тейлора.

168 Здесь, очевидно, имеется в виду, что из разложения $f(x+h)$ в ряд Тейлора можно извлечь цепочку приращений

$$y_1 - y,\ (y')_1 - y',\ (y'')_1 - y'' \text{ и т. д.},$$

о чем подробнее Маркс говорит уже в следующем абзаце. Вслед за использованными источниками (см. прежде всего учебник Бушарла), Маркс употребляет обозначение y' как в смысле наращенного значения y, т. е. y_1, так и в смысле производной от y. Чтобы устранить эту двусмысленность, мы заменили в следующем абзаце Марксовы

$$y' - y, \quad y'' - y', \quad y''' - y'' \quad \text{и т. д.}$$

соответственно на

$$y_1 - y,\ (y')_1 - y',\ (y'')_1 - y'' \text{ и т. д.}$$

169 Вторая часть этого абзаца, начиная со слов «sondern umgekehrt» («а наоборот»), написана в рукописи начерно, с большим числом зачеркиваний и описок. Так как не совсем ясно, что именно здесь хотел сказать Маркс, мы не позволили себе исправить даже явные описки. По-видимому, Маркс имеет в виду некоторое обобщение (на случай любой функции, выразимой степенным рядом) того непосредственного «алгебраического» дифференцирования равенства

$$y_1 \text{ или } (x+h)^{m+1} =$$
$$= x^{m+1} + (m+1)\,x^m \frac{h}{1} + (m+1)\,m x^{m-1} \frac{h^2}{1\cdot 2} + (m+1)\,m\,(m-1)\,x^{m-2} \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{и т. д.},$$

которым он занимался на страницах 4—5 своей рукописи. В словах «Differenzen von $f(x_1)$ und $f(x)$» («разности между $f(x_1)$ и $f(x)$») буква f есть, по-видимому, просто стенографическая запись слова «функция», т. е. это место можно было бы перевести как «разности между значениями некоторой функции в x_1 и в x». Если такую функцию обозначить буквой φ, то формулу

$$y_1 = A\ (x_1{}^m - x^m)$$

(которая содержит явную описку) следует, вероятно, читать так:

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = A\,(x_1^m - x^m).$$

Под «произвольною» постоянною A здесь понимается, очевидно, «некоторая» («какая-то не определяемая ближе») постоянная.

170 По-видимому, Маркс имеет в виду способ формального дифференцирования функции, представленной степенным рядом, первое предписание которого гласит: если

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ и т. д.},$$

то

$$f(x+h) = A + B\,(x+h) + C\,(x+h)^2 + D\,(x+h)^3 + \text{и т. д.} =$$
$$= A + B\,(x+h) + C\,(x^2 + 2xh + h^2) + D\,(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + \text{и т. д.}$$

Здесь действительно приходится пользоваться биномиальной теоремой, начиная со второй степени бинома $(x+h)$.

171 Тут, очевидно, имеется в виду рукопись «О понятии производной функции» (см. настоящее издание, стр. 29).

172 Биномиальную теорему Ньютона, и притом даже обобщенную на любой действительный показатель степени, получил с помощью своего «анализа разностей», т. е. некоторого аналога Марксова «алгебраического метода дифференцирования», Джон Ланден (см. Приложение, стр. 581). К сожалению, Маркс, который не хотел даже окончательно оформлять свои рукописи по истории методов дифференциального исчисления и теорем Тейлора и Маклорена, пока он не познакомится с работами Джона Ландена, не успел выполнить этого своего намерения. Следует отметить также, что, как это будет ясно из дальнейшего описания рукописи 4302, доказательство Ландена не вполне удовлетво-

рило бы Маркса, поскольку Ланден исходил из предположения о разложимости, и притом однозначной, $(a+x)^p$ в ряд по возрастающим целым степеням, Маркс же считал необходимым такую разложимость обосновать. Для случая целого положительного p он и делает это, ссылаясь на дистрибутивность умножения относительно сложения, где с этой целью Маркс представляет $(x+h)^6$ в виде

$$(x+h)(x+h)(x+h)(x+h)(x+h)(x+h).$$

«Приложения I», имеющегося в 5-м издании курса Бушарла, посвященного «доказательству формулы Ньютона с помощью дифференциального исчисления», в английском переводе 1828 г., которым пользовался Маркс, не было.

[173] Как ясно из дальнейшего, Маркс здесь имеет в виду только способ отыскания первой производной, состоящий в следующем: если

$$f(x+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\cdots,$$

где A, B, C, ... — функции только от x, то после того, как посредством полагания $h=0$ мы обнаруживаем, что $A=f(x)$, и приходим, таким образом (при $h\neq 0$), к равенству

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=B+Ch+Dh^2+\ldots,$$

мы получаем в правой стороне «предварительную» производную, т. е. некоторое выражение, в котором достаточно положить $h=0$, чтобы получить производную от $f(x)$. Вопрос о способах «высвобождения» дальнейших производных здесь в действительности еще не рассматривается.

[174] Здесь Маркс хочет сказать, что в уравнении 2а) коэффициентами при степенях h являются не сами последовательные производные функции от $(x+h)^m$, а только некоторые их дробные части.

[175] Так как непонятно, почему на место функций $f'(x)$, $f''(x)$, и т. д. нельзя подставить просто их символические эквиваленты $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, и т. д., то, очевидно, здесь Маркс хочет сказать что-то другое. На основании того, что он делает дальше, естественно предположить, что здесь описка и что мысль его состоит в следующем.

Если мы имеем только разложение

$$f(x+h)=f(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots \tag{1}$$

с неопределенными коэффициентами A, B, C, ..., то мы должны еще «с помощью дифференцирования» — здесь: образования отношения

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A+Bh+Ch^2+\ldots$$

и полагания затем $h=0$ — установить сначала, что $A=f'(x)$, из разложения для $f(x+h)$ получить затем разложение для $f'(x+h)$:

$$f'(x+h)=f'(x)+2Bh+3Ch^2+\ldots, \tag{2}$$

откуда

$$\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=2B+3Ch+\ldots$$

и, далее, при $h=0$

$$f''(x)=2B, \text{ т. е. } B=\frac{1}{1\cdot 2}f''(x),$$

и т. д.

Только после этого мы сумеем заменить неопределенные коэффициенты A, B, C, ... их «символическими эквивалентами», т. е. выражениями через символы $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... (и числовые коэффициенты).

[176] Напомним, что, как и в исчислении нулей Эйлера (см. Приложение, стр. 577), «снятые» (посредством полагания $x_1 = x$) разности $(u_1 - u)$ и $(v_1 - v)$ (в обозначениях Маркса) «равны» между собой, если их отношение равно единице, т. е. если равен единице предел отношения $\frac{u_1 - u}{v_1 - v}$ при $x_1 \to x$.

[177] См. Приложение «Теоремы Тейлора и Маклорена и теория аналитических функций Лагранжа в источниках, которыми пользовался Маркс», стр. 594.

[178] Весь этот абзац содержит в оригинале очень много зачеркиваний, и трудно сказать, как именно следует его читать. Нельзя ли, например, истолковать его так: «Никогда не рассматривается как принимающая только одно [определенное] частное значение a»? Такое истолкование, по-видимому, должно соответствовать Марксову пониманию слов «вообще говоря» в доказательстве Лагранжа.

УКАЗАТЕЛЬ ЦИТИРУЕМОЙ И УПОМИНАЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, М., 1960.—594.

Евклид, Начала Евклида, 3 т., М.— Л., 1949—1950.—*374*, *392*.

Маркс К., Математические рукописи, «Под знаменем марксизма», № 1, 1933, и сб. «Марксизм и естествознание», М., 1933.—3, 289.

Маркс К., О понятии функции, «Вопросы философии», № 11, 1958.—344.

Натансон И. П., Производные, интегралы и ряды, в кн. «Энциклопедия элементарной математики», т. III, Гостехиздат, М.— Л., 1952.

Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, М., 1964.—594.

Франклин Ф., Математический анализ, М., 1950.—305.

Цейтен Г. Г., История математики в XVI и XVII веках, М.— Л., 1938.—594.

Энгельс Ф., Анти-Дюринг, К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20.—3, 6.

Энгельс Ф., Диалектика природы, К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20.—6, 7, 12.

Becker O., Hofmann J. E., Geschichte der Mathematik, Bonn, 1951.—594.

Boetius Anicius Manlius Severinus, Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmeticae libri duo, Ed. G. Friedlein, Leipzig, 1867.—249.

Boucharlat J.-L., Élémens de calcul différentiel et de calcul intégral, 5-me éd., Paris, 1838. Английский перевод с 3-го франц. изд.: An elementary treatise on the differential and integral calculus, Cambridge — London, 1828.— 7, *63*, *125*, *262—264*, 267, 269, 281, *282*, 283, *285*, 286, 302, 306, 310, 314—320, 323, 325, 330, 335, 412, 413, 417, *419*, 420, 431, 434—436, 439, 440, 447, 452, 453, 456, 458—461, *463*, 464, 492—495, *497*, 499, 540, 541, 550, 565, 569—572, 587—593, 596—600.

Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 3, 2. Aufl., Leipzig, 1901.—594.

D'Alembert J., Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris, 1754.—*139*, *141*, *175*.

Develey, Algèbre d'Emile, 2 vol., Genéve, 1805.—336.

Euler L., Élémens d'algèbre, Lyon, 1795.—338, *341*, 344, *389*, *390*, 391.

Euler L., Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, Berlin, 1755. Русский перевод: Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, М.— Л., 1949.—*139*, 305, 577—580, 594, 596.

Euler L., Introductio in analysin infinitorum, Lausanne, 1748.—*139*.

Feller F. E., Odermann C. G., Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik, 7. Aufl., Leipzig, 1859.—5, 257, 258, *260*, 266, *310*, 311.

Foster J. L., An essay on the principle of commercial exchanges, London, 1804.—*260*.

Goodwin H., An elementary course of mathematics, 4th ed., Cambridge, 1853.—374, 385.

Goschen G. J., The theory of the foreign exchanges, 8th ed., London, 1875.—257, *258*.

Hall Th. G., A treatise on the differential and integral calculus, and the calculus of variations, 5th ed., London, 1852.—285, 310, 319, 320, 335, 412, 419, 439, 440, 453, 454, 461, 462, *493*, 494, 495, 497, 499.

Hall Th. G., The elements of algebra, 3rd ed., Cambridge, 1850.— 375, 382, 385, 389, 404.

Hall Th. G., A treatise on plane trigonometry, London, 1833.—459.

Halley Edm., Methodus nova, accurata et facilis inveniendi radices aequationum quarumcunque generaliter, sine praevia reductione, «Philosophical transactions of the Royal society of London», London, 1694.—390.

Hausner O., Vergleichende Statistik von Europa, 2 Bde., Lemberg, 1865.—*260*.

Hemming G. W., An elementary treatise on the differential and integral calculus, Second ed., Cambridge, 1852.—*411*, 412, 436, 461, 463, 512.

Hind J., The principles of the differential calculus; with its application to curves and curve surfaces. Second ed., Cambridge, 1831.—*177*, 267, 281—283, *286*, 306, 310, 316—319, 412, 413, 416, 431, 435, 436, 440, 447, 453, 454, 456, 458—463, 467, 468, 489, 493, 499, 543—545, 550, 565—572, 581, 596.

Hind J., The elements of algebra. 4th ed., Cambridge, 1839.—372, 389.

Hind J., The elements of plane and spherical trigonometry, 3rd ed., Cambridge, 1837.— 370—372, 409, 456, 458, 459.

Hymers J., A treatise on conic sections and the application of algebra to geometry, 3rd ed., Cambridge, 1845.—261.

Juschkewitsch A. P., Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. In: «Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonard Eulers», Berlin, 1959.—579.

Knopp K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 2. Aufl., Berlin, 1924.—562.

Lacroix S. F., Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. 3 vol., seconde éd., Paris, 1810—1819.—14, 310, *311*, 312—314, 343, 344, 494, 567, 571, 572, 585, 586.

Lacroix S. F., Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, 2-e éd., Paris, 1806. Англ. перевод: An elementary treatise on the differential and integral calculus, Cambridge, 1816.—283, 304.

Lacroix S. F., Élémens d'algèbre, 11-me éd., Paris, 1815.—336—338, 343, 354, 357, 367—370, 372, 412, 437, 438, 451.

Lacroix S. F., Complément des éléments d'algèbre, 4-e éd., Paris, 1817, 7-me éd., Paris, 1863.—386—388, 585.

Lagrange J. L., Théorie des fonctions analytiques, Paris, 1813. Или в Oeuvres de Lagrange, vol. IX, Paris, 1881.—*139*, *141*, *175*, 573, 586.

Lagrange J. L., Nouvelle méthode pour résoudre les équations, littérales par le moyen des séries, «Mémoires de l'Académie royale de Sciences et Belles Lettres de Berlin, t. XXIV, 1770.

Landen J., The residual analysis, London, 1764.—*199*, 573, 581—586.

L a n d e n J., A discourse of the residual analysis, London, 1758.—586.

L h u i l i e r S., Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Tübingen, 1795.—594.

M a c l a u r i n C., A treatise of algebra in 3 parts, 1st ed., 1748, 6th ed., London, 1796.—354, 368, 369, 378, *379*, *380*, 381, 382, 386, *391*, 392, *393*, 394, *395*, *397*, 398, *399*, *400*, 401, *402*, *403*, 404, 405, 407, *408*, 409, *437*, *450*, *451*, 597.

M a c l a u r i n C., Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, London, 1720.—*438*.

M o i g n o F., Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'aprés les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de Mr. L. A. Cauchy, 2 vol., Paris, 1840 et 1844.—*139*.

N e w t o n I., Philosophiae naturalis principia mathematica, London, 1687. Русское изд.: Н ь ю т о н И., Математические начала натуральной философии, перевод с лат. с поясн. и примеч. А. Н. Крылова, Известия Николаевской морской академии, Спб., 1915—1916.—7, *139*, *141*, 574—576.

N e w t o n I., Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber, Cambridge, 1707.—*197*, *379*, *408*, *437*, *438*, *445*, *450*.

N e w t o n I., Analysis per quantitatum series, fluxiones et differentias, cum enumeratione linearum tertii ordinis, 1711.—*139*, *141*.

N e w t o n I., De analysi per aequationes numero terminorum infinitas, 1669. Русское изд.: Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов. В сб.: И с а а к Н ь ю т о н, Математические работы, М.—Л., 1937.—7, *272*, 304.

P o p p e J. H. M., Geschichte der Mathematik seit der ältesten bis auf die neuste Zeit, Tübingen, 1828.—242, 243, 246—249.

P o t t s R., Elementary algebra, 1880.—375.

S a d l e r M. Th., Ireland; its evils and their remedies, Second ed., London, 1829.—*260*.

S a u r i, Cours complet de mathématiques. 5 vol., Paris, 1778.— 7, 251, 255, 256, 261, 262, 264—269, 271, 272, 280, 281, 320, 335, 439, 440, 454, 461.

S p e h r F r. W., Vollständiger Lehrbegriff der reinen Kombinationslehre. Braunschweig, 1824.—378, 409.

S t e r n M. A., Lehrbuch der algebraischen Analysis, 1860.—409.

T a y l o r B., Methodus incrementorum directa et inversa, London, 1715.—*139*, *438*, 493, *494*, 594.

T h i b a u t B., Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen, Göttingen, 1809.—377, 378, 383, 409.

W o o d J., Elements of algebra. 3rd ed., Cambridge, 1810.—410.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РУКОПИСЕЙ

К. МАРКС

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ

М., 1968 г., 640 стр. с илл.

Редакторы: *А. З. Рывкин* и *О. К. Сенекина.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректоры: *О. А. Бутусова, Т. Д. Доверман, Т. С. Плетнева.*

Сдано в набор 18/XII 1967 г. Подписано к печати 2/IV 1968 г. Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 40+4 вкл. Условн. печ. л. 56,7. Уч.-изд. л. 38,94. Тираж 8600 экз. Цена книги 1 р. 17 к. Заказ № 29.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9